

Функции нескольких переменных

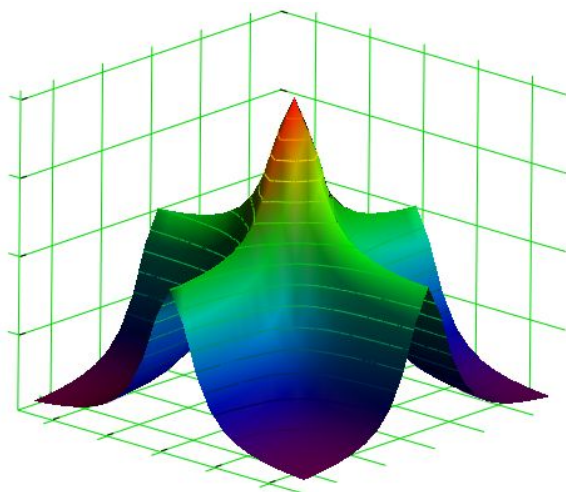
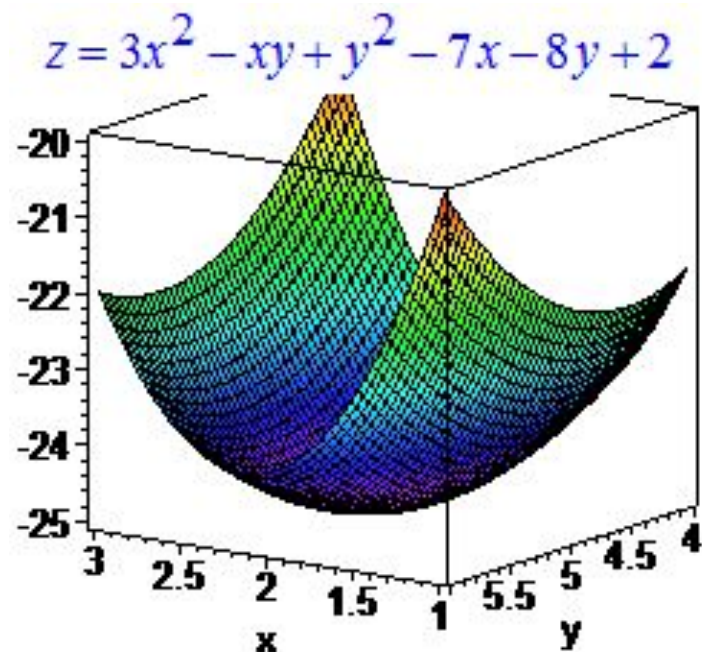


График функции $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$



Иванова М.К., старший преподаватель
кафедры прикладной математики МФ ЧелГУ

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) x, y, z, \dots, t , если каждой системе значений x, y, z, \dots, t , из области их изменения, соответствует определенное значение u .

Функциональная зависимость u от x, y, z, \dots, t символически обозначается: $u = f(x, y, z, \dots, t)$, где после символа функции (которым может быть не только буква f , но и другие буквы) в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Частное значение функции $P(x, y, z, \dots, t)$ при $x = a, y = b, z = c, \dots, t = l$ обозначается $P(a, b, c, \dots, l)$. Например, если $F(x, y, z) = \frac{3x}{y - \lg z}$, то $F(-2; 3; 10) = \frac{-6}{3-1} = -3$.

Геометрически каждая система значений двух переменных x, y изображается точкой на плоскости, а функция двух переменных $z = f(x, y)$ — некоторой поверхностью в пространстве; система значений трех переменных x, y, z изображается точкой в пространстве. (Обычно значения переменных рассматриваются как абсцисса, ордината и аппликата точки в прямоугольной системе координат.)

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако, в целях общности, для упрощения записей и рассуждений, систему значений любого числа n переменных x, y, z, \dots, t называют точкой n -мерного пространства $M(x, y, z, \dots, t)$, а функцию u , зависящую от n переменных, называют функцией точки n -мерного пространства $u = f(x, y, z, \dots, t) = f(M)$.

Областью определения (существования) функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ область определения представляет некоторую совокупность точек плоскости, а для

функции трех переменных $u = F(x, y, z)$ — некоторую совокупность точек пространства.

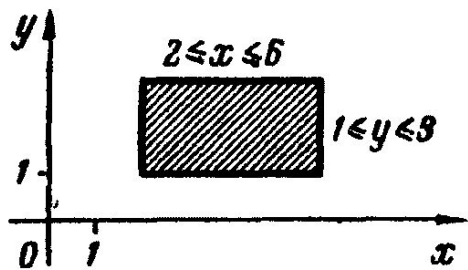
708. Построить область D изменения переменных x и y , заданную следующими неравенствами:

1) $2 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 3;$

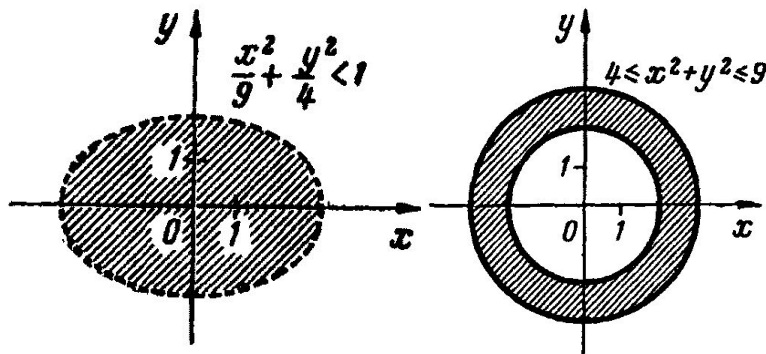
2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1;$

3) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9;$

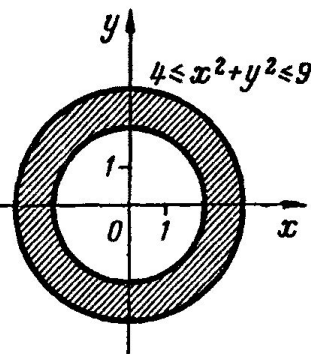
4) $0 < y < x.$



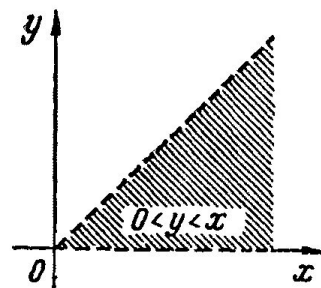
Черт. 135



Черт. 136



Черт. 137



Черт. 138

709. Найти области определения следующих функций:

1) $z = 4 - x - 2y;$

2) $\rho = \frac{3}{x^2 + y^2};$

3) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$

4) $q = \frac{1}{\sqrt{xy}};$

5) $u = \frac{x^2 y}{2x + y};$

6) $v = \arcsin(x + y).$

Предел и непрерывность функций нескольких переменных

Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A,$$

если абсолютное значение разности $f(M) - f(M_0)$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε , когда расстояние MM_0 меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от ε).

Функция $f(M)$ называется непрерывной, в точке M_0 , если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim x \cdot \lim \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1.$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x+y} = \lim \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \text{ — не существует, ибо отношение } \frac{y}{x}$$

не имеет предела при произвольном стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(0; 0)$. Так, если $M \rightarrow M_0$ вдоль различных прямых $y = kx$, то $\frac{y}{x} = k$, т. е. зависит от углового коэффициента прямой, по которой движется точка M .

Для непрерывности функции $f(M)$ в точке M_0 необходимо выполнение следующих условий:

1) $f(M)$ должна быть определена в точке M_0 и вблизи этой точки;

2) $f(M)$ должна иметь предел, когда точка $M \rightarrow M_0$ произвольным способом;

3) этот предел должен быть равен $f(M_0)$.

Функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке некоторой области D , называется непрерывной в этой области.

715. В каких случаях функция многих переменных $f(M)$ будет разрывна в точке M_0 ? Пояснить их примерами.

Решение. 1) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0 , если она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке M_0 .

Например, функция $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$ определена на всей плоскости xOy , но не определена в точке $M_0(0; 0)$, поэтому в этой точке функция разрывна. Во всех других точках числовой плоскости она непрерывна.

2) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0 , если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но не имеет предела, когда точка $M \rightarrow M_0$.

Например, функция

$$u = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{при } x \neq 0, y \neq 0 \\ 3 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(0; 0)$, так как она определена вблизи этой точки и в самой точке (на всей плоскости xOy), но не имеет предела при $M \rightarrow M_0$. В остальных точках плоскости xOy она непрерывна.

3) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0 , если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Например, функция

$$z = \begin{cases} 5 - x - y & \text{при } x \neq 1, y \neq 2 \\ 1 & \text{при } x = 1, y = 2 \end{cases}$$

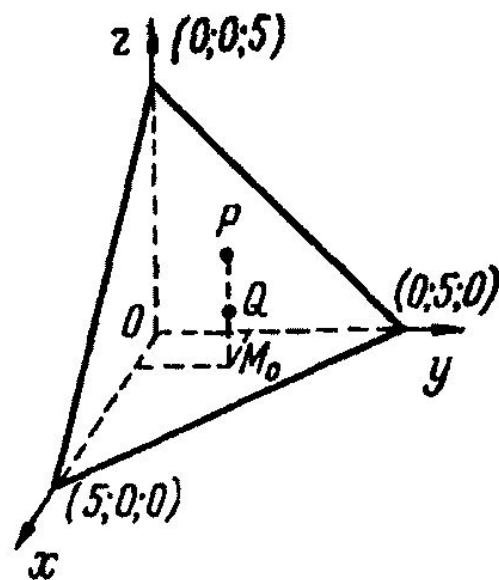
разрывна в точке $M_0(1; 2)$, ибо она определена вблизи этой точки и в самой точке, но ее предел при $M \rightarrow M_0$ не совпадает с частным значением в точке M_0 ; $\lim_{M \rightarrow M_0} z =$

$$= 2 \neq z(M_0) = 1.$$

Графиком этой функции является вся плоскость $z = 5 - x - y$ без точки $P(1; 2; 2)$, вместо которой графику принадлежит точка $Q(1; 2; 1)$ (черт. 141).

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может иметь множество точек разрыва; если они составляют линию, то она называется линией разрыва функции.

Например, функция $z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$ разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 1$.



Черт. 141

Функцию $u = f(x, y, z, \dots, t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

Производная от функции $u = f(x, y, z, \dots, t)$ по x , взятая в предположении, что все остальные аргументы y, z, \dots, t являются постоянными, называется частной производной от u по x

и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные от функции u по каждому из остальных ее аргументов.

Простейшие формулы дифференцирования:

1) $(c)' = 0;$

2) $(u + v - w)' = u' + v' - w';$

3) $(uv)' = u'v + v'u;$

3a) $(cu)' = cu';$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$

4a) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$

4б) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2};$

5) $(x^n)' = nx^{n-1};$

6) $(\sin x)' = \cos x;$

7) $(\cos x)' = -\sin x;$

8) $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{sec}^2 x;$

9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$

721. $z = (5x^3y^2 + 1)^3.$

722. $r = \sqrt{ax^2 - by^2}.$

723. $v = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$

724. $\rho = \operatorname{arcsin} \frac{x}{t}.$

725. $f(m, n) = (2m)^{3n};$ вычислить f'_m и f'_n в точке $A\left(\frac{1}{2}; 2\right).$

726. $\rho(x, y, z) = \sin^2(3x + 2y - z);$ вычислить $\rho'_x(1; -1; 1),$
 $\rho'_y(1; 1; 4), \rho'_z\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right).$

727. Проверить, что функция $v = x^y$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{x}{y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial v}{\partial y} = 2v.$$

728. Проверить, что функция $\omega = x + \frac{x-y}{y-z}$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 1.$$

Частным дифференциалом функции $u = f(x, y, \dots, t)$ по x называется главная часть соответствующего частного приращения $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, \dots, t) - f(x, y, \dots, t)$, линейная относительно приращения Δx (или, что то же, дифференциала dx).

Аналогично определяются частные дифференциалы функции u по каждому из остальных ее аргументов. Частные дифференциалы функции u по x , по y , ..., по t обозначаются, соответственно, $d_x u$, $d_y u$, ..., $d_t u$.

Из определения частных производных следует, что

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad \dots; \quad d_t u = \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Полным дифференциалом функции $u = f(x, y, \dots, t)$ называется главная часть ее полного приращения

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots, t + \Delta t) - f(x, y, \dots, t),$$

линейная относительно приращений $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$ (или, что то же, дифференциалов dx, dy, \dots, dt).

Полный дифференциал du функции u (если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов

$$du = d_x u + d_y u + \dots + d_t u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Функция $u(x, y, \dots, t)$ называется дифференцируемой в точке (x, y, \dots, t) , если в этой точке она имеет полный дифференциал.

При достаточно малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta u \approx du.*$$

731. Вычислить приближенное значение:

1) $1,08^{3,96}$; 2) $\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,07}{2^{2,95}}$.

Решение. Если требуется вычислить значение функции $f(x, y, \dots, t)$ в точке $M_1(x_1, y_1, \dots, t_1)$ и если проще вычислить значения этой функции и ее частных производных в точке $M_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$, то при достаточно малых, по абсолютной величине, значениях разностей $x_1 - x_0 = dx$, $y_1 - y_0 = dy$, \dots , $t_1 - t_0 = dt$ можно заменить полное приращение функции ее полным дифференциалом:

$$f(M_1) - f(M_0) \approx f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + \dots + f'_t(M_0)dt,$$

и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + \dots + f'_t(M_0)dt. \quad (a)$$

1) Полагая, что $1,08^{3,96}$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^y$ в точке $M_1 (1,08; 3,96)$ и что вспомогательная точка будет $M_0 (1; 4)$, получим

$$f(M_0) = 1^4 = 1; f'_x(M_0) = yx^{y-1} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=4}} = 4; f'_y(M_0) = x^y \ln x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=4}} = 0;$$

$$dx = 1,08 - 1 = 0,08; dy = 3,96 - 4 = -0,04.$$

Подставляя в формулу (а), найдем

$$1,08^{3,96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0) dx + f'_y(M_0) dy = 1 + 4 \cdot 0,08 = 1,32.$$

2) Пусть $\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,07}{2^{2,95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$ в точке $M_1(-2,95; 1,49; 0,07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3; \frac{\pi}{2}; 0\right)$. Тогда $dx = -2,95 - (-3) = 0,05$; $dy = 1,49 - 1,57 = -0,08$; $dz = 0,07$;

$$\varphi(M_0) = 2^{-3} \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = 0; \quad \varphi'_x(M_0) = 2^x \ln 2 \cdot \sin y \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \Big|_{M_0} = 0;$$

$$\varphi'_y(M_0) = 2^x \cos y \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \Big|_{M_0} = 0; \quad \varphi'_z(M_0) = \frac{2^x \sin y}{1+z^2} \Big|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Подставляя в формулу (а), получим

$$\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,07}{2^{2,95}} \approx 2^{-3} \cdot 0,07 \approx 0,01.$$

Найти полные дифференциалы функций:

732. $z = y \ln 2x.$

733. $u = \sin^2 t \cos^2 x.$

734. $v = \frac{xy}{z}.$

735. $f(m, n, \rho) = e^{am} \cos \frac{bn}{\rho}.$

Переменная z называется сложной функцией от независимых переменных x, y, \dots, t , если она задана через посредство промежуточных аргументов u, v, \dots, ω :

$$z = F(u, v, \dots, \omega),$$

$$u = f(x, y, \dots, t), \quad v = \varphi(x, y, \dots, t), \quad \dots, \quad \omega = \psi(x, y, \dots, t).$$

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y};$$

.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}. \quad (*)$$

Если, в частности, все аргументы u, v, \dots, ω будут функциями от одной независимой переменной x , то и z будет сложной функцией только от x . Производная такой сложной функции (от одной независимой переменной) называется полной производной и определяется формулой

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \dots + \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dx}. \quad (**)$$

741. $u = e^{z-2y}$, $z = \sin x$, $y = x^3$; $\frac{du}{dx}$?

742. $z = \ln(e^x + e^t)$; найти 1) $\frac{\partial z}{\partial t}$, 2) $\frac{dz}{dt}$, если $x = t^3$

743. $\rho = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$; $\frac{\partial \rho}{\partial x}$? $\frac{\partial \rho}{\partial y}$?

744. $f(x) = \arcsin \frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$; $\frac{df}{dx}$?

Переменная u называется неявной функцией от независимых переменных x, y, \dots, t , если она задана уравнением $f(x, y, \dots, t, u) = 0$, которое не разрешено относительно u . При этом, если функция $f(x, y, \dots, t, u)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, \dots, f'_t, f'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, \dots, t_0, u_0)$ и вблизи нее и если $f(M_0) = 0$, а $f'_u(M_0) \neq 0$, то уравнение $f(x, y, \dots, t, u) = 0$ вблизи точки $P(x_0, y_0, \dots, t_0)$ и в самой этой точке определяет u как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от x, y, \dots, t .

Производные неявной функции u , заданной уравнением $f(x, y, \dots, t, u) = 0$, при соблюдении указанных условий определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_u}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_u}; \quad \dots; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f'_t}{f'_u}. \quad (\text{A})$$

В частности, если y есть неявная функция одной переменной x , заданная уравнением $f(x, y) = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{f'_x}{f'_y}. \quad (\text{B})$$

Найти производные неявных функций:

747. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$? 748. $uv = -\ln(uv)$; $\frac{dv}{du}$?

749. $y^2 = \frac{x+y}{x-y}$; $\frac{dy}{dx} \Big|_{y=2}$? 750. $x \sin y + \cos 2y = \cos y$; $y' \Big|_{y=\frac{\pi}{2}}$?

751. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$; z'_x ? z'_y ? 752. $e^u = \cos v \cos t$; $\frac{\partial u}{\partial v}$? $\frac{\partial u}{\partial t}$?

753. Проверить, что функция $4 \sin(3x + 2y + 5z) = 3x + 2y + 5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$.

Функцию многих аргументов $u = f(x, y, \dots, t)$ можно дифференцировать по каждому аргументу. Полученные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}$ (первого порядка) обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них также можно дифференцировать по каждому аргументу.

Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка. Они обозначаются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка. Они обозначаются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f'''_{xxx}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого, пятого и других высших порядков.

Частные производные высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Согласно этому положению, функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет три различных частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

четыре различных частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и вообще $n + 1$ различных частных производных n -го порядка.

Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной (гл. II).

757. Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z = \frac{x^2}{2y-3}$; 2) $u = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

758. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \ln(x+y)$.

759. Найти u'''_{xyy} , если $u = \sin(xy)$.

760. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = 2^{xyz}$.

761. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций:

$$1) z = \ln \frac{x}{y}; \quad 2) z = \operatorname{arctg}(x+2y).$$

762. Проверить, что $\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$ для функции $v = \frac{1}{xyz}$.

763. Проверить, что функция $\rho = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0$.

764. Проверить, что функция $u = e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Экстремум функции нескольких переменных

Значение функции $f(M)$ в точке M_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках.

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют. Такие точки называются критическими.*

Критическая точка M_0 будет точкой экстремума функции $f(M)$, если для всех точек M , достаточно близких к M_0 (в окрестности M_0), приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знака. При этом, если Δf сохраняет положительный знак, то M_0 есть точка минимума, а если Δf сохраняет отрицательный знак, то M_0 есть точка максимума функции.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ вместо исследования знака Δf можно исследовать каждую критическую точку M_0 , в которой функция дважды дифференцируема, по знаку определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0).$$

При этом:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 есть точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

✓ 3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M_0 требуется дальнейшее исследование, например по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Условия 1) и 2) являются достаточными условиями наличия или отсутствия экстремума.

774. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5;$

2) $u = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5};$

3) $v = (x - y)^2 + (y - 1)^3;$

4) $w = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}.$

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции многих переменных определяются так же, как и для функции одной переменной (гл. III, § 5).

Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D , обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D , или в точках, лежащих на границе области.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D , где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области D , и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D .

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области D .

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

785. $\varphi = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.

786. $r = 3xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 2$.

787. Найти наибольшее значение функции $v = xy(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 6$.

788*. Найти наименьшее значение функции $u = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ в квадрате $0 \leq x \leq 1,5\pi$, $0 \leq y \leq 1,5\pi$.

789. Найти точку треугольника $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наибольшее значение.

790. Какой треугольник с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь? (Использовать формулу для площади треугольника по трем его сторонам.)

791. Найти точку четырехугольника $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) , $(0, 2a)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

792. Из куска проволоки длиной l сделать каркас прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом.

793. Определить размеры открытого прямоугольного ящика с данным объемом V и с наименьшей поверхностью.