

Модель принятия решений. Модель объекта.

Вектор параметров

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

$N \geq 1$ - размерность модели

Вектор-функция характеристик

$$W(y) = (W_1(y), W_2(y), \dots, W_n(y))$$

Лучше, когда меньше.



Модель принятия решений. Координатные ограничения.

Координаты вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ изменяются в заданных пределах, определяемых векторами начала и конца

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_N), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_N),$$

где $a_i, b_i, 1 \leq i \leq N$ — константы, причем, возможно

$$a_i = -\infty \text{ и/или } b_i = +\infty$$

Гиперпараллелепипед возможных значений вектора

$$D = \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}$$

Модель принятия решений. Функциональные ограничения.

Задается множество индексов

$$G = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

и набор допусков $q_i, 1 \leq i \leq m$.

Для характеристик $W_{j_i}(y)$ с номерами $j_i \in G$ ставится условие неперевышения соответствующих допусков q_i , т.е. вводятся

функциональные ограничения

$$W_{j_i}(y) \leq q_i, j_i \in G. \quad (6)$$

Определение. Вектор $y \in D$, удовлетворяющий неравенствам (6), называется **допустимым вектором (допустимой точкой)**.

Модель принятия решений. Функциональные ограничения.

Введем обозначения

$$g_i(y) = W_{j_i}(y) - q_i, 1 \leq i \leq m,$$

Тогда

$$g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m. \quad (8)$$

Допустимая область

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

Если $m = 0$, то $Q = D$.

Модель принятия решений. Частичная вычислимость.

Введем семейство вложенных множеств

$$Q_1 = D, Q_{i+1} = \{y \in Q_i : g_i(y) \neq 0\}$$

Очевидно, что

$$Q_{m+1} = Q \quad \text{и} \quad Q_{m+1} \subseteq Q_m \subseteq \dots \subseteq Q_2 \subseteq Q_1 = D.$$

Определение. Ограничения (7) называются **полностью вычислимыми**, если все функции $g_i(y), 1 \leq i \leq m$, определены и вычислимы в множестве D .

Определение. Ограничения (7) называются **частично-вычислимыми**, если каждая функция $g_i(y), 1 \leq i \leq m$, определена и вычислима в соответствующем множестве Q_i .

Модель принятия решений. Векторный критерий эффективности.

Зададим множество индексов

$$F = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

и введем вектор-функцию

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_k(y)), \quad (12)$$

где

$$f_s(y) = W_{i_s}(y), \quad i_s \in F. \quad (13)$$

Вектор-функция (12) называется **векторным критерием эффективности**. В модели с частичной вычислимостью $f_s(y)$ для $s \in F$, критерии $Q_{m+1} = Q$.

могут быть определены только в области $G \cap F \neq \emptyset$.
В общем случае допускается $G \cap F \neq \emptyset$.

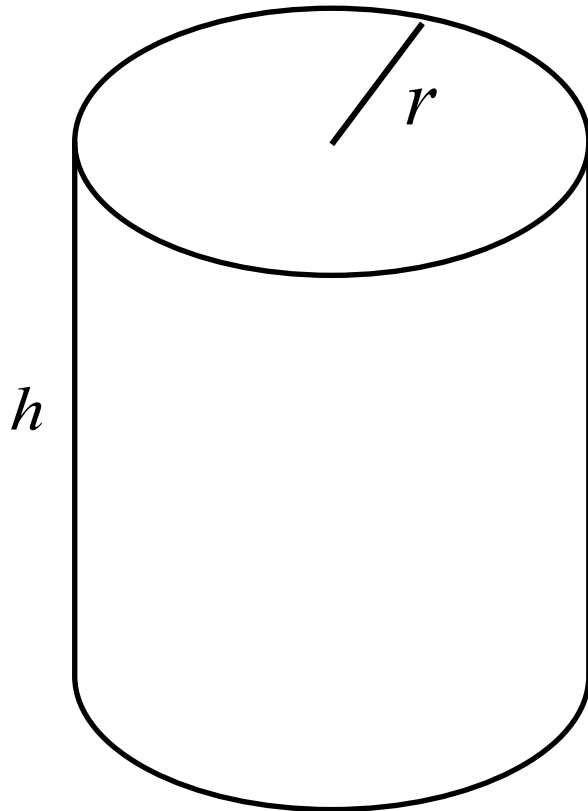
Модель принятия решений. Оптимальность решения.

Решение оптимизационной задачи

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q, \quad (14)$$

принимается в качестве оптимального решения в рамках сформированной модели.

Модель принятия решений. Консервная банка.



$$y = (r, h)$$

$$r \geq 0, h \geq 0$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$L = 4\pi r + h$$

$$V = \text{const}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2V / r$$

$$L = 4\pi r + V / \pi r^2$$

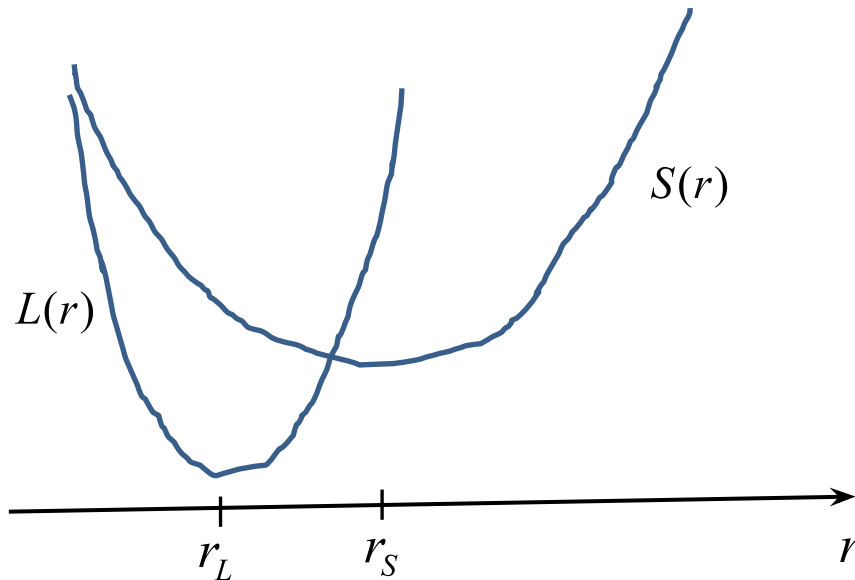
Модель принятия решений. Консервная банка.

$$f(r) = (S(r), L(r)) \rightarrow \min, 0 \leq r \leq \infty$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0, \quad r_S = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$$

$$L'(r) = 4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}, \quad r_L = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}, \quad L''(r) = \frac{6V}{\pi r^4} > 0$$

$$r_S > r_L$$



Модель принятия решений. Оптимальное решение

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_k(y)),$$

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

$$D = \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}$$

Что является оптимальным решением в случае противоречивости частных критериев?

Модель принятия решений.

Оптимальное решение

Определение 1. Точка $x \in Q$ доминирует точку $y \in Q$ ($x \succ y$), если

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \quad f_i(x) < f_i(y)$$

(сильное доминирование).

Определение 2. Точка $x \in Q$ доминирует точку $y \in Q$ ($x \succsim y$), если

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \quad f_i(x) \leq f_i(y)$$

и существует номер $j, 1 \leq j \leq k,$ такой, что $f_j(x) < f_j(y)$
(слабое доминирование).

Модель принятия решений. Паретовское оптимальное решение.

Определение 3. Точка $y^* \in Q$ и соответствующий ей вектор $f(y^*)$ называются эффективными (неулучшаемыми, оптимальными по Парето) $\forall y \in Q$

Если из условий $f_i(y) \leq f_i(y^*), 1 \leq i \leq k,$

$$f(y) = f(y^*)$$

следует, что

y^* оптимальна по Парето, если ее нельзя улучшить в ни по одному частному критерию.

Оптимальное решение – множество \emptyset всех паретовских точек.

Модель принятия решений. Слейтеровское оптимальное решение.

Определение 4. Точка $\tilde{y} \in Q$ называется слабо эффективной (оптимальной по Слейтеру, слейтеровской точкой), если не существует такой, что

$$f_i(x) < f_i(\tilde{y}), 1 \leq i \leq k,$$

(т.е. не существует доминатора в смысле Определения 1).

Оптимальное решение – множество всех слейтеровских точек.

Очевидно, что $P \subseteq S$.

Метод главного критерия

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_k(y))$$

$$Q_1^* = \{y_1^* \in Q : f_1(y_1^*) = \min_{y \in Q} f_1(y)\}$$

$$Q_2^* = \{y_2^* \in Q_1^* : f_2(y_2^*) = \min_{y \in Q_1^*} f_2(y)\}$$

...

$$Q_k^* = \{y_k^* \in Q_{k-1}^* : f_k(y_k^*) = \min_{y \in Q_{k-1}^*} f_k(y)\}$$

Метод сверток. Линейная свертка.

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_k(y))$$

Вектор весов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

Линейная свертка $\Lambda(y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(y)$

Рассмотрим задачу

$$\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q$$

Метод сверток. Линейная свертка.

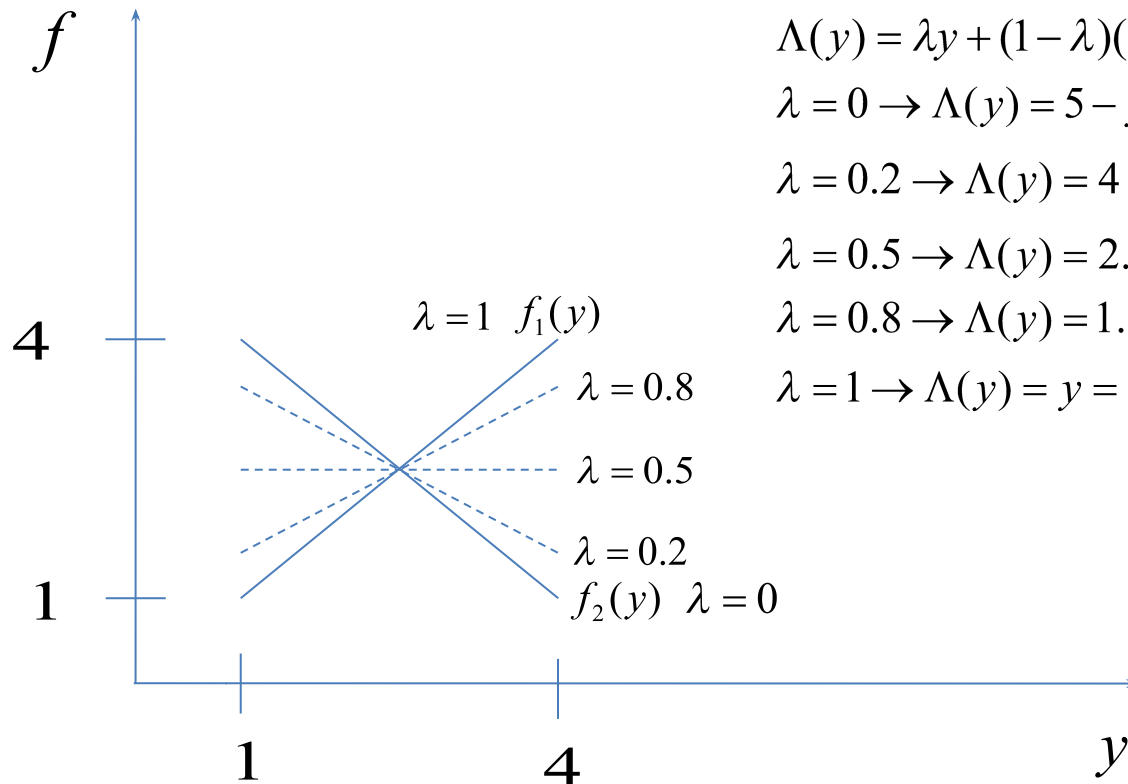
Пример.

$$f_1(y) = y$$

$$f_2(y) = 5 - y$$

$$Q = [1, 4]$$

$$\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q$$



$$\Lambda(y) = \lambda y + (1 - \lambda)(5 - y) = (2\lambda - 1)y + 5(1 - \lambda)$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(y) = 5 - y = f_2(y) \rightarrow y^* = 4$$

$$\lambda = 0.2 \rightarrow \Lambda(y) = 4 - 0.6y \rightarrow y^* = 4$$

$$\lambda = 0.5 \rightarrow \Lambda(y) = 2.5 \rightarrow y^* \in [1, 4]$$

$$\lambda = 0.8 \rightarrow \Lambda(y) = 1.6y + 1 \rightarrow y^* = 1$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \Lambda(y) = y = f_1(y) \rightarrow y^* = 1$$

$$Q_\lambda^* = \begin{cases} \{4\}, & 0 \leq \lambda < 0.5 \\ [1, 4], & \lambda = 0.5 \\ \{1\}, & 0.5 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Метод свертки. Линейная

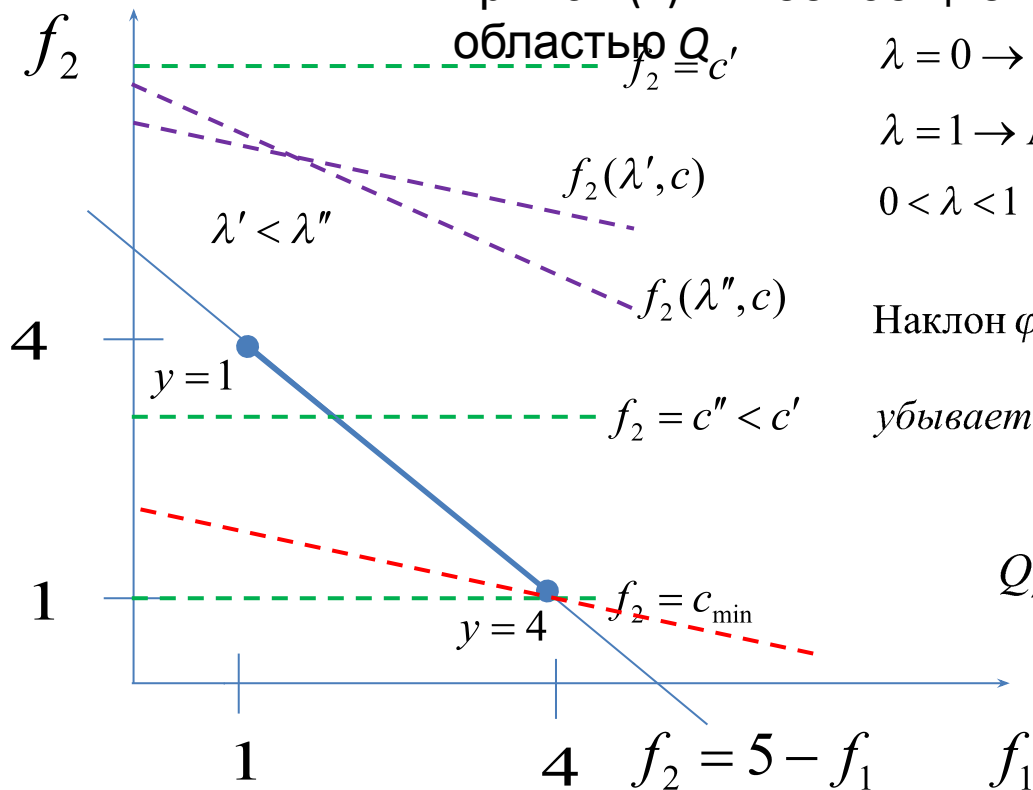
свертка.

Область Q в пространстве критериев : $y = 1 \rightarrow (1, 4)$, $y = 4 \rightarrow (4, 1)$, $f_2 = 5 - f_1$

В пространстве критериев $\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$

Рассмотрим линии уровня $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 = c$ (*)

свертки $\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q$ означает, что надо найти наименьшее c , при котором прямая (*) имеет общие точки с допустимой областью Q .



$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(f) = f_2 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (4, 1)$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \Lambda(f) = f_1 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (1, 4)$$

$$0 < \lambda < 1 \quad f_2(\lambda, c) = \frac{c}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{1-\lambda} f_1$$

$$\text{Наклон } \varphi(\lambda) = -\frac{\lambda}{1-\lambda} < 0. \quad \varphi'(\lambda) = -\frac{1}{(1-\lambda)^2} < 0$$

убывает от 0 (при $\lambda = 0$) до $-\infty$ (при $\lambda = 1$)

$$Q_\lambda^* = \begin{cases} (4, 1), & 0 \leq \lambda < 0.5 \\ (f_1, 5 - f_1), & f_1 \in [1, 4], \lambda = 0.5 \\ (1, 4), & 0.5 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

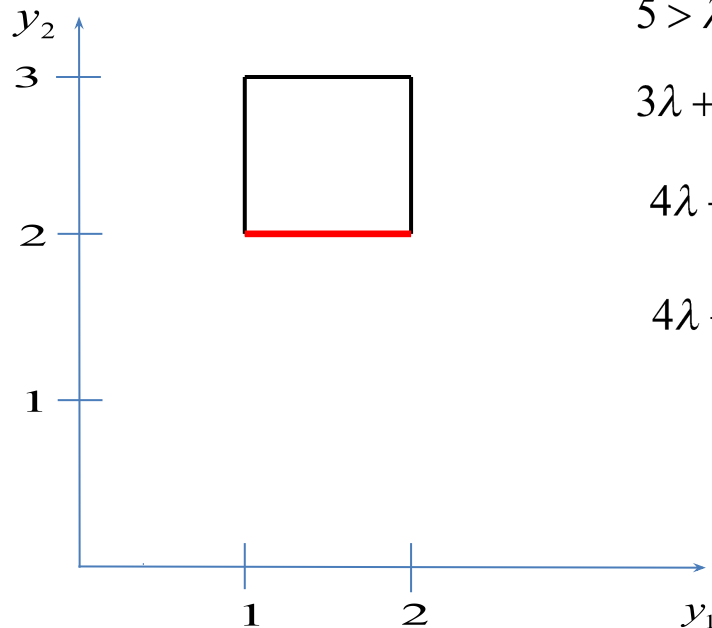
Метод сверток. Линейная свертка.

$$f_1(y) = 2y_1 + y_2$$

$$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$$

$$1 \leq y_1 \leq 2$$

$$2 \leq y_2 \leq 3$$



$$\Lambda(y) = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 = (3\lambda - 1)y_1 + (2 - \lambda)y_2$$

$$(1,2) \rightarrow \Lambda(y) = (3\lambda - 1) + 2(2 - \lambda) = \lambda + 3$$

$$(1,3) \rightarrow \Lambda(y) = (3\lambda - 1) + 3(2 - \lambda) = 5$$

$$(2,2) \rightarrow \Lambda(y) = 2(3\lambda - 1) + 2(2 - \lambda) = 4\lambda + 2$$

$$(2,3) \rightarrow \Lambda(y) = 2(3\lambda - 1) + 3(2 - \lambda) = 3\lambda + 4$$

$5 > \lambda + 3 \rightarrow (1,3)$ не может быть минимумом

$3\lambda + 4 > \lambda + 3 \rightarrow (2,3)$ не может быть минимумом

$4\lambda + 2 < \lambda + 3 \rightarrow \lambda < \frac{1}{3}$ — точка (2,2) паретовская

$4\lambda + 2 > \lambda + 3 \rightarrow \lambda > \frac{1}{3}$ — точка (1,2) паретовская

$\lambda = \frac{1}{3} \rightarrow \Lambda(y) = \frac{5}{3}y_2 \rightarrow$ любая точка вида

$(y_1, 2), 1 \leq y_1 \leq 2,$ — паретовская

Метод сверток. Линейная свертка.

$$f_1(y) = 2y_1 + y_2$$

$$(1,2) \rightarrow (4,3)$$

$$\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 = c \quad (*)$$

$$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$$

$$(1,3) \rightarrow (5,5)$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(f) = f_2 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (6, 2)$$

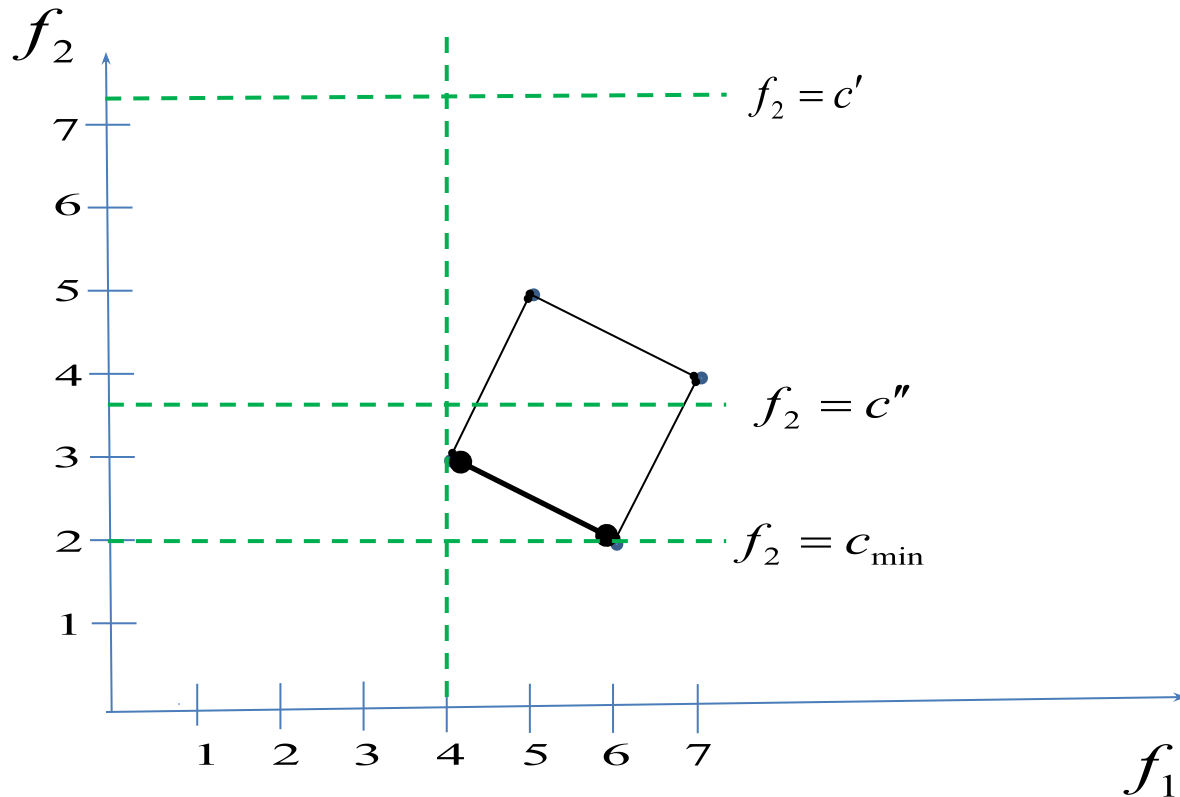
$$1 \leq y_1 \leq 2$$

$$(2,2) \rightarrow (6,2)$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \Lambda(f) = f_1 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (4, 3)$$

$$2 \leq y_2 \leq 3$$

$$(2,3) \rightarrow (7,4)$$



Метод свертков. Линейная свертка.

$$f_1(y) = y_2$$

$$f_2(y) = y_1 - y_2$$

$$y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1y_2 - 4y_1 + 7 \leq 0$$

$$y_2 = f_1$$

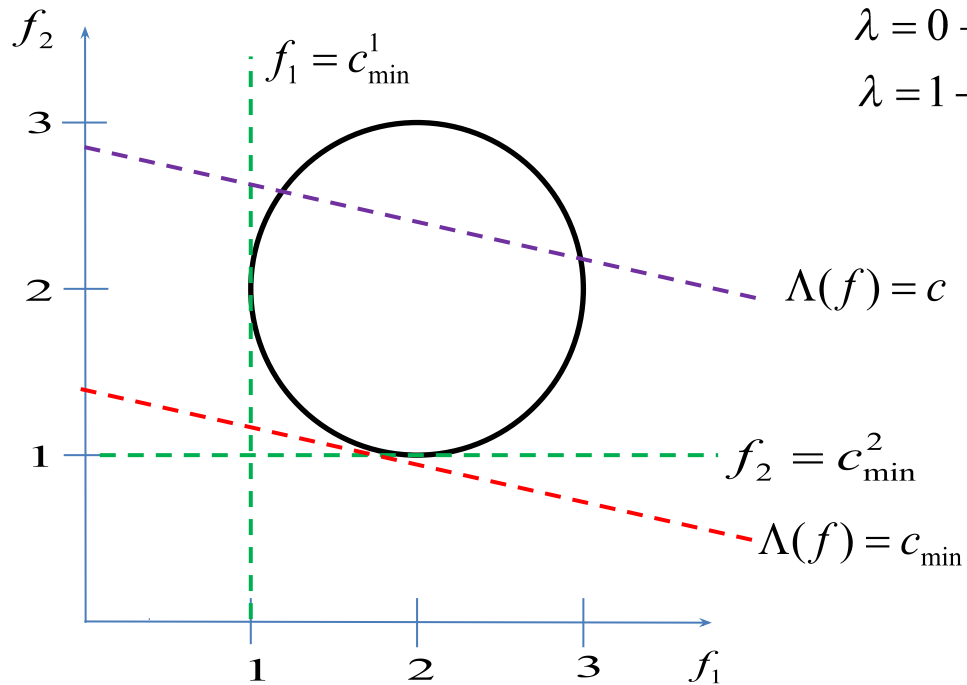
$$y_1 = f_1 + f_2$$

$$(f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 \leq 1$$

$$\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 = c \quad (*)$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(f) = f_2 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (2, 1)$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \Lambda(f) = f_1 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (1, 2)$$



Метод свертков. Линейная свертка.

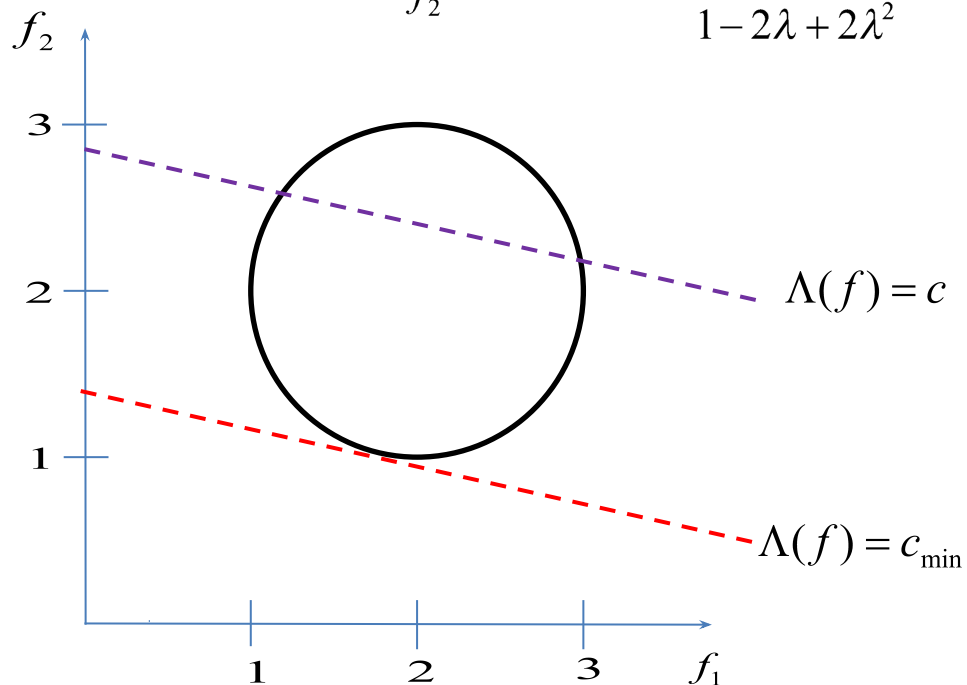
$$(f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 = 1 \quad (1 - 2\lambda + 2\lambda^2)f_2^2 - 2((1 - \lambda)c - 2\lambda + 4\lambda^2)f_2 + c^2 - 4\lambda c + 7\lambda^2 = 0$$

$$\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 = c \quad D = -\lambda^2 c^2 + 4\lambda^2 c + \lambda^2(2\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -\lambda^2(c^2 - 4c - 2\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0$$

$$f_1 = (c - (1 - \lambda)f_2) / \lambda$$

$$c = 2 \pm \sqrt{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}$$

$$f_2 = \frac{(1 - \lambda)(2 - \sqrt{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}) - 2\lambda + 4\lambda^2}{1 - 2\lambda + 2\lambda^2} = 2 - \frac{1 - \lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}}$$



$$0 < \lambda < 1$$

$$f_1(\lambda) = 2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}}$$

$$f_2(\lambda) = 2 - \frac{1 - \lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}}$$

Метод сверток. Свертка Гермейера.

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_k(y))$$

Вектор весов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

Свертка

Гермейера

$$\Gamma_\lambda(y) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_i f_i(y)$$

Пусть $f_i(y) > 0, 1 \leq i \leq k, y \in Q.$

Решение $y^*(\lambda)$ задачи

$$\Gamma_\lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q,$$

является слейтеровским решением
многокритериальной задачи

Геометрическая интерпретация свертки Гермейера.

Свертка Гермейера. Пример.

$$f_1(y) = y_2$$

$$y_2 = f_1$$

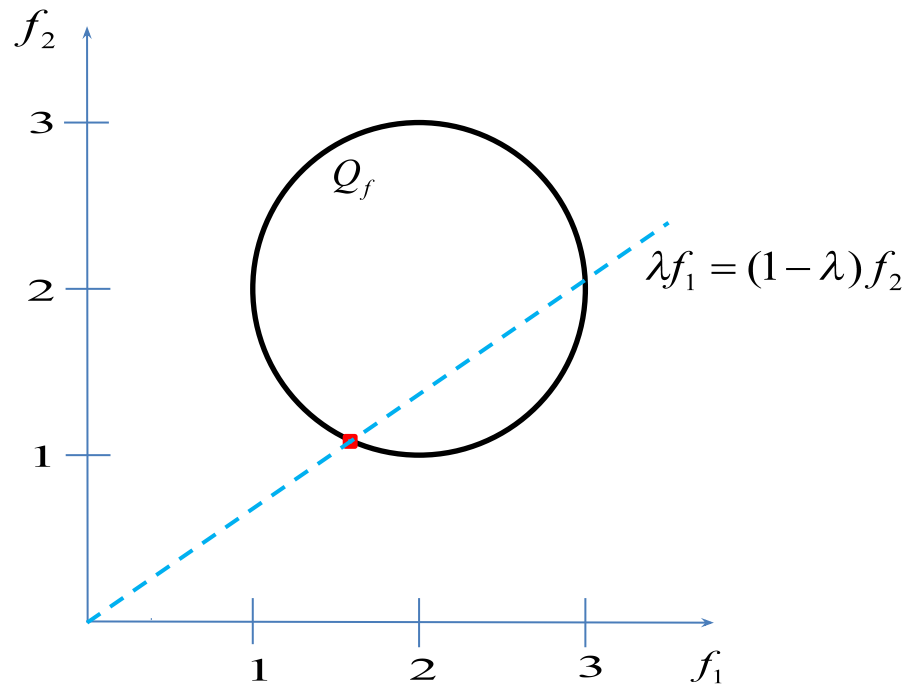
$$\Gamma_\lambda(f) = \min_{f \in Q_f} \max \{ \lambda f_1, (1-\lambda) f_2 \}$$

$$f_2(y) = y_1 - y_2$$

$$y_1 = f_1 + f_2$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \Gamma_\lambda(f) = \min_{f \in Q_f} f_2 \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (2, 1)$$

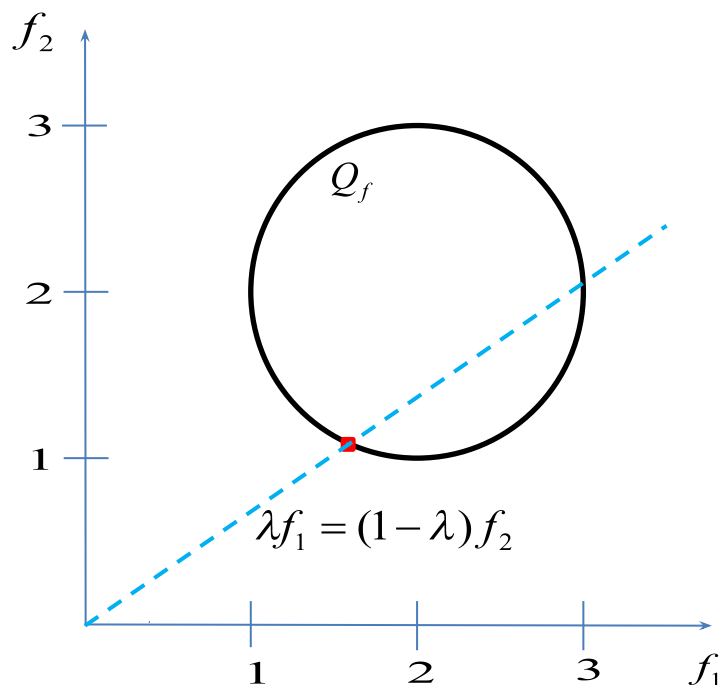
$$y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1y_2 - 4y_1 + 7 \leq 0 \quad (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 \leq 1$$



Свертка Гермейера. Пример.

$$Q_f = \{(f_1, f_2) : (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 \leq 1\}$$

$$\Gamma_\lambda(f) = \min_{f \in Q_f} \max \{\lambda f_1, (1 - \lambda) f_2\}$$



$$1/3 < \lambda < 2/3$$

$$\begin{cases} \lambda f_1 = (1 - \lambda) f_2 \\ (f_1 - 2)^2 + (f_2 - 2)^2 = 1 \end{cases}$$

$$f_1 = ((1 - \lambda) / \lambda) f_2$$

$$(1 - 2\lambda + 2\lambda^2) f_2 - 4\lambda(1 - \lambda) f_2 + 7\lambda^2 = 0$$

$$f_2 = \frac{2\lambda \pm \lambda \sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

$$f_1 = \frac{2(1 - \lambda) \pm (1 - \lambda) \sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

$$f_1^*(\lambda) = \frac{2(1 - \lambda) - (1 - \lambda) \sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

$$f_2^*(\lambda) = \frac{2\lambda - \lambda \sqrt{-14\lambda^2 + 14\lambda - 3}}{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

Метод уступок

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N$$

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_k(y))$$

Упорядочиваем по важности

$$f_1 \gg f_2 \gg \dots \gg f_k$$

$$f_1^* = \min\{f_1(y) : y \in Q\}$$

$$\varepsilon_1 > 0 : f_2^*(\varepsilon_1) = \min\{f_2(y) : y \in Q, f_1(y) \leq f_1^* + \varepsilon_1\}$$

Метод уступок

$$\varepsilon_2 > 0: f_3^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \min \{ f_3(y) : y \in Q, f_1(y) \leq f_1^* + \varepsilon_1, \\ f_2(y) \leq f_2^*(\varepsilon_1) + \varepsilon_2 \}$$

.

$$\varepsilon_{k-1} > 0: f_k^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) = \min \{ f_k(y) : y \in Q, f_1(y) \leq f_1^* + \varepsilon_1, \\ f_2(y) \leq f_2^*(\varepsilon_1) + \varepsilon_2, \\ \dots \dots \dots \\ f_{k-1}(y) \leq f_{k-1}^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-2}) + \varepsilon_{k-1} \}$$

Точка y_k^* - глобальный минимум последней задачи – паретовская.

Многокритериальные задачи. Примеры.

$$f_1(y) = y^2 - 4y + 5$$

$$f_2(y) = y + 1$$

$$1 \leq y \leq 4$$

$$f_1(y) = (y - 2)^2 + 1$$

$$f_2(y) = 2y^2 - 8y + 12$$

$$1 \leq y \leq 3$$

Многокритериальные задачи. Примеры.

$$f_1(y) = 2y_1 + y_2$$

$$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$$

$$1 \leq y_1 \leq 2$$

$$2 \leq y_2 \leq 3$$