Работа по геометрии на тему “Векторы на плоскости”

Выполнила ученица 9 “Б” класса школы гимназии №5
Дарья Айткалиева

Какова разница между векторными и скалярными величинами?

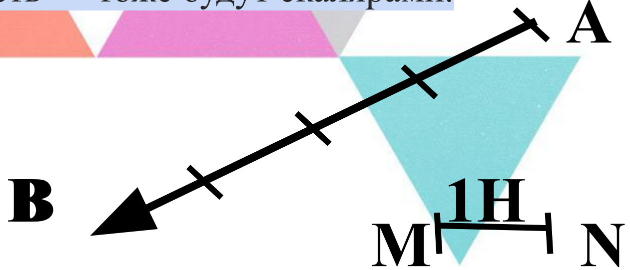
<u>Определение:</u>

Векторной величиной, или вектором (в широком смысле), называется всякая величина, обладающая направлением.

Скалярной величиной, или скаляром, называется величина, не обладающая направлением.

Пример 1. Когда какая-то сила действует на материальную точку, то она будет вектором, так как она обладает направлением. Так же и скорость материальной точки — тоже вектор.

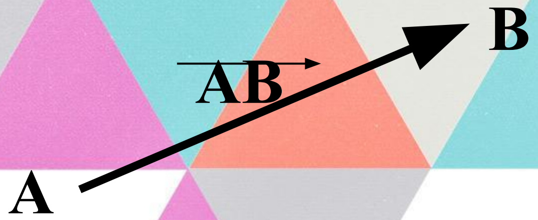
Пример 2. А от уже температура тела будет скаляром, так как с ней не связано никакое направление. Поэтому масса тела и его плотность — тоже будут скалярами.



Что такое вектор и как его обозначают?

Определение:

В [геометрии] вектор — направленный отрезок прямой, то есть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом.



Вектор с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать как $\overrightarrow{AB}$ Векторы также могут обозначаться малыми латинскими буквами со стрелкой (иногда — чёрточкой) над ними, например . Другой распространённый способ записи: выделение символа вектора жирным шрифтом: **a** .

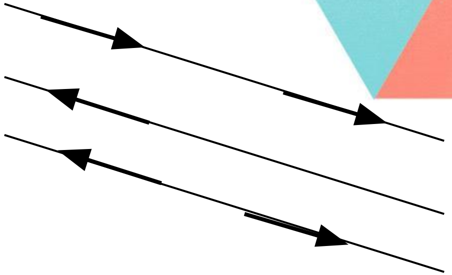
Какие векторы называют коллинеарными? Пример сонаправленых и противоположно направленных векторов.

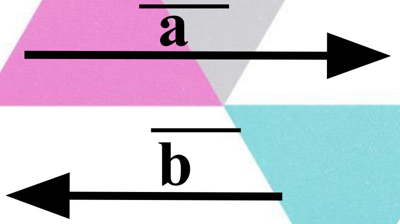
Определение.

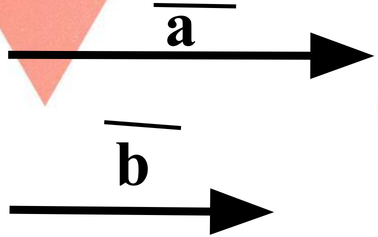
Коллинеарные вектора. *Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами.*

Сонаправленные вектора. *Два коллинеарных вектора a и b называются сонаправленными векторами, если их направления совпадают: a↑↑b*

Противоположно направленные вектора. *Два коллинеарных вектора a и b называются противоположно направленными векторами, если их направления противоположны: a↑↓b*



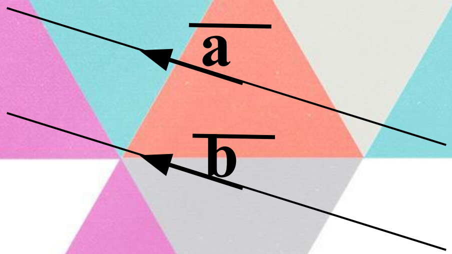




Какие векторы называют равными?

Определение:

Вектора a и b называются равными, если они лежат на одной или параллельных прямых, их направления совпадают, а длины равны



То есть, два вектора равны, если они коллинеарные, сонаправленые и имеют равные длины:

$a = b$, если $a \uparrow\uparrow b$ и $|a| = |b|$.

Что такое модуль вектора?

<u>Определение.</u>

Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется ***длиной вектора*** *или* ***модулем вектора*** *AB.*

Для обозначения длины вектора используются две вертикальные линии слева и справа |AB|.

Длина вектора |a| в прямоугольных декартовых координатах равна квадратному корню из суммы квадратов

Что такое нулевой вектор?

Определение.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.

Нулевой вектор обычно обозначается как 0.

Длина нулевого вектора равна нулю.

Нулевой вектор определяет тождественное движение пространства, при котором каждая точка пространства переходит в себя.

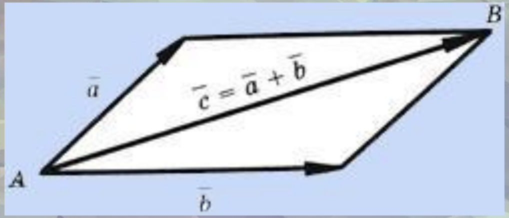
Сложение векторов. Правило параллелограмма.

<u>Сложение векторных величин производится по правилу параллелограмма:</u>

*Сумма двух векторов **a** и **b**, приведенных к общему началу, есть третий вектор **c** , длина которого равна длине параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** , а направлен он от точки A к точке B.*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}.$$

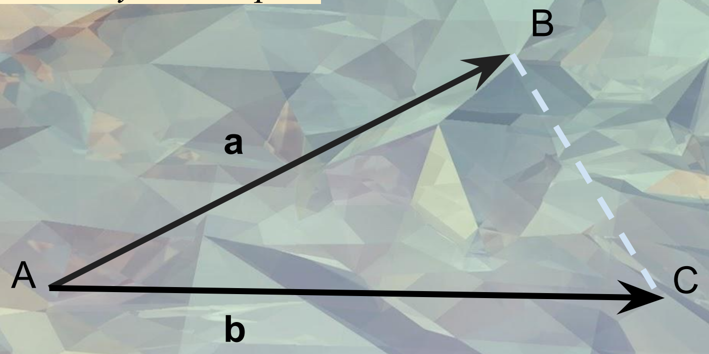
Модуль вектора **c** вычисляется по формуле $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(a, b)}.$



Сложение векторов. Правило треугольника.

Правило треугольника:

Для того чтобы получить сумму двух векторов, нужно из произвольной точки отложить первый вектор, из конца полученного вектора отложить второй вектор, и построить вектор, соединяющий начало первого с концом второго – это и будет сумма двух векторов.



Свойства суммы векторов.

Переместительное свойство:

От перестановки слагаемых сумма не меняется.

В буквенном виде свойство записывается так: **a + b = b + a**

В этом равенстве буквы **a** и **b** могут принимать любые натуральные значения и значение 0.

Сочетательное свойство:

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего числа.

Свойства суммы векторов.

Сочетательное свойство :

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего числа..

В буквенном виде: **(a + b) + c = a + (b + c)**

Так как результат сложения трёх чисел не зависит от того как поставлены скобки, то скобки можно не ставить и писать просто **a + b + c.**

(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c

Переместительное и сочетательное свойство сложения позволяют сформулировать правило преображения сумм.

При сложении нескольких чисел их можно как угодно объединять в группы и переставлять.

Свойства суммы векторов.

Свойство нуля при сложении:

Сумма двух натуральных чисел всегда больше каждого из слагаемых. Но это не так, если хотя бы одно из слагаемых равно нулю.

Если к числу прибавить нуль, получится само число.

a + 0 = 0 + a = a

Разность векторов.

<u>Свойство вычитания суммы из числа:</u>

Чтобы вычесть сумму из числа, можно из него вычесть одно слагаемое и затем из результата вычесть другое слагаемое.

$a - (b + c) = (a - b) - c$ или $a - (b + c) = (a - c) - b$

Скобки в выражении $(a - b) - c$ не имеют значения и их можно опустить.

$(a - b) - c = a - b - c$

Разность векторов.

<u>Свойство вычитания числа из суммы</u>

Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть его из одного слагаемого, а к результату прибавить оставшееся слагаемое.

$(a + b) - c = (a - c) + b$ (если $a > c$ или $a = c$)

или

$(a + b) - c = (b - c) + a$ (если $b > c$ или $b = c$)

Разность векторов.

Свойство нуля при вычитании:

Если из числа вычесть нуль, получится само число.

a − 0 = a

Если из числа вычесть само число, то получится нуль.

a − a = 0

Умножение вектора на число.

Геометрическая интерпретация.

Произведение ненулевого вектора на число - это вектор, коллинеарный данному (сонаправленный данному, если число положительное, имеющий противоположное направление, если число отрицательное), а его модуль равен модулю данного вектора, умноженному на модуль числа.

Алгебраическая интерпретация.

Произведение ненулевого вектора на число - это вектор, координаты которого равны соответствующим координатам данного вектора, умноженным на число.

Умножение вектора на число.

Формула умножения вектора на число для плоских задач

В случае плоской задачи произведение вектора a = {a_x ; a_y} и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$k \cdot a = \{k \cdot a_x; k \cdot a_y\}$

Формула умножения вектора на число для пространственных задач

В случае пространственной задачи произведение вектора a = {a_x ; a_y ; a_z} и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой: $k \cdot a = \{k \cdot a_x ; k \cdot a_y ; k \cdot a_z\}$

Формула умножения n -мерного вектора

В случае n-мерного пространства произведение вектора a = {a_1 ; a_2; ... ; a_n} и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой: $k \cdot a = \{k \cdot a_1; k \cdot a_2; ... ; k \cdot a_n\}$

Умножение вектора на число.

<u>Свойства вектора умноженного на число</u>

Если вектор b равен произведению ненулевого числа k и ненулевого вектора a, то есть $b = k \cdot a$, тогда:

b || a - вектора b и a параллельны

a↑↑b, если k > 0 - вектора b и a сонаправленные, если число k > 0

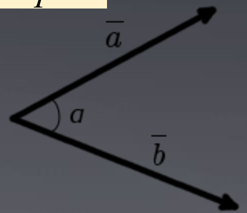
a↑↓b, если k < 0 - вектора b и a противоположно направленные, если число k < 0

|b| = |k| · |a| - модуль вектора b равен модулю вектора a умноженному на модуль числа k

Угол между векторами.

<u>Определение.</u>

Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.



Основное соотношение. Косинус угла между векторами равен [скалярному произведению векторов](), поделенному на произведение [модулей векторов]().

<u>Формула вычисления угла между векторами</u>

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$$

Скалярное произведение двух векторов.

Формулы скалярного произведения векторов заданных координатами:

Формула скалярного произведения векторов для плоских задач

В случае плоской задачи скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \{\mathbf{a_x} ; \mathbf{a_y}\}$ **и** $\mathbf{b} = \{\mathbf{b_x} ; \mathbf{b_y}\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой: $\mathbf{a \cdot b = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}$

Формула скалярного произведения векторов для пространственных задач

В случае пространственной задачи скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \{\mathbf{a_x} ; \mathbf{a_y} ; \mathbf{a_z}\}$ **и** $\mathbf{b} = \{\mathbf{b_x} ; \mathbf{b_y} ; \mathbf{b_z}\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой: $\mathbf{a \cdot b = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}$

Формула скалярного произведения n -мерных векторов

В случае n-мерного пространства скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \{\mathbf{a_1} ; \mathbf{a_2} ; ... ; \mathbf{a_n}\}$ **и** $\mathbf{b} = \{\mathbf{b_1} ; \mathbf{b_2} ; ... ; \mathbf{b_n}\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой: $\mathbf{a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n}$

Свойства скалярного произведения векторов..

Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нуля:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$

Скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор равен нулевому вектору:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = 0$

Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

Операция скалярного умножения коммуникативна: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:

$\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

$(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Операция скалярного умножения дистрибутивна: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Координаты векторов.

Основное соотношение:

Основное соотношение .Чтобы найти координаты вектора AB, зная координаты его начальной точек A и конечной точки B, необходимо из координат конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки.

Формулы определения координат вектора

Формула определения координат вектора для плоских задач

В случае плоской задачи вектор AB заданный координатами точек $A(A_x ; A_y)$ и $B(B_x ; B_y)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\mathbf{AB = \{B_x - A_x ; B_y - A_y\}}$$

Формула определения координат вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи вектор AB заданный координатами точек $A(A_x ; A_y ; A_z)$ и $B(B_x ; B_y ; B_z)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\mathbf{AB = \{B_x - A_x ; B_y - A_y ; B_z - A_z\}}$$

Формула определения координат вектора для n -мерного пространства

В случае n-мерного пространства вектор AB заданный координатами точек $A(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ и $B(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\mathbf{AB = \{B_1 - A_1 ; B_2 - A_2 ; ... ; B_n - A_n\}}$$

Уравнения прямой на плоскости.

Прямая (прямая линия) - *это бесконечная линия, по которой проходит кратчайший путь между любыми двумя её точками.*

Уравнение прямой на плоскости

Любую прямую на плоскости можно задать **уравнением прямой** первой степени вида

$$A x+B y+C= 0$$

где A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнения прямой на плоскости

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Общее уравнение прямой при $B \neq 0$ можно привести к виду **$y=k\,x+b$** где **k** - угловой коэффициент равный

тангенсу угла, образованного данной прямой и положительным направлением оси OX .

Уравнение прямой в отрезках на осях

Если прямая пересекает оси OX и OY в точках с координатами (a, 0) и (0,b), то она может быть найдена используя формулу **уравнения прямой в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Уравнения прямой на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки на плоскости

Если прямая проходит через две точки ***A(**x_1**,**y_1**) и B(**x_2**,**y_2**)***, *такие что* $x_1 \neq x_2$ **и** $y_1 \neq y_2$ *то уравнение прямой можно найти, используя следующую формулу*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Параметрическое уравнение прямой на плоскости

Параметрические уравнения прямой могут быть записаны следующим образом

$$\begin{cases} x = l\,t + x_0 \\ y = m\,t + y_0 \end{cases}$$

где (x_0, y_0) - координаты точки лежащей на прямой, $\{l, m\}$- координаты направляющего вектора прямой.

Уравнения прямой на плоскости

Каноническое уравнение прямой на плоскости

Если известны координаты точки $A(x_0,y_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $n=\{l;m\}$, то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Расстояние между двумя точками

Определение.

Расстояние между двумя точками — это длина отрезка, что соединяет эти точки.

Формулы вычисления расстояния между двумя точками:

Формула вычисления расстояния между двумя точками $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$ на плоскости:

$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Формула вычисления расстояния между двумя точками $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ в пространстве:

$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$

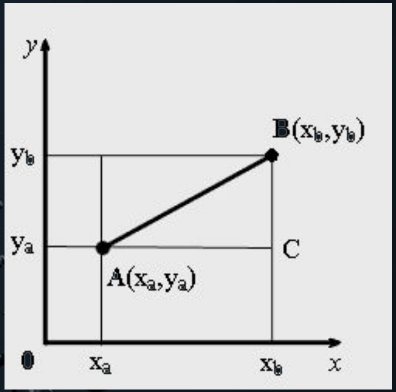
Расстояние между двумя точками

Вывод формулы для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости

Из точек A и B опустим перпендикуляры на оси координат.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔABC. Катеты этого треугольника равны:

$AC = x_b - x_a$;
$BC = y_b - y_a$.



Воспользовавшись теоремой Пифагора, вычислим длину отрезка AB:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$.

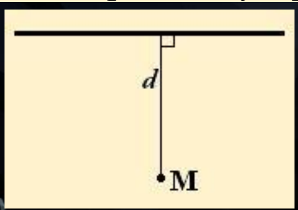
Подставив в это выражение длины отрезков AC и BC, выраженные через координаты точек A и B, получим формулу для вычисления расстояния между точками на плоскости.

Формула для вычисления расстояния между двумя точками в пространстве выводится аналогично

Расстояние от точки до прямой на плоскости.

<u>Определение.</u>

Расстояние от точки до прямой — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.



Формула для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости

Если задано уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, то расстояние от точки $M(M_x, M_y)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Спасибо за внимание!