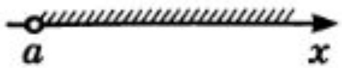
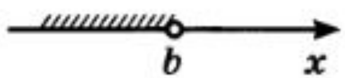
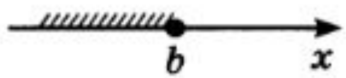
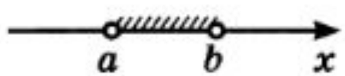
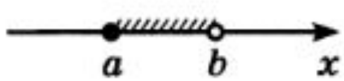
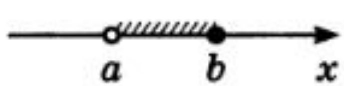
Подготовка к экзаменационной работе

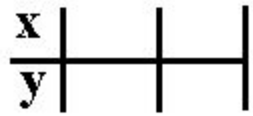
9 класс

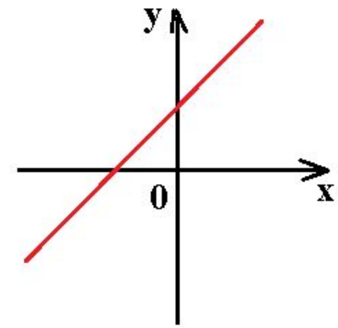
Алгебра

Сводная таблица числовых промежутков

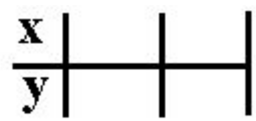
Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель
	$(a; +\infty)$	открытый луч	$x > a$
	$[a; +\infty)$	луч	$x \geqslant a$
	$(-\infty; b)$	открытый луч	$x < b$
	$(-\infty; b]$	луч	$x \leqslant b$
	$(a; b)$	интервал	$a < x < b$
	$[a; b]$	отрезок	$a \leqslant x \leqslant b$
	$[a; b)$	полуинтервал	$a \leqslant x < b$
	$(a; b]$	полуинтервал	$a < x \leqslant b$

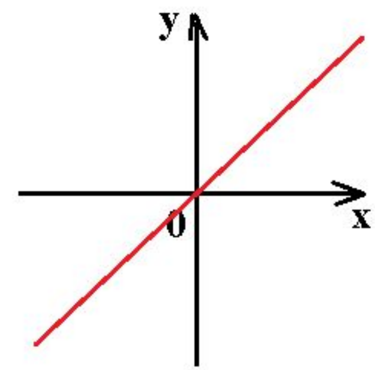
Линейная функция   y=kx+b
Построение с помощью таблицы





Линейная функция   y=kx
Построение с помощью таблицы





Линейная функция   y=b

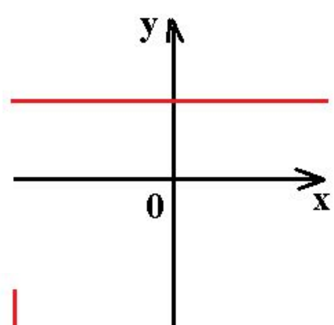
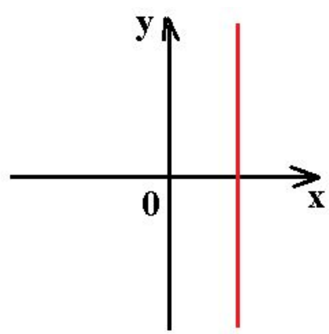
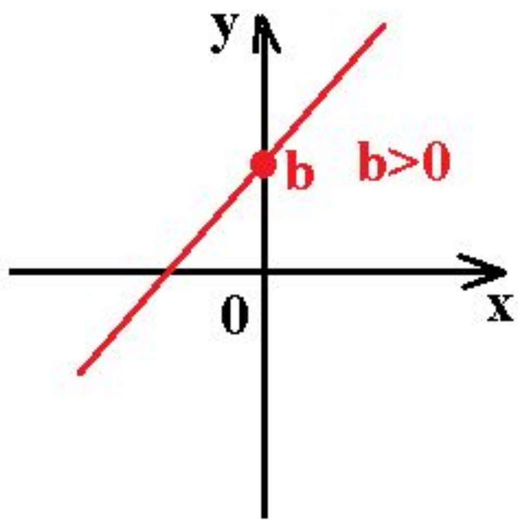


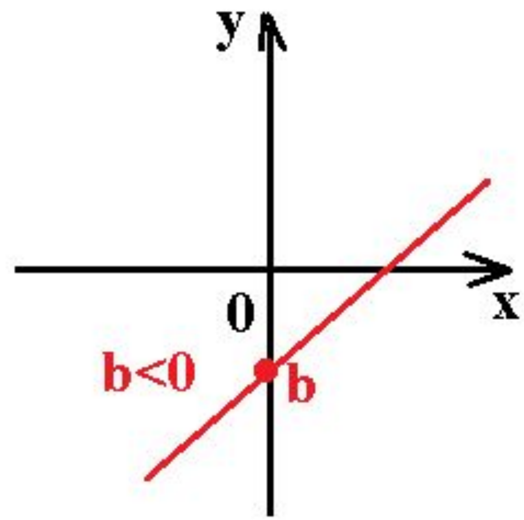
График уравнения x=a




y
функция
возрастает
k>0
0
x


y
k<0
0
x
функция
убывает

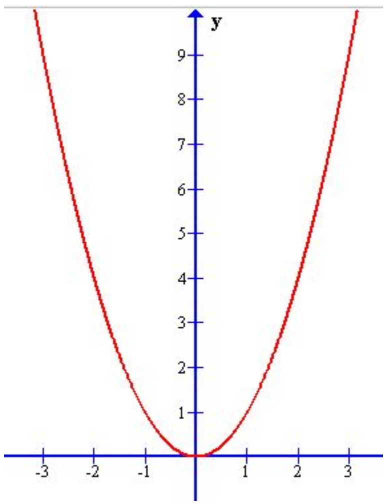

y
b
b>0
0
x


y
0
x
b<0
b

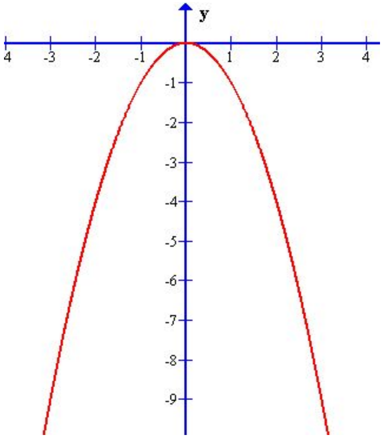
Линейные функции	Алгебраическое условие	Геометрический вывод
$y = k_1x + m_1$ $y = k_2x + m_2$	1) $k_1 = k_2,\ m_1 \neq m_2$ 2) $k_1 = k_2,\ m_1 = m_2$ 3) $k_1 \neq k_2$	1) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ параллельны 2) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ совпадают 3) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ пересекаются

Квадратичная функция
$y=ax^2+bx+c$

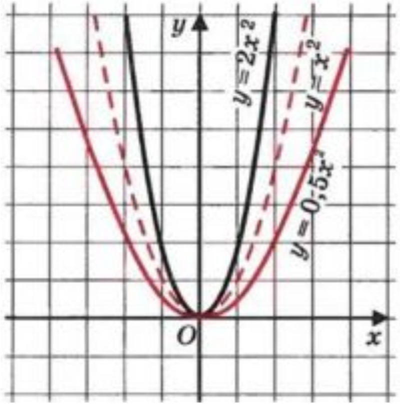
$y=x^2$



$y= - x^2$



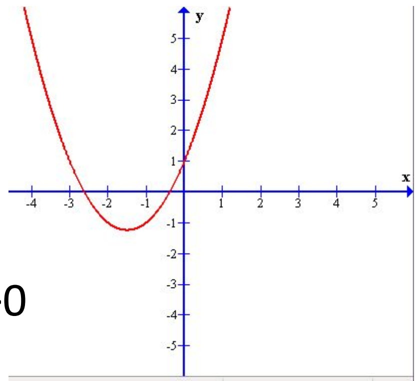
$y=ax^2$



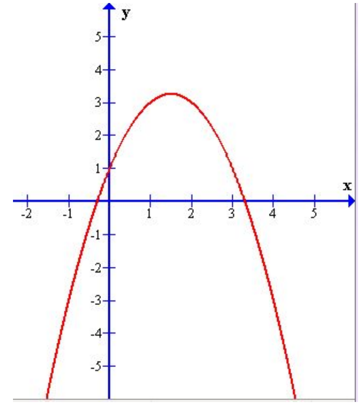
План построения графика функции $y=ax^2+bx+c$

1. Направление ветвей параболы ($a>0$ ветви вверх, $a<0$ ветви вниз)
2. Вершина параболы $x_0 = \frac{-b}{2a}$
3. Ось симметрии параболы $x=x_0$
4. Дополнительные точки

x		
y		

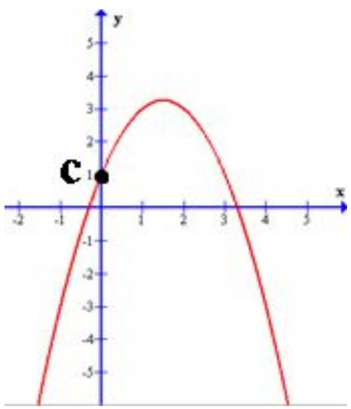


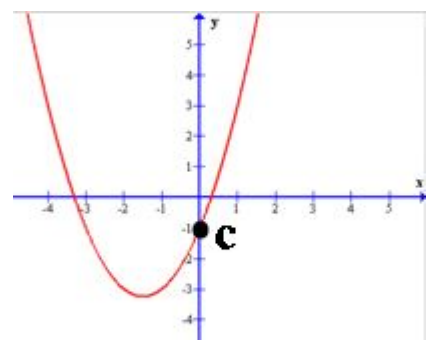
a>0



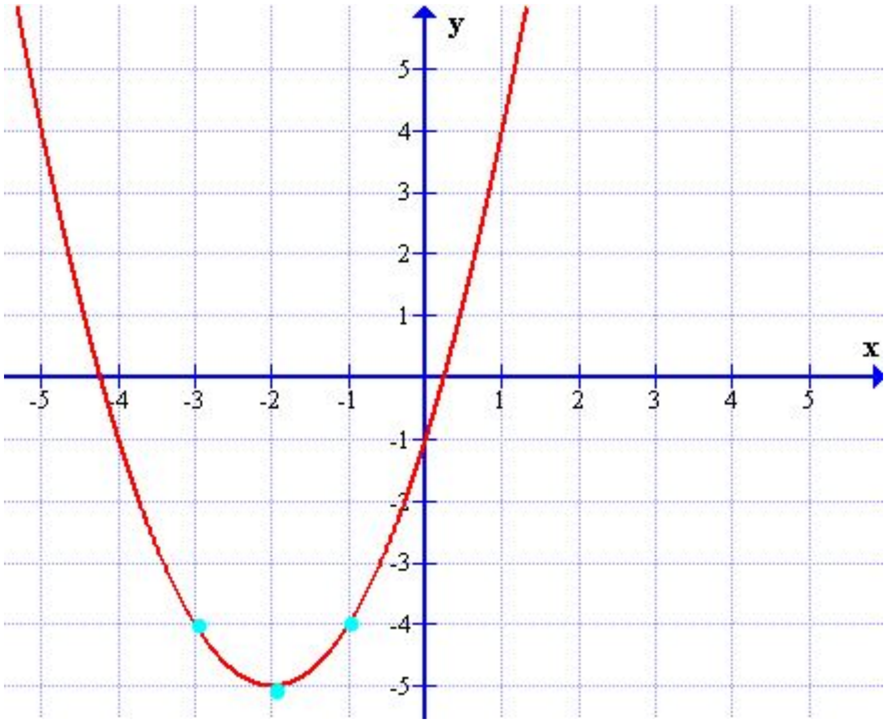
a<0

C >0

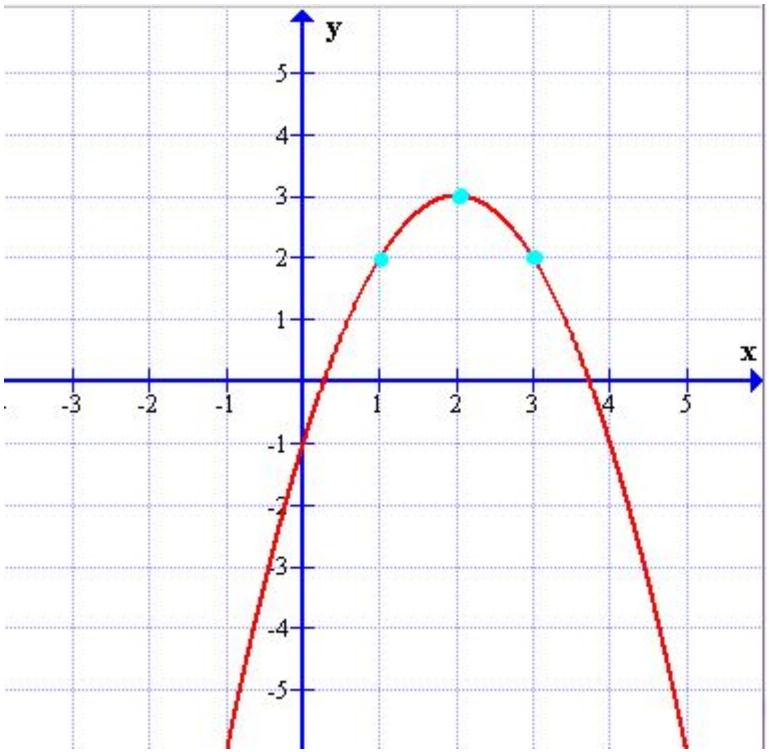




c<0

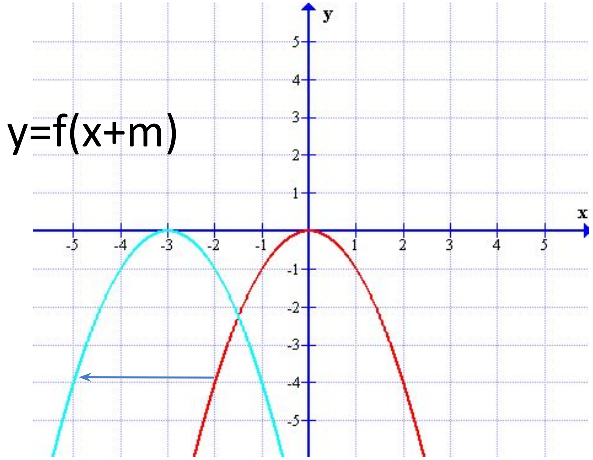


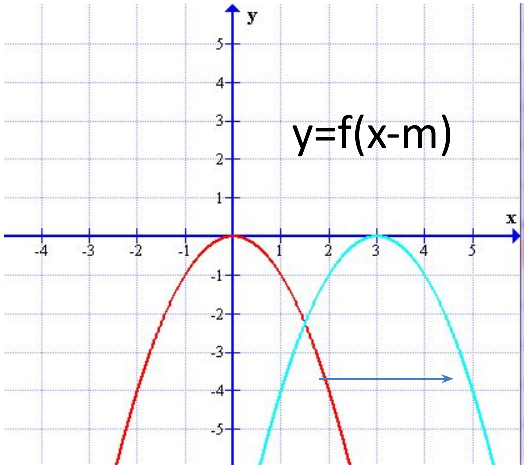
a=1

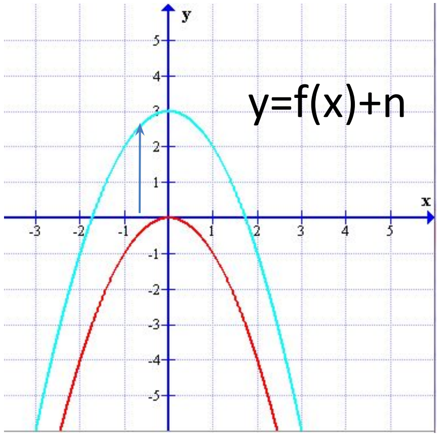


a= -1

Построение графика функции с помощью сдвигов:







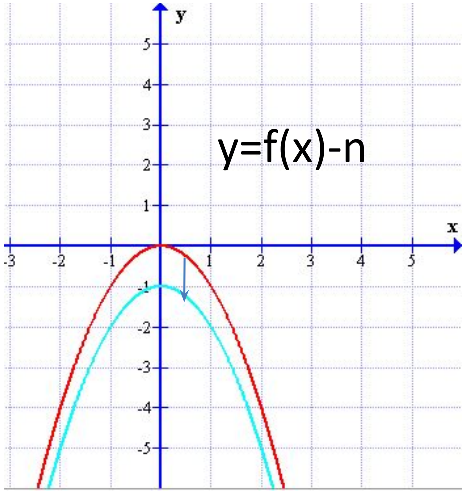


График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 57).

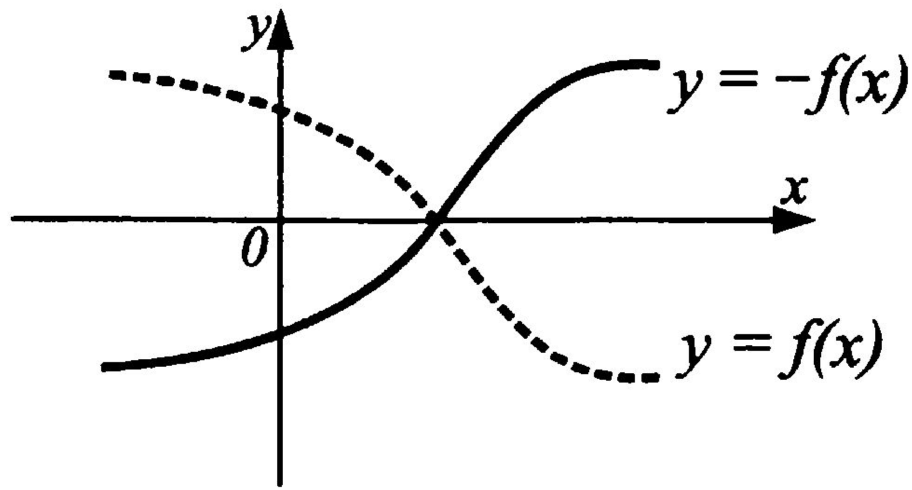


График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 58).

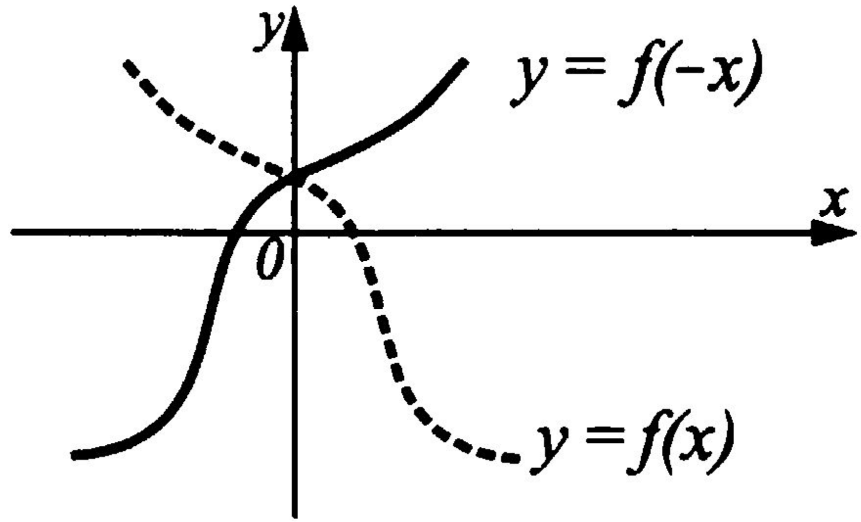


График функции $y = |f(x)|$ получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 65) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox (см. рис. 66, *а*).

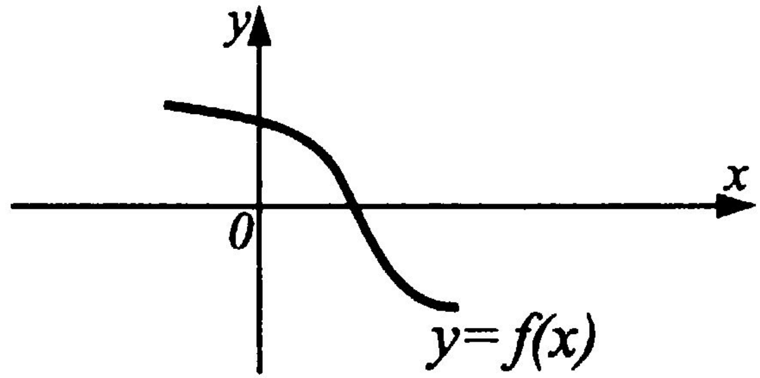


Рис. 65.

График функции $y = f(|x|)$ получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 65) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy (см. рис. 66, *б*).

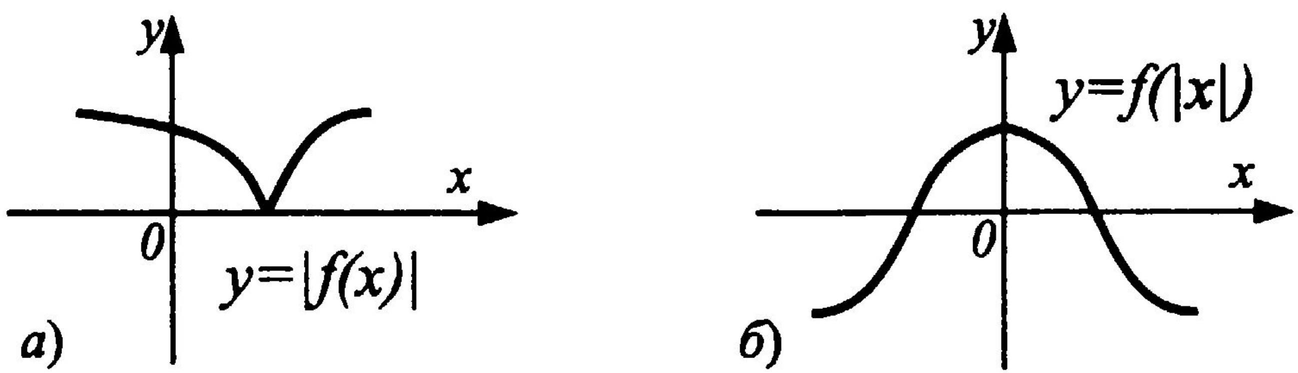


Рис. 66.

Для любых a, b верны следующие равенства:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

Способы разложения на множители:

1. Вынесение общего множителя
2. Формулы сокращенного умножения
3. Способ группировки
4. **Разложение квадратного трёхчлена на множители.**

Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ (x_1 — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

При любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.}$

Свойства арифметического квадратного корня

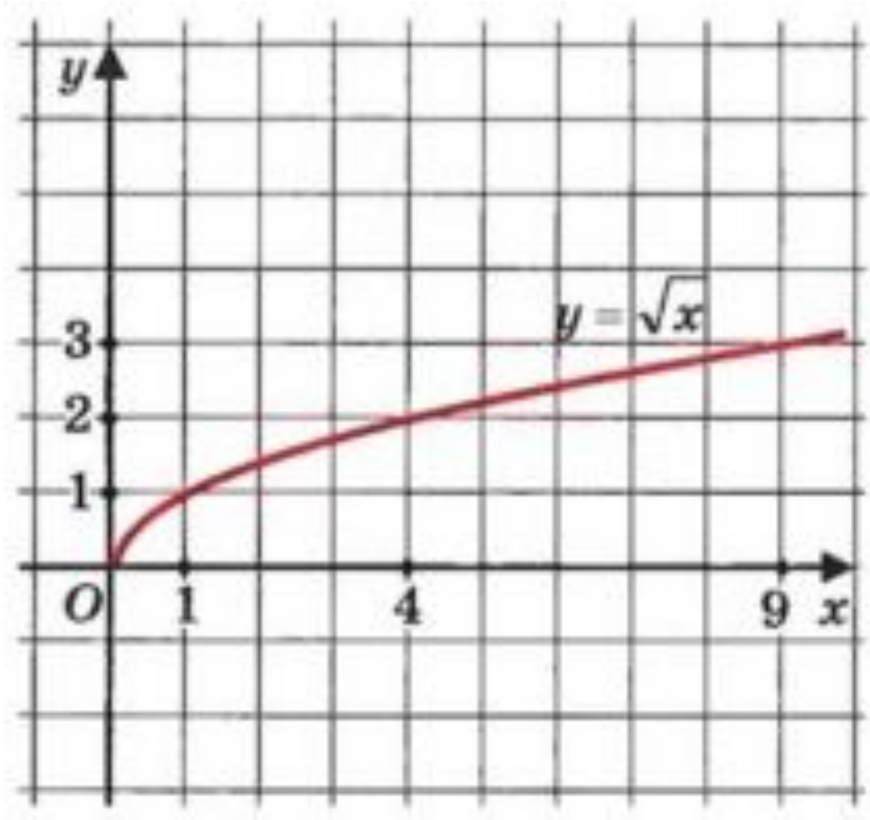
1) Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей, то есть если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.}$

2) Квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя, то есть если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$

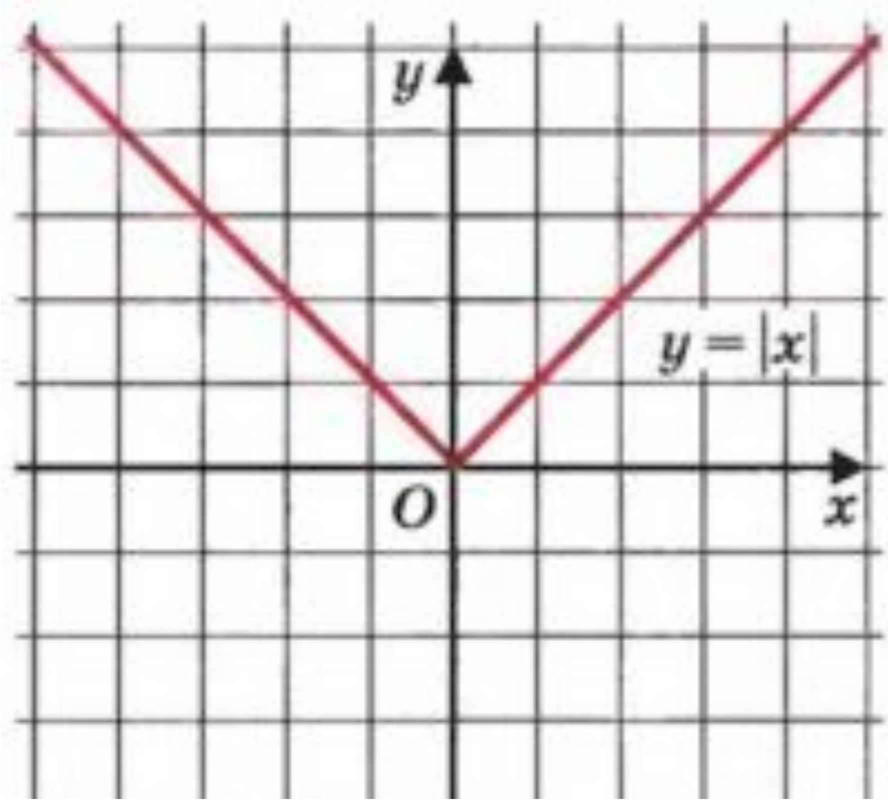
3) При любом значении a и натуральном k верно равенство $\boxed{\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.}$

4) Если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Арифметический квадратный корень из неотрицательного числа

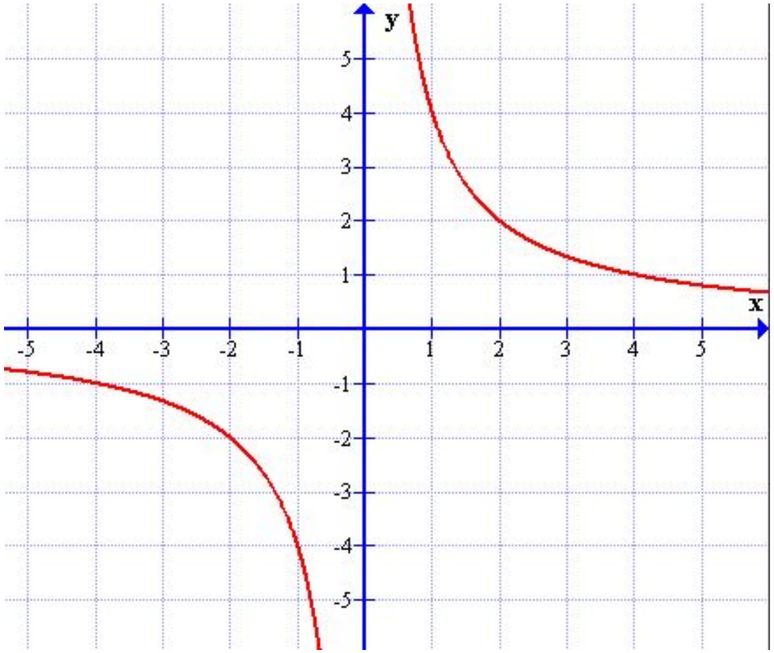


Функция y=$|x|$

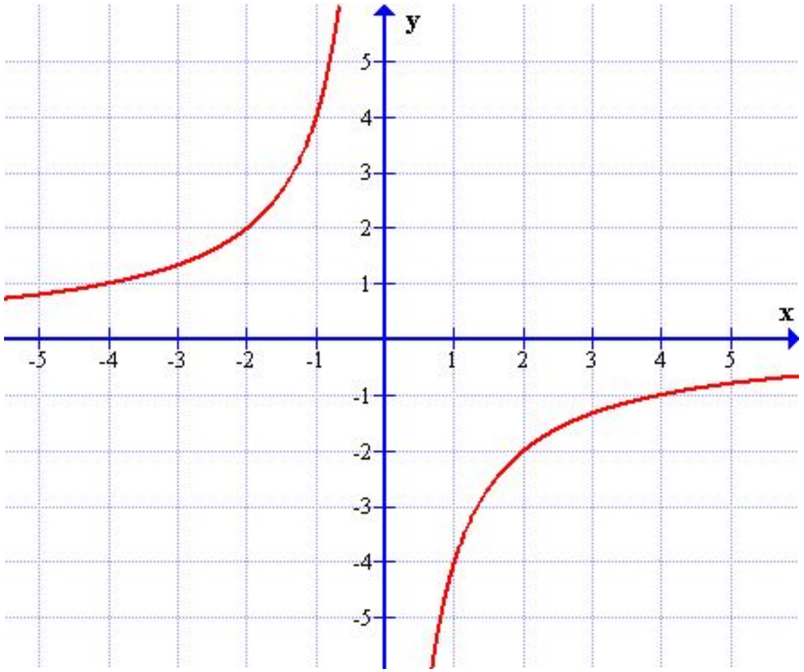


Функция $y=\dfrac{k}{x}$

K>0



K<0



Квадратные уравнения $ax^2+bx+c=0$

Неполные квадратные уравнения

$ax^2 - c = 0$

$ax^2 = c$

$x^2 = c/a$

$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$

$ax^2 + bx = 0$

$x(ax+b) = 0$

$x = 0$ $ax + b = 0$

$ax = -b$

$x = -b/a$

Полные квадратные уравнения

$D = b^2 - 4ac$

D>0

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

D=0

$$x = \frac{-b}{2a}$$

D<0

Действительных корней нет

Теорема Виета для приведенных квадратных уравнений $x^2+bx+c=0$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \bullet x_2 = c$$

Стандартным видом положительного числа a называют его представление в виде $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа** a, число a_0 — **мантиссой**.

Свойства числовых неравенств:

если $a > b$, $b > c$, то $a > c$;

если $a > b$, то $a + c > b + c$;

если $a > b$, $m > 0$, то $am > bm$;

если $a > b$, $m < 0$, то $am < bm$;

если $a > b$, то $-a < -b$;

если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$;

если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$;

если $a > b \geqslant 0$, $n \in N$, то $a^n > b^n$;

если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Взаимно обратными называют числа, произведение которых равно 1 $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1\right.$, где $\left.a \neq 0,\ b \neq 0\right)$.

Отношение $\frac{b}{a}$ называют обратным отношению $\frac{a}{b}$.

Пропорция — это равенство двух отношений.

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (или $a : b = c : d$) числа a и d называют **крайними**, а числа b и c — **средними** членами пропорции.

Основное свойство пропорции. В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению её средних членов.

$$a = \frac{b \bullet c}{d} \qquad b = \frac{a \bullet d}{c} \qquad c = \frac{a \bullet d}{b} \qquad d = \frac{b \bullet c}{a}$$

Если в верной пропорции поменять местами средние или крайние члены, то получившиеся новые пропорции верны.

Чтобы найти проценты от числа, надо проценты перевести в дробь и умножить ее на данное число.

Найти 20% от 300.

Решение: 20%=0,2 $300 \cdot 0,2=60$

Чтобы найти число по его процентам, надо проценты перевести в дробь и разделить данное число на дробь.

Найти число, если 20% от него составляют 300.

Решение: 20%=0,2   300:0,2=1500

Чтобы найти сколько процентов первое число составляет от второго числа, надо первое число разделить на второе и полученную дробь перевести в проценты.

Найти сколько процентов 300 составляет от 1500.

Решение: 300:1500=0,2   0,2=20%

Свойства степени с целым показателем.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

$a^n : a^k = a^{n-k}$, если $a \neq 0$.

$\left(a^n\right)^k = a^{nk}$.

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$.

По определению полагают, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$.

Если $a \neq 0$, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, где n — натуральное число.

Справедливо равенство $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, b \neq 0, c \neq 0.$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Решением неравенства $|x| < b$ являются значения x, удовлетворяющие неравенству $-b < x < b$.

Решением неравенства $|x| > b$ являются значения x, удовлетворяющие неравенствам $x < -b$, $x > b$.

Решение квадратного неравенства:

Решить неравенство $x^2 + x - 6 < 0$

Решение. $x^2 + x - 6 < 0$. Решим неравенство методом интервалов

$x^2 + x - 6 = 0$

D=25 $x = -3,\ x = 2.$

Ответ: $(-3; 2)$.

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют **разностью арифметической прогрессии** и обычно обозначают буквой **d**.

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$d = a_{n+1} - a_n, \qquad a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обычно обозначают буквой **q**.

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$