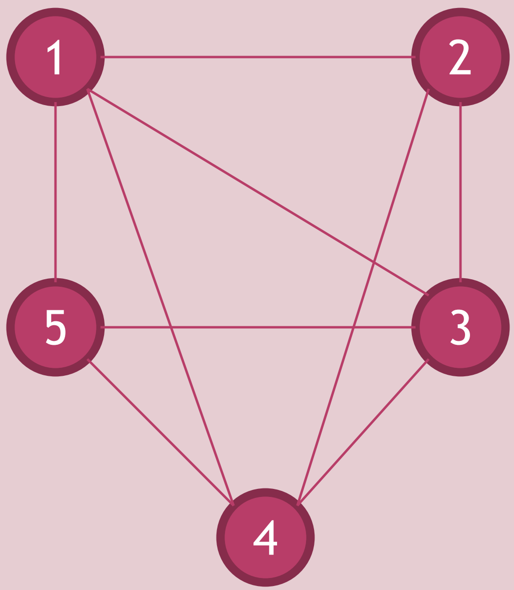
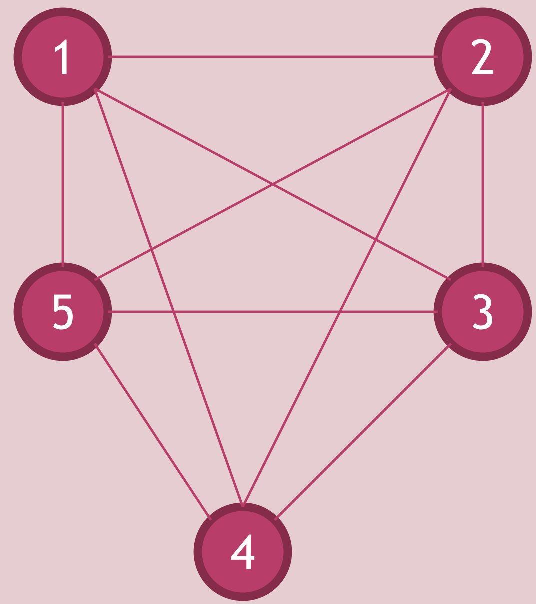
ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

Лекция 6

Определение планарного графа

- Граф, изображенный на плоскости или на шаре, называется ***плоским или планарным*** *графом*, если его ребра (дуги) не пересекаются в точках, отличных от вершин графа.

ПРИМЕРЫ

Планарный граф	Непланарный граф
	

ЧТО ТАКОЕ «ГРАНЬ»

Гранью (страной) в плоском представлении графа называется **часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.**

ПРИМЕР

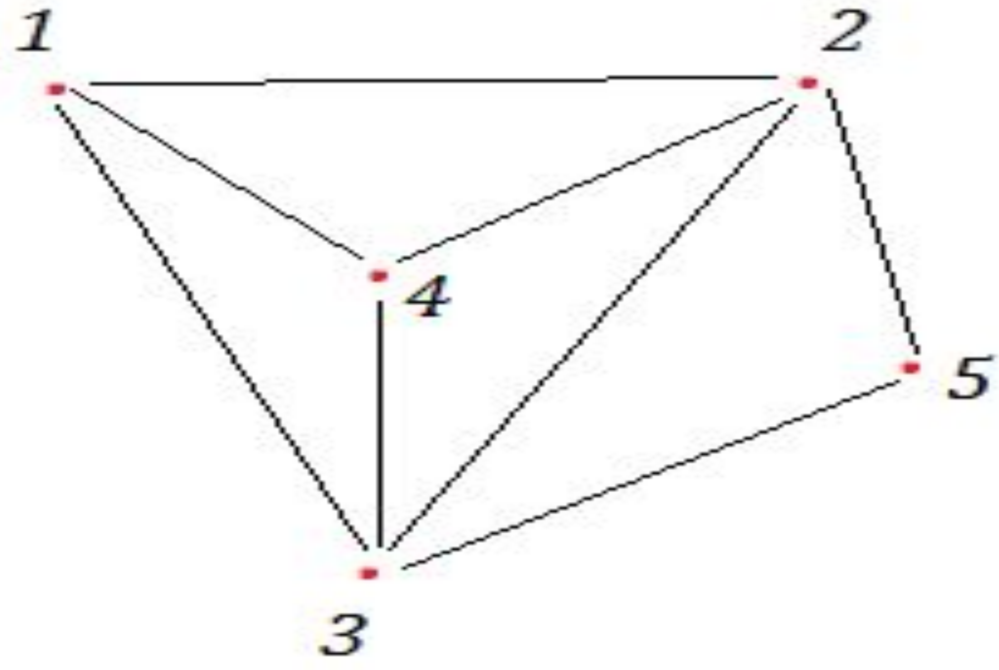


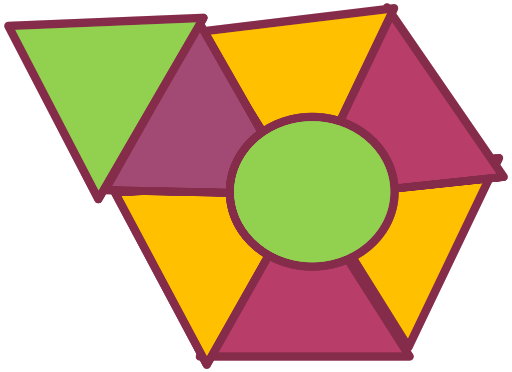
Рис. 2. Плоский граф с 5 гранями: 1-2-4-1, 1-3-4-1, 2-4-3-1, 2-3-5-2 и часть плоскости "вне" фигуры графа

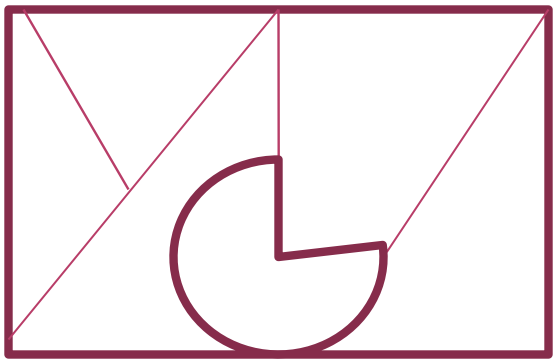
ЭКСКУРС В ИСТОРИЮ

- Интерес к планарным графам возник в эпоху великих географических открытий: высоко ценились точные и четкие карты, но чем больше красок использовались на карте, тем она дороже. Отсюда задача: **сколько красок нужно, чтобы все страны на ней, имеющие общую границу, были окрашены в разный цвет, а число этих красок было минимально?**

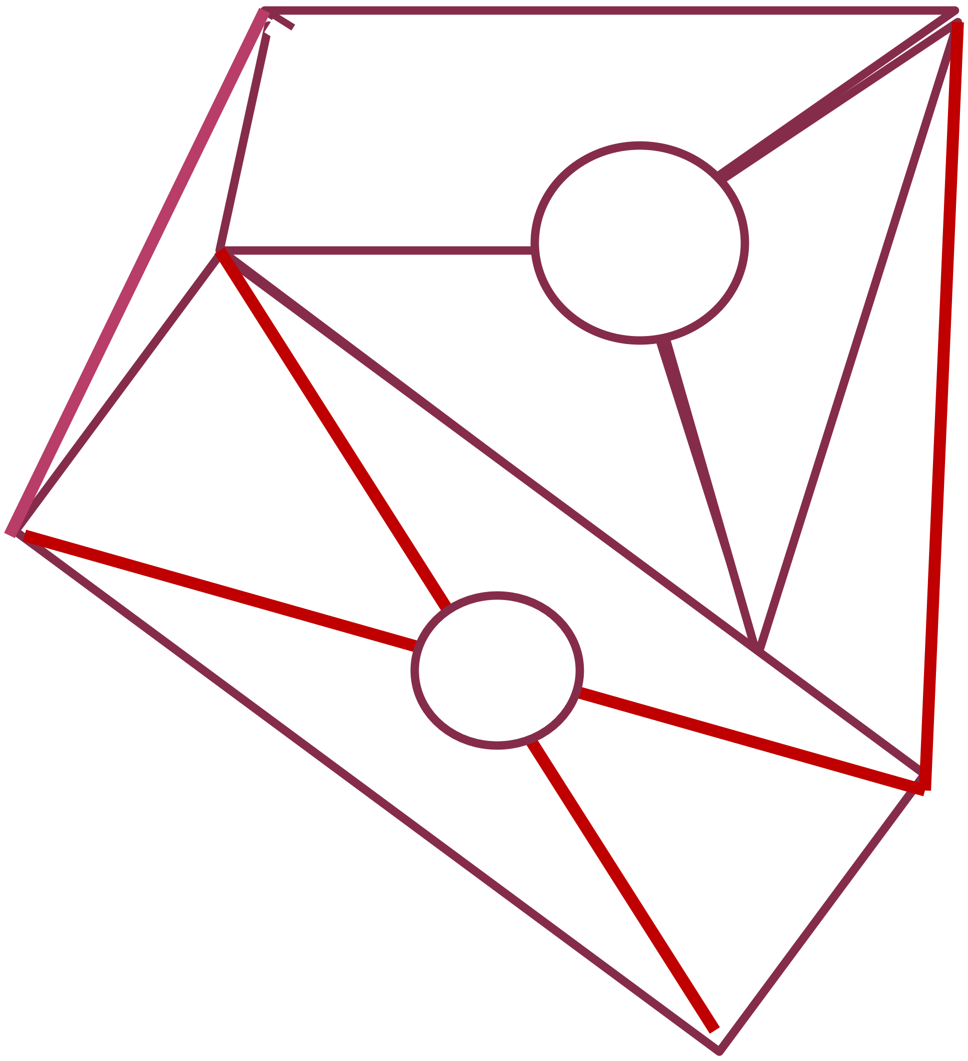
ТЕОРЕМА О 4-Х КРАСКАХ

- Любую плоскую карту или карту на сфере можно раскрасить 4-я красками так, что страны, имеющие общую границу, будут разного цвета.
- Раскрасить минимальным
- числом красок



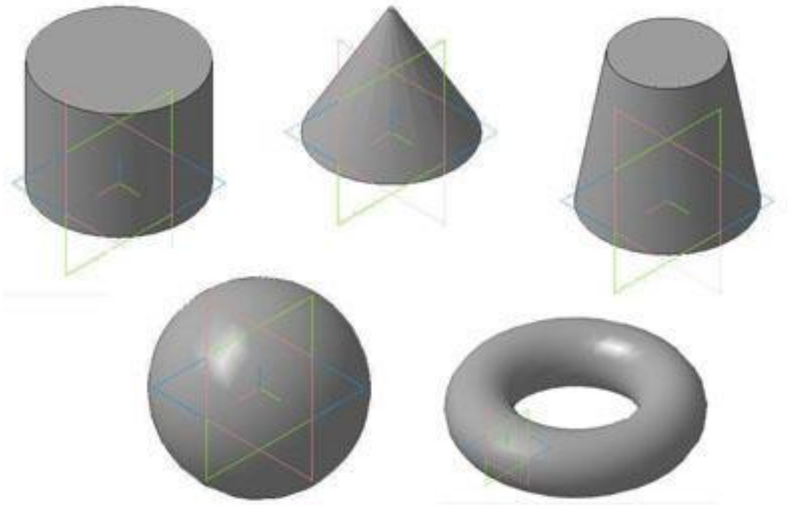


САМОСТОЯТЕЛЬНО РАСКРАСИТЬ МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ КРАСОК



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Для каких из этих тел справедлива теорема о четырех красках?

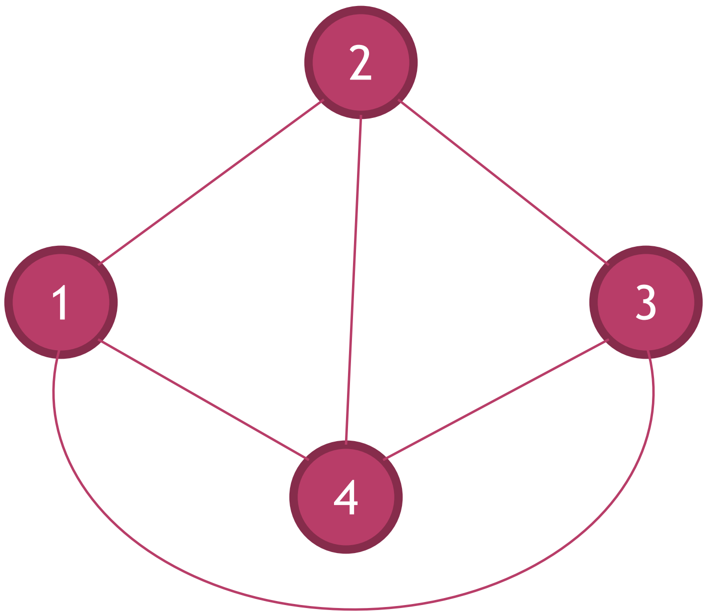


ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

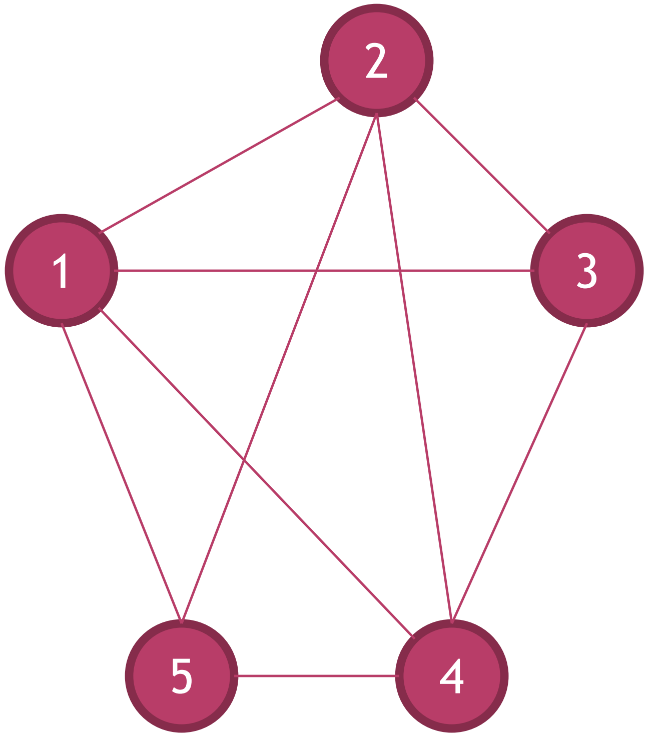
- Пусть *В* - количество вершин в графе, *Г* - количество граней в плоском представлении графа, *Р* - количество рёбер в графе. Тогда получаем *формулу Эйлера* для связного планарного графа:
- ***В + Г - Р = 2***

ПРИМЕРЫ

G1(X,U)



G2(X,U)



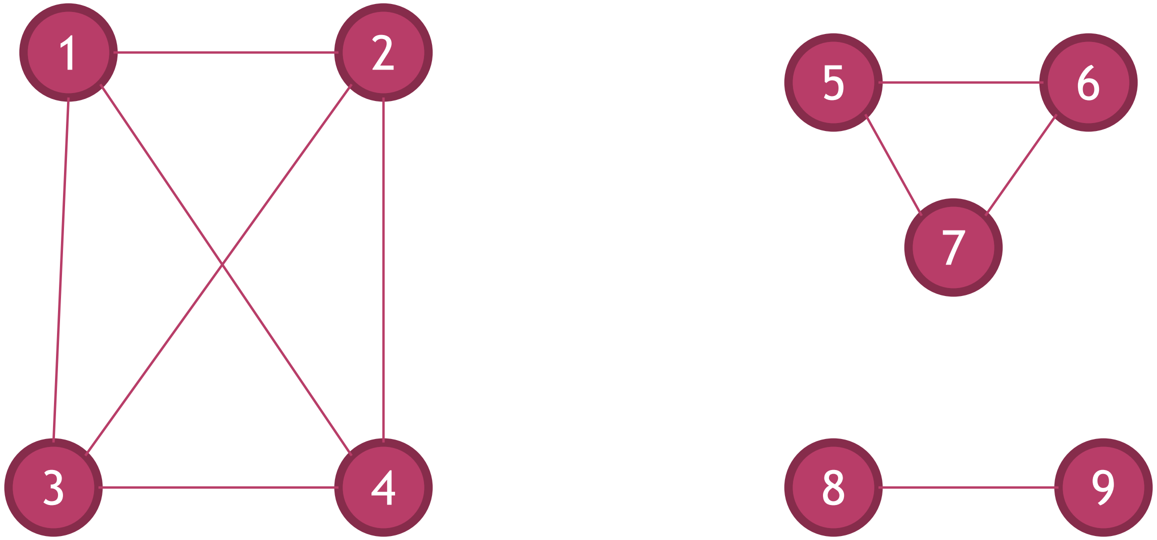
ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ НЕСВЯЗНОГО ГРАФА

Для несвязного планарного графа с *K* компонентами связности формула Эйлера имеет вид:

$$\boldsymbol{В + Г - Р = К + 1.}$$

ПРИМЕР

Несвязный планарный граф с К = 3 компонентами:



В + Г - Р = К + 1

ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО - ПОНТРЯГИНА

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов типов, приведённых ниже:

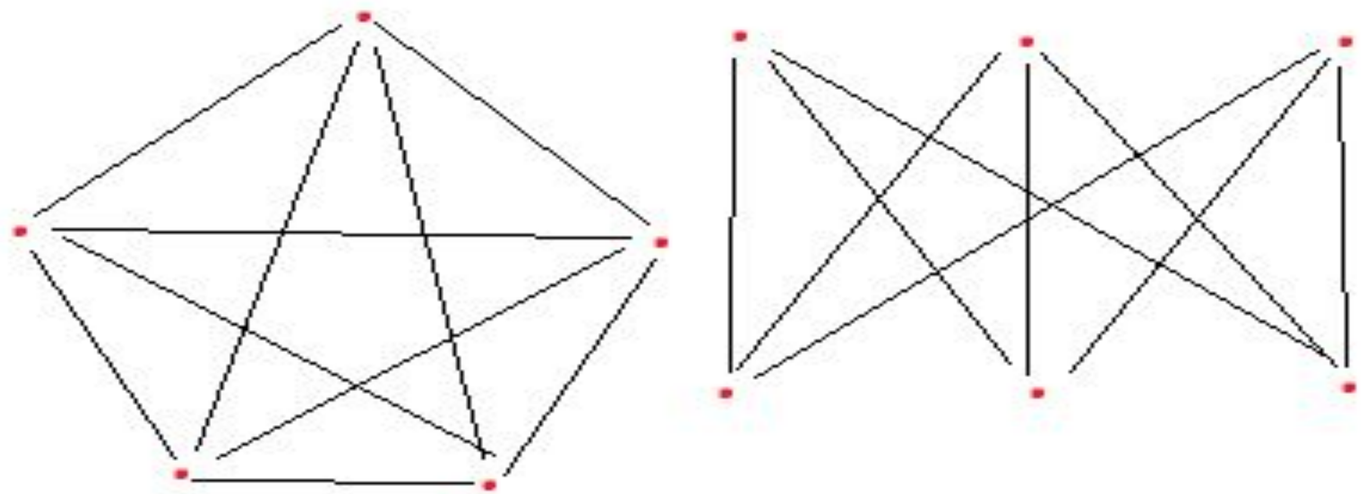
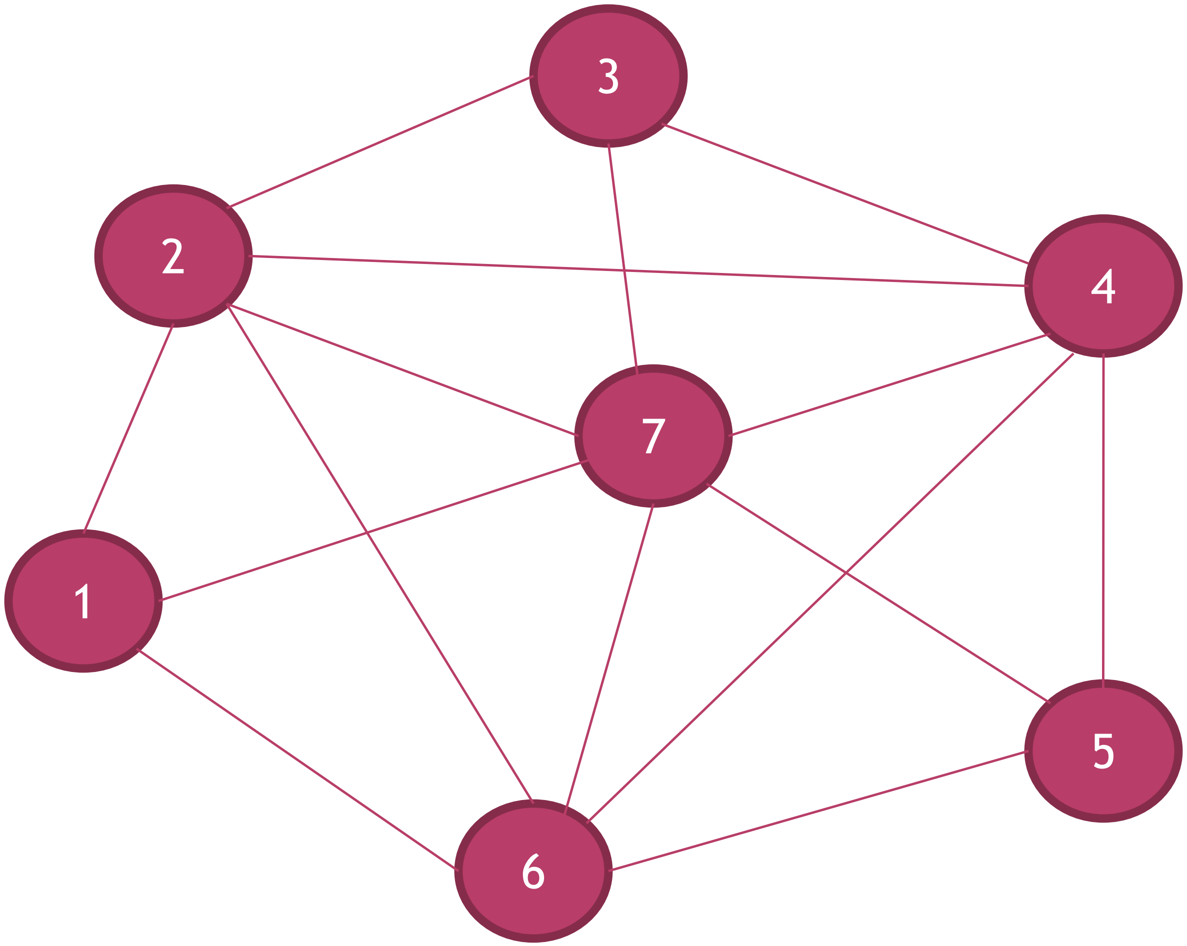


Рис. 6. Такие подграфы - признак непланарности графа

САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРОВЕРИТЬ ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФА



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Проверить планарность графов, приведенных ниже в персональных заданиях.

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 1- 6

0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	0	0

№ 1

0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0

№ 2

0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0

№ 3

0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0

№ 4

0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0

№ 5

0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
0	0	0	0	1
1	0	1	1	0

№ 6

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 7 - 12

0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0

№ 7

0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

№ 8

0	0	1	1	1
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0

№ 9

0	1	1	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	1	0

№ 10

0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

№ 11

0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0

№ 12

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 13 - 18

0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

№ 13

0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

№ 14

0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	0	1	1	0

№ 15

0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	1	0

№ 16

0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0

№ 17

0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0

№ 18

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 19 - 24

0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	0	0

№ 19

0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0

№ 20

0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0

№ 21

0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

№ 22

0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

№ 23

0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

№ 24