

# ТЕОРИЯ ГРАФОВ

**Тезаурус**

Лекция № 0





# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

- Множество состоит из элементов, если  $a$  является элементом множества  $A$ , то пишут  $a \in A$ , а если  $a$  не является элементом множества  $A$ , то пишут  $a \notin A$ . Символ  $A = \{a, b, c, \dots\}$  означает, что множество  $A$  состоит из элементов  $a, b, c, \dots$ . Символом  $|A|$  обозначается мощность множества  $A$ , т.е. количество элементов этого множества. Далее везде полагается, что все рассматриваемые множества конечны, т.е. что  $|A| < \infty$ .

# ДВА МНОЖЕСТВА

- Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то говорят, что  $A$  является подмножеством множества  $B$ , что формально записывается следующим образом:  $A \subseteq B$ . Пустое множество обозначается символом  $\emptyset$ . Если одновременно  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ , то множества  $A$  и  $B$  называются равными:  $A = B$ .

# ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ, ПРОВОДИМЫЕ НАД МНОЖЕСТВАМИ

- 1. Объединение. Так называется множество  $C$ , которое строится по заданным множествам  $A$  и  $B$  следующим образом: в него включаются все элементы из  $A$  и все элементы из  $B$ . Обозначение:  $C = A \cup B$ . 
- 2. Пересечение. Так называется множество  $C$ , которое строится по заданным множествам  $A$  и  $B$  следующим образом: в него включаются все элементы, принадлежащие одновременно множеству  $A$  и множеству  $B$ . Обозначение:  $C = A \cap B$ . 
- 3. Вычитание. Так называется множество  $C$ , которое строится по заданным множествам  $A$  и  $B$  следующим образом: в него включаются все элементы из  $A$ , не принадлежащие множеству  $B$ . Обозначение:  $C = A \setminus B$ . 
- 4. Произведение. Так называется множество  $C$ , которое строится по заданным множествам  $A$  и  $B$  следующим образом: в него включаются все упорядоченные пары  $(a, b)$ , где  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Обозначение:  $C = A \times B$ . 

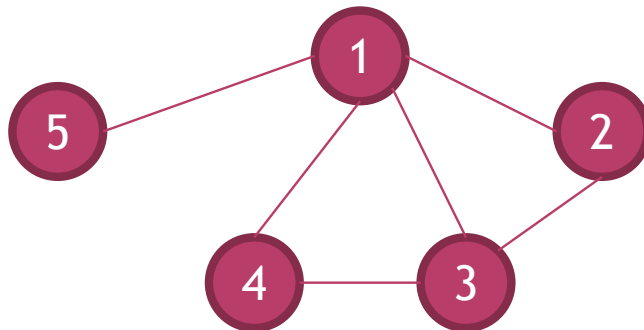
# КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

- Графы делятся на два класса: **ориентированные** и **неориентированные**. Применительно к последним обозначим через  $V$  множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества  $X$ . Например, если  $X=\{1,2,3\}$ , то  $V=\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ ; если  $X=\{1,2\}$ , то  $V=\{(1,2)\}$ . Если  $X=\{1\}$ , то  $V = \emptyset$ , так как пар различных элементов в  $X$  нет. Применительно к неориентированным графам, когда в записи  $V=\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$  указывается пара  $(1,2)$ , подразумевается, что выражения  $(1,2)$  и  $(2,1)$  означают одно и то же: это и означает, что пара **неупорядочена**, т.е. не имеет значения, в каком порядке записаны элементы пары.



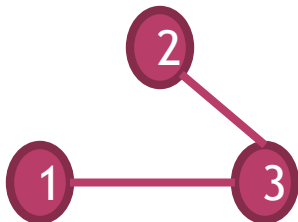
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

- Неориентированным графом  $G(X, U)$  называется пара множеств  $X, U$ , где  $X$  - любое непустое множество, а  $U \subseteq B$ . Элементы множества  $X$  называются вершинами графа, а элементы из  $U$  - его ребрами. Пример неориентированного графа  $G(X, U)$  приведен ниже на рисунке:  
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $U = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5), (1, 4), (3, 1)\}$ .



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНЦИДЕНТНОСТИ И СМЕЖНОСТИ

- Если в некотором графе  $G(X, U)$ , где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$  пара вершин  $x_i, x_j$  такова, что  $(i, j) \in U$ , то вершины  $x_i, x_j$  называются **смежными**; в этой ситуации каждая из них называется **инцидентной ребру  $(i, j)$** , а ребро  $(i, j)$  называется **инцидентным** каждой из вершин  $x_i, x_j$ .



$$\begin{cases} (2,3) \in U; \\ (1,2) \notin U. \end{cases}$$

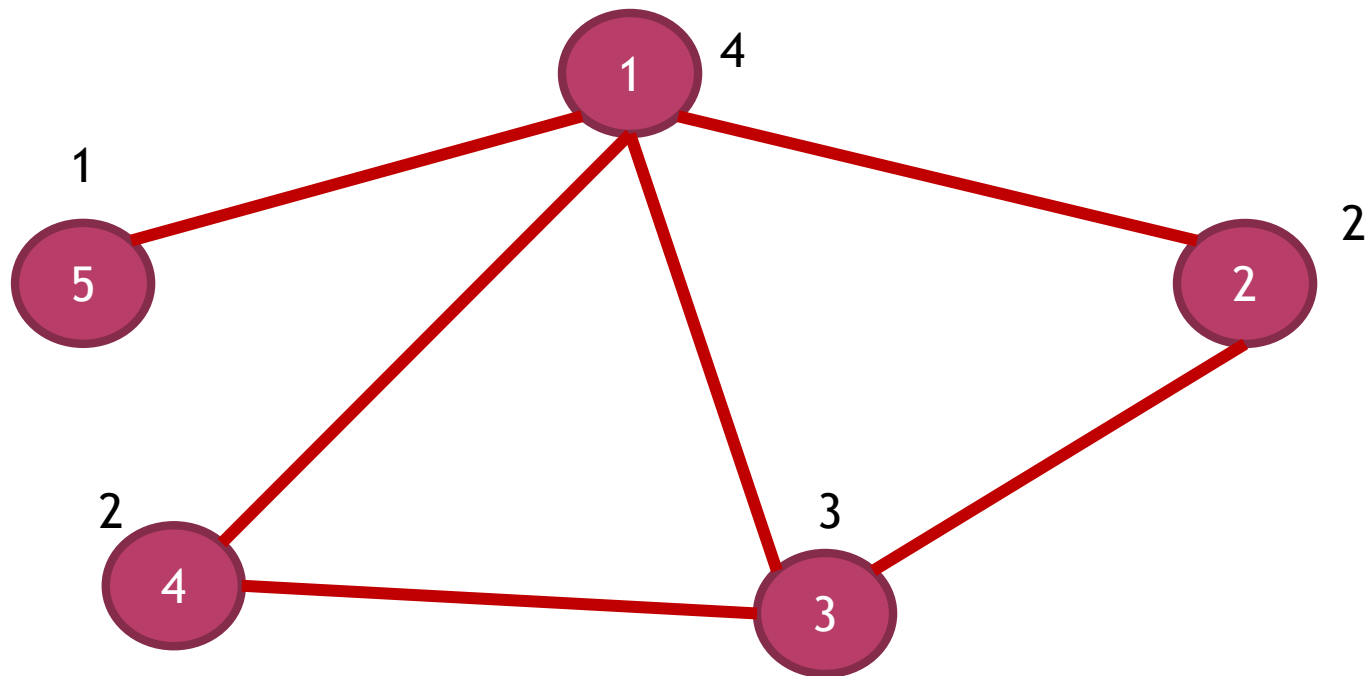
# СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ

- Количество ребер, инцидентных данной вершине  $x$  называется ее **степенью** или **локальной степенью графа в вершине  $x$** ; степень вершины  $x$  обозначается через  $d(x)$ . В приведенном ниже рисунке степень вершины «1» равна 4, степень вершины «2» равна 2, степень вершины «3» равна 3, степень вершины «4» равна 2, степень вершины «5» равна 1. Вершины со степенью 0 называются **изолированными**. В любом графе количество вершин нечетной степени обязательно четно.



# ГРАФ И ЕГО СТЕПЕНИ ВЕРШИН

Граф  $G(X, U)$



# ПОДГРАФЫ И СУГРАФЫ

- Пусть теперь  $G_1 = G(X_1, U_1)$ ,  $G_2 = G(X_2, U_2)$  - два графа таких, что  $X_1 \subseteq X_2$  и  $U_1 \subset U_2$ ; тогда говорят, что  $G_1$  является **подграфом** графа  $G_2$ . Если в некотором графе  $G(X, U)$  множество ребер  $B$  таково, что

$$|U| = \frac{|X|(|X| - 1)}{2}$$

то граф называется **полным**. Если графы  $G_1$  и  $G_2$  таковы, что  $X_1 = X_2$  и  $U_1 \subset U_2$ , то  $G_1$  является **суграфом** графа  $G_2$ .

# МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ ВЕРШИН

Применительно к некоторому графу  $G(X, U)$  построим квадратную матрицу  $M$ , такую, что:

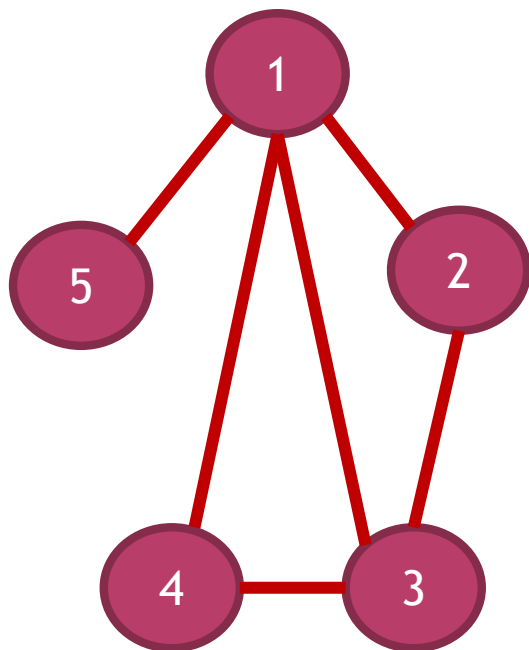
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, a_j) \in B, \\ 0, & (a_i, a_j) \notin B. \end{cases}$$

Очевидно, эта матрица симметрична относительно главной диагонали. Она называется **матрицей смежности вершин** графа  $G(X, U)$ .

# ПРИМЕР 1

Граф  $G(X, U)$

Матрица смежности вершин



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# МАТРИЦА ИНЦИДЕНЦИЙ ГРАФА

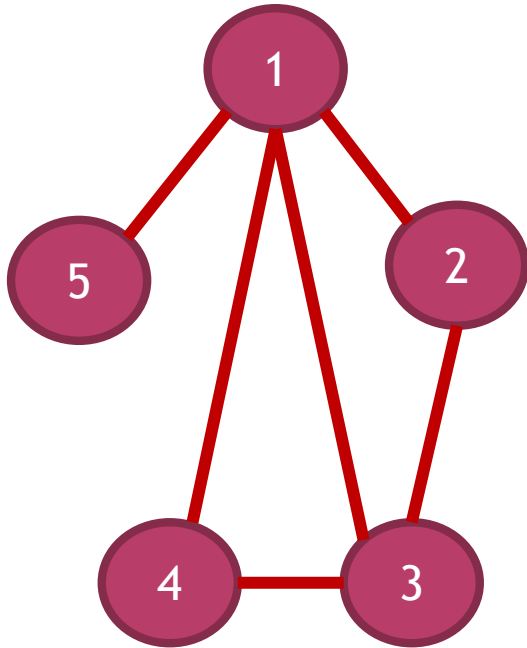
- Поставим в соответствие графу  $G(X, U)$  еще одну матрицу  $N$ , которую определим следующим образом:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \in b_j, \\ 0, & a_i \notin b_j. \end{cases}$$

- Введенная таким образом матрица  $N$  называется **матрицей инциденций** данного графа.

## ПРИМЕР 2

Граф  $G(X, U)$



Матрица инциденций

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = (1,2), u_2 = (1,3), u_3 = (1,4), u_4 = (1,5), u_5 = (2,3), u_6 = (3,4)$$

# МАРШРУТЫ НА ГРАФАХ

Маршрут в неориентированном графе между вершинами  $x_1$  и  $x_n$  — это последовательность вершин и ребер, обозначаемая символом вида

$$P(x_1; x_n) = x_1(x_1, x_2)x_2(x_2, x_3)x_3 \dots x_i(x_i, x_{i+1})x_{i+1} \dots x_{n-1}(x_{n-1}, x_n)x_n$$

Если среди вершин  $x_i$  и ребер  $(x_i, x_{i+1}) \in P(x_1; x_n)$  отсутствуют повторы, то маршрут называется простым, в противном случае — сложным.

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

- Вершины  $x_1, x_n$  в приведенных выше обозначениях называются **концами маршрута** и **связанными** или **соединенными маршрутом  $L(1, n)$** . Граф, в котором связаны любые две вершины, называется **связным**.
- Маршрут, в котором совпадают конечные вершины, называется **циклом**, а цикл, в котором нет повторяющихся вершин, кроме конечных, называется **простым**. Легко убедиться, что степени всех вершин связного графа  $G(X, U)$ , состоящего из одного простого цикла, равны двум.



## ТРИ ОПЕРАЦИИ НА ГРАФАХ

- «Стягивание» ребра.
- Удаление вершины.
- Удаление ребра.

# ДЕРЕВЬЯ НА ГРАФАХ

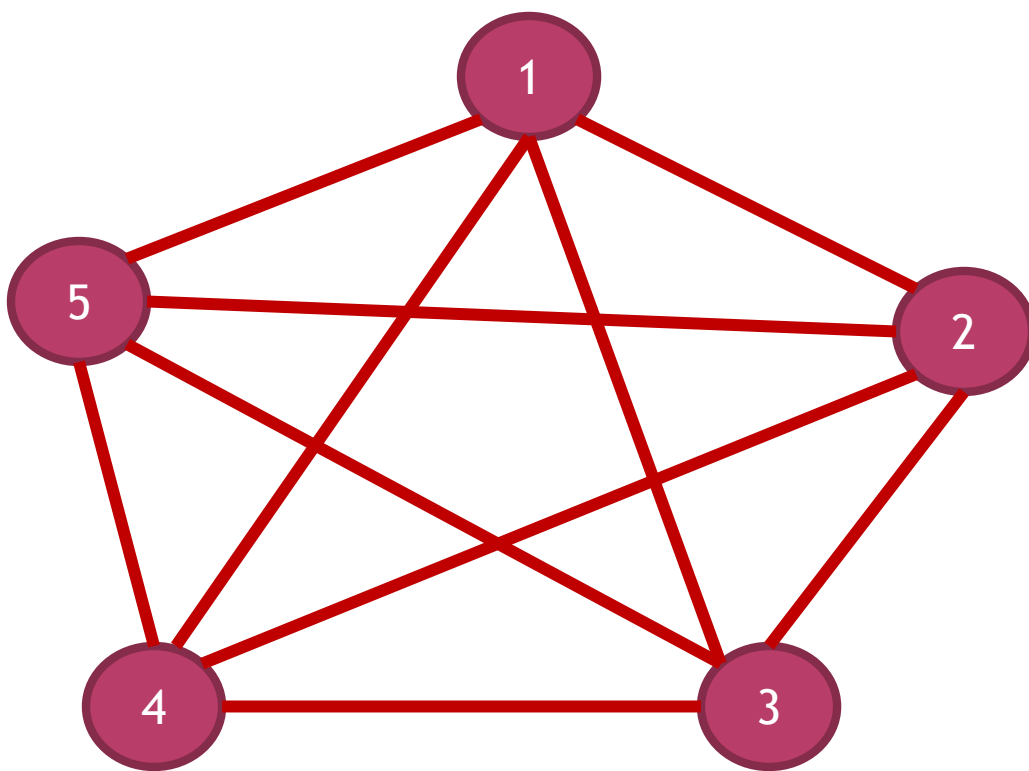
Одним из важнейших видов связных графов является **дерево** - это связный граф без циклов. Применительно к любому графу  $G(X, U)$  такого рода справедливо:

- $|X| - 1 = |U|$ .
- любые две вершины в дереве связаны единственным простым маршрутом.

# ЭЙЛЕРОВЫ ЦИКЛЫ

- **Эйлеровым циклом** в графе называется цикл, который содержит все ребра и все вершины этого графа, причем ребра в эйлеровом цикле не повторяются. Иными словами, при наличии эйлерова цикла в графе этот граф можно обойти по всем ребрам, пройдя каждое ребро только один раз. Граф, обладающий эйлеровым циклом, сам называется **эйлеровым графом**. Эйлеровы графы полностью описываются следующей теоремой, доказанной Эйлером:
- Теорема Эйлера: граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда:
- он связан,
- все его локальные степени четны.

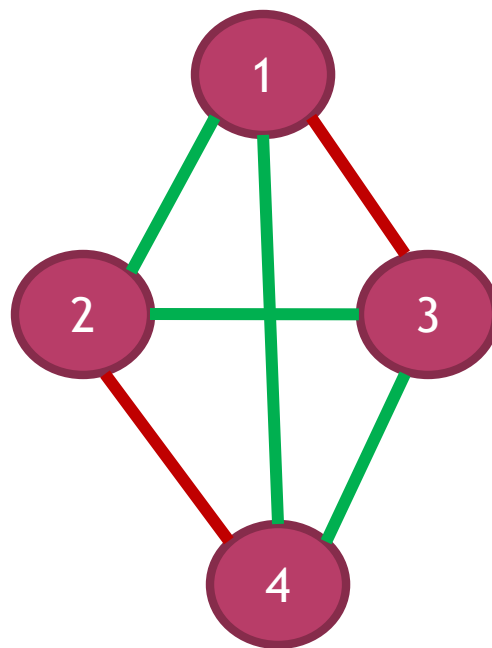
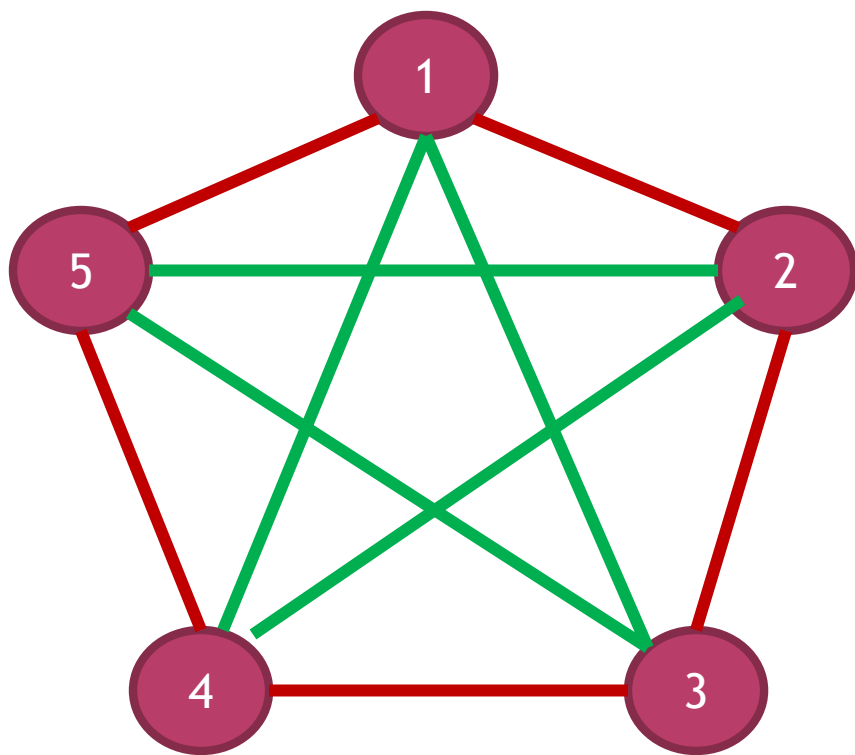
# ПРИМЕР ЭЙЛЕРОВА ГРАФА



# ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

- Граф  $G(X, U)$  называется **гамильтоновым**, если в нем существует простой цикл, содержащий все вершины графа. Например, каждый полный граф - гамильтонов, потому что в нем проведены всевозможные ребра и, в частности, те, благодаря которым возможен обход по всем вершинам. Общих и легко осуществляемых действий, с помощью которых можно было бы достоверно выяснить, является ли данный граф гамильтоновым, не существует, однако, имеются достаточные условия, которые легко проверяются. Например, если степень каждой вершины графа  $G(X, U)$  не меньше величины  $0,5 \cdot |X|$ , то граф  $G(X, U)$  является гамильтоновым (условие Дирака).

# ПРИМЕРЫ ГАМИЛЬТОНОВА ГРАФА



# БИХРОМАТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

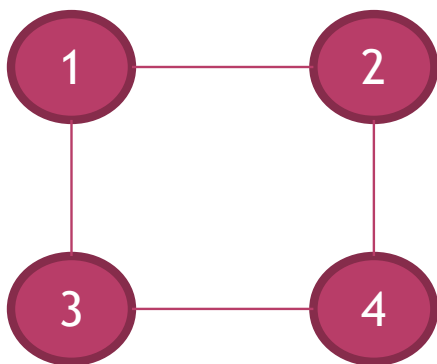
- Граф  $G(X, U)$  называется **двудольным** или **бихроматическим** (см. часть 1, главу 1.4), если его множество вершин  $X$  можно представить в виде объединения двух его непустых подмножеств без общих элементов:

$$X = X_1 \sqcup X_2; \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset,$$

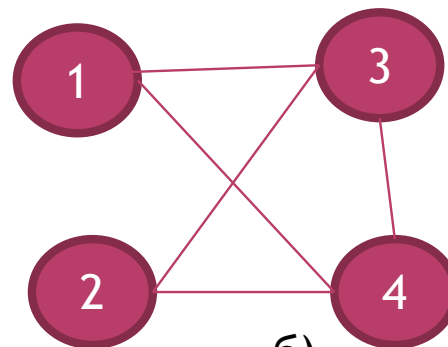
- так, что любое ребро множества  $U$  будет иметь один конец в одной из вершин подмножества  $X_1$ , а другой конец - в одной из вершин подмножества  $X_2$

# САМОСТОЯТЕЛЬНО

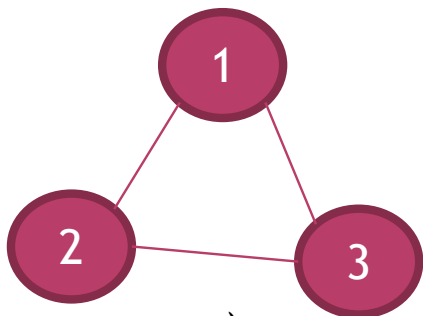
○ Определить вид следующих графов:



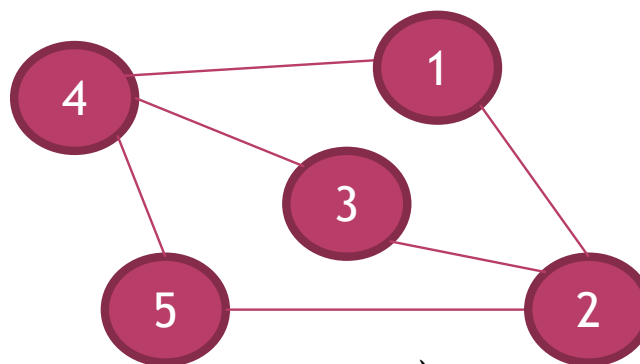
a)



б)



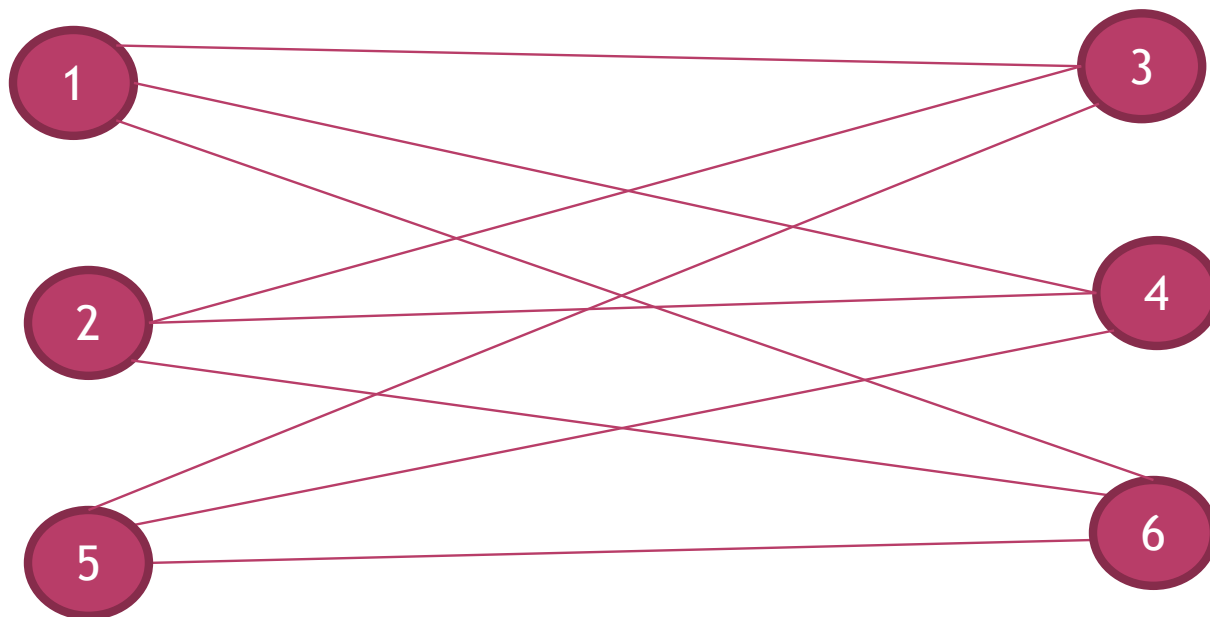
в)



г)

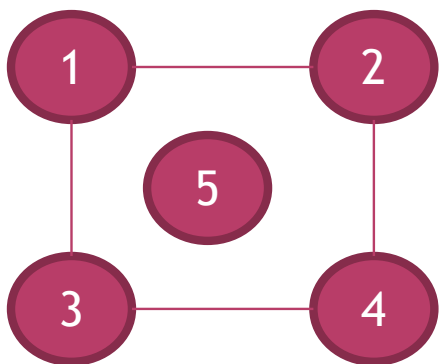


# ПРИМЕР БИХРОМАТИЧЕСКОГО ГРАФА

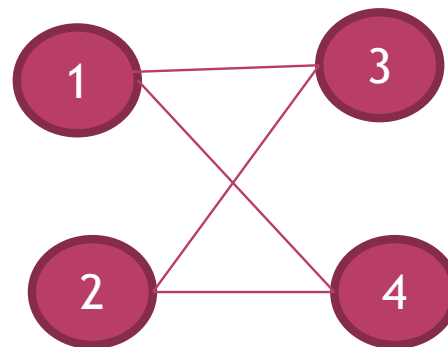


# САМОСТОЯТЕЛЬНО

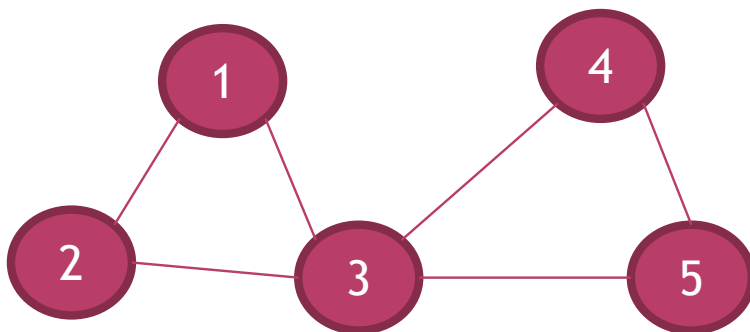
○ Определить вид следующих графов:



a)



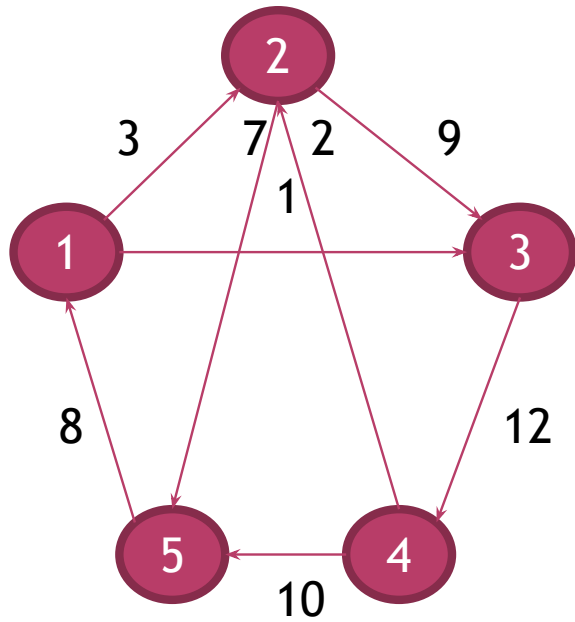
б)



в)

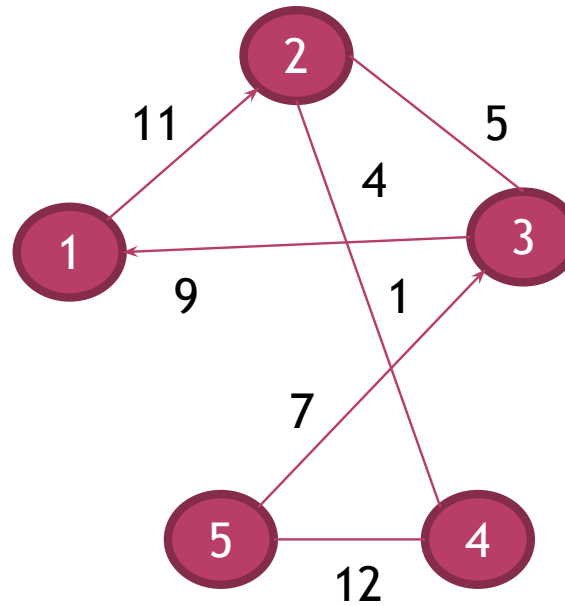
# ВЗВЕШЕННЫЕ ОРГРАФЫ

Ориентированный граф



a)

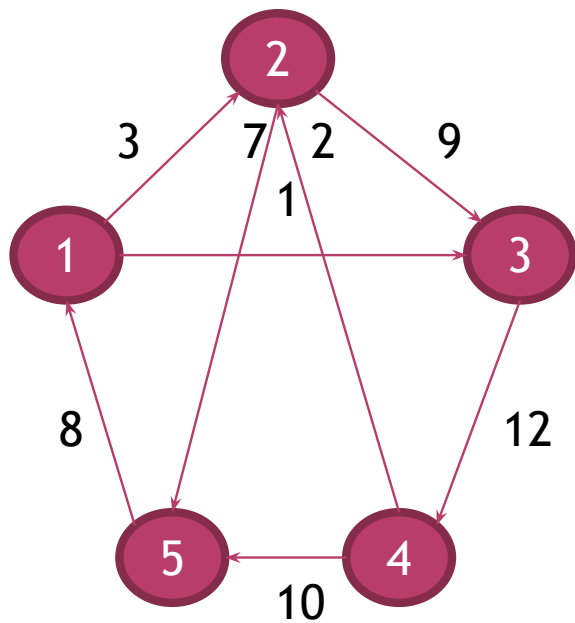
Смешанный граф



б)

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОРГРАФА В КОМПЬЮТЕРЕ

Орграф  $G(X, U)$



a)

Матрица смежности вершин  $G(X, U)$

	1	2	3	4	5
1	0	3	1	0	0
2	0	0	9	0	7
3	0	0	0	12	0
4	0	2	0	0	10
5	8	0	0	0	0

б)

# ОПРЕДЕЛЕНИЯ 1

Граф  $G(X, U)$  называется **ориентированным** или **орграфом**, если на всех ребрах фиксируется допустимое направление движения.

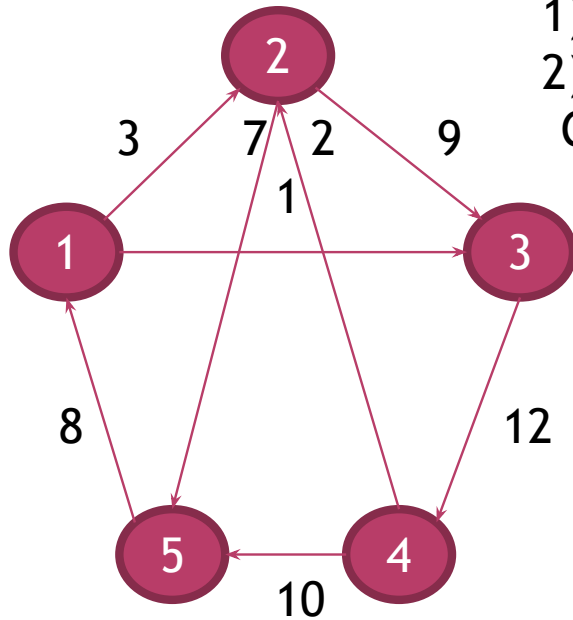
Ориентированные ребра называются **дугами**.

Маршрут, позволяющий попасть из вершины  $x_p$  в вершину  $x_q$ , двигаясь по дугам только в «разрешенном» направлении, называется **путем**  $L(p, q)$ , ведущим из вершины  $x_p$  в вершину  $x_q$ .

Путь, не содержащий повторяющихся вершин, называется простым.

# ПРИМЕРЫ

## Оргграф $G(X, U)$



Пути на  $G(X, U)$  из 3-й вершины во 2-ю:

- 1) 3;(3,4);4;(4,2).
- 2) 3;(3,4);4;(4,5);(5,1);1;(1,2).

Самостоятельно определить все пути из:

- а) 4-й вершины в 3-ю;
- б) 1-й вершины в 4-ю.

а)

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ 2

- Замкнутый путь  $L(p,p)$  называется **контуром**, причем по аналогии с циклами, контур, не содержащий самопересечений, называется **простым контуром**, в противном случае - **сложным контуром**.
- Простой контур, включающий все вершины орграфа, называется **гамильтоновым контуром**.
- Орграф, не содержащий контуров, часто называется **сетью**.
- Орграф, на котором существует путь из любой вершины в любую, называется **сильносвязным** или **бисвязным**.

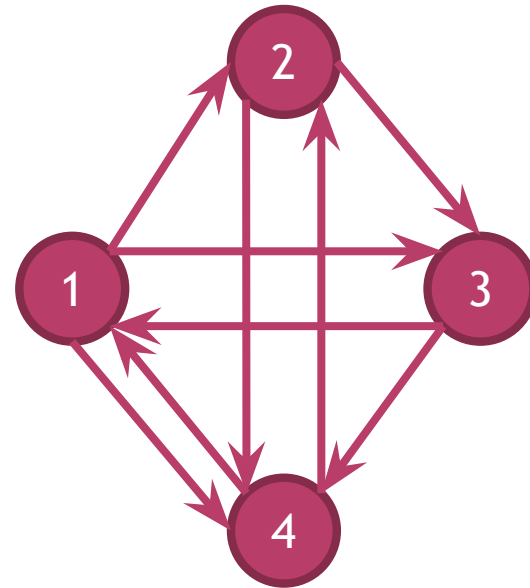
# САМОСТОЯТЕЛЬНО

**Выделить на графе  $G(X,U)$ :**

- простые пути;
- сложные пути;
- простые контуры;
- сложные контуры;
- Гамильтоновы контуры;

**Является ли граф  $G(X,U)$ :**

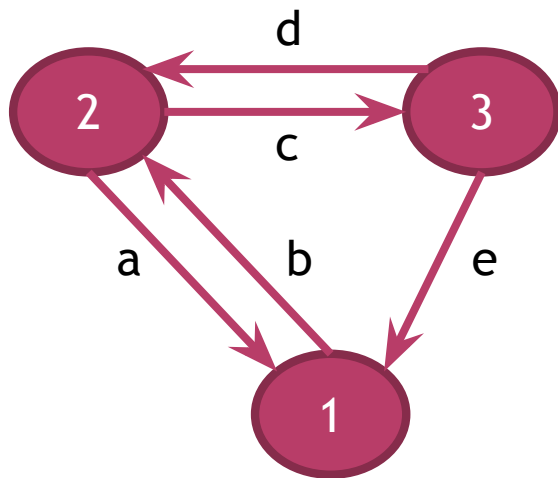
- сетью?
- бисвязным графом?





# ВЫДЕЛЕНИЕ ВСЕХ КОНТУРОВ И ПУТЕЙ НА ОРГРАФЕ

- Выделение всех путей и контуров на орграфе возведением матрицы  $M$  смежности вершин в степень.



$G(X,U)$

$M =$

	1	2	3
1	0	b	0
2	a	0	c
3	e	d	0

# ПУТИ И КОНТУРЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ДВЕ И ТРИ ДУГИ

$$M^*M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & b & 0 \\ \hline a & 0 & c \\ \hline e & d & 0 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & b & 0 \\ \hline a & 0 & c \\ \hline e & d & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ab & 0 & bc \\ \hline ce & ab+cd & 0 \\ \hline ad & be & cd \\ \hline \end{array}$$

$$M^*M^*M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ab & 0 & bc \\ \hline ce & ab+cd & 0 \\ \hline ad & be & cd \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & b & 0 \\ \hline a & 0 & c \\ \hline e & d & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline bce & abb+bcd & 0 \\ \hline aab+acd & cbe & abc+ccd \\ \hline abe+cde & abd+cdd & cbe \\ \hline \end{array}$$

# САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить все простые контуры на орграфе возведением в степень матрицы смежности вершин орграфа  $G(X, U)$ :

