

Теория принятия решений

Лекция 7

Поиск решений и принципы
оценки качества решения
многокритериальных
оптимизационных задач с
помощью эталонов



Содержательная постановка задачи 1

задачи

◆ *Заданы*

1. Критерии, характеризующие некоторый объект;
2. Взаимосвязи между переменными, определяющими величины критериев;
3. Области определения переменных.

◆ *Требуется*

Определить такое сочетание значений аргументов, которое бы было оптимальным.



Определения

1. Оптимальным по Парето является такое сочетание значений переменных, любое изменение которых, улучшающее значение одних критериев, приводит к ухудшению значений других критериев.
2. Идеальным называется такое сочетание значений критериев, которому отвечают их «наилучшие» величины.
3. Наихудшим называется такое сочетание значений критериев, которому отвечают их «наихудшие» величины.



Формальная постановка задачи многокритериальной оптимизации

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \forall i : F_i(\vec{X}) \rightarrow \max (\min); \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j; \\ \forall k : x_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \end{array} \right.$$

где: \vec{X} - вектор переменных;

X_k - множество значений, принимаемых k -й переменной;

$F_i(\vec{X})$ - i -й критерий ($i = 1, 2, \dots, n$);

$\varphi_j(\vec{X})$ - j -е ограничение.



Анализ существующих подходов

Существующие подходы к решению задачи (1):

1. Замена множества критериев их взвешенной суммой.
2. Лексикографическое упорядочение критериев.

Недостаток оптимума по Парето:

низкая селективность: мощность множества оптимальных планов может оказаться соизмеримой с мощностью множества всех допустимых планов, что порождает проблему выбора.

Недостатки существующих подходов:

- ♦ используется некая добавочная информация о важности либо весе критериев, отсутствующая в оригинальной постановке задачи;
- ♦ отсутствует гарантия того, что полученное решение будет Парето – оптимальным.

Формальная постановка задачи поиска идеального и наихудшего сочетания значений критериев

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} K_i = F_i(\vec{X}) \rightarrow \max \text{ (min)}; \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j; \\ \forall k : \mathbf{x}_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}. \end{array} \right.$$

$$\vec{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\} \quad (3)$$

Самостоятельно: Инвертируя цели оптимизации и сохраняя прежними ограничения, получить наихудшее сочетание значений критериев задачи (1)

Новые определения оптимальности:

Оптимальными считаются такие сочетания значений переменных, для которых:

a) Вектор критериев определяет точку в пространстве критериев, которая находится на минимальном расстоянии от идеального сочетания значений критериев,

ИЛИ

b) Вектор критериев определяет точку в пространстве критериев, которая находится на максимальном расстоянии от наихудшего сочетания значений критериев,

ИЛИ

c) Вектор критериев определяет точку в пространстве критериев, для которой отношение расстояния до точки, отвечающей идеальному сочетанию значений критериев к расстоянию до точки, отвечающей наихудшему их сочетанию, минимально.

Графическая иллюстрация определения оптимальности "а)"

7

Точка **A** представляет идеальное сочетание значений критериев, определенных решением задачи (2). Точка **B** находится на минимальном расстоянии от идеальной точки и представляет оптимальное сочетание значений критериев при условии, что значение вектора аргументов удовлетворяют ограничениям задачи (1)



Рис.1. Минимальное расстояние до идеальной точки.
Число критериев $n=3$

**Формальная постановка задачи поиска решения,
наименее удаленного от идеального сочетания
значений критериев для случая, когда все критерии
однородны**

$$(4) \quad \Delta = \sqrt{\sum_i [K_i - F_i(\vec{X})]^2}.$$

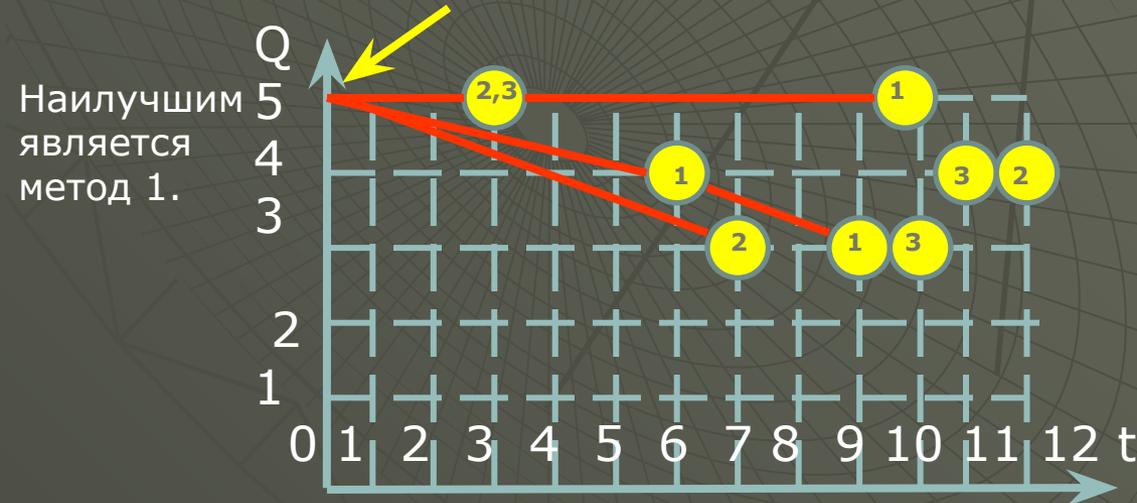
$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n [K_i - F_i(\vec{X})]^2} \rightarrow \min; \\ \forall j: \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j; \\ \forall k: x_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}. \end{array} \right.$$

**Теорема 1: Решение системы (5) является Парето –
оптимальным решением системы (1)**

Использование эталона для выбора метода обучения

Метод	Студент 1		Студент 2		Студент 3	
	Время	Оценка	Время	Оценка	Время	Оценка
1	6	4	9	3	10	5
2	3	5	12	4	7	3
3	10	3	3	5	11	4

Эталон: время обучения $t = 0$; оценка Q равна 5.



**Самостоятельно:
нормировать
данные таблицы и
вновь выбрать
метод обучения**

Графическая иллюстрация поиска оптимального сочетания значений критериев на основании определения б)

Точка В находится на максимальном расстоянии от наихудшей точки и представляет оптимальное сочетание значений критериев при условии, что значение вектора аргументов удовлетворяют ограничениям задачи (1) Точка С представляет наихудшее сочетание значений критериев определенных решениями задачи (2)



Рис.2. Максимальное расстояние от наихудшей точки. Число критериев $n=3$

**Формальная постановка задачи поиска решения,
наиболее удаленного от наихудшего сочетания
значений критериев для случая, когда все критерии
однородны**

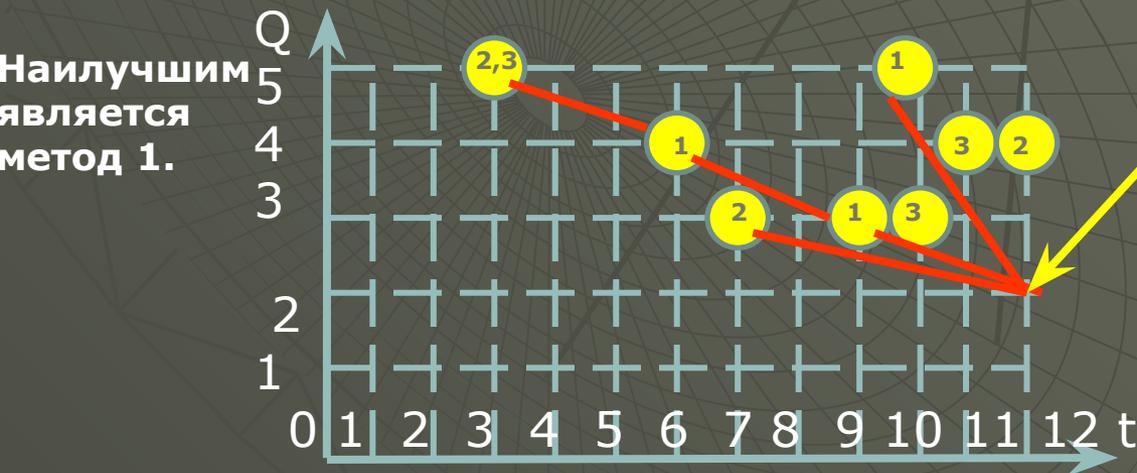
$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \theta = \sqrt{\sum_i [D_i - F_i(\vec{X})]^2} \rightarrow \max ; \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j ; \\ \forall k : x_k \in X_k ; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \\ \\ \vec{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\} \end{array} \right.$$

**Теорема 2: Решение системы (6) является Парето –
оптимальным решением системы (1)**

Использование эталона для выбора метода обучения

Метод	Студент 1		Студент 2		Студент 3	
	Время	Оценка	Время	Оценка	Время	Оценка
1	6	4	9	3	10	5
2	3	5	12	4	7	3
3	10	3	3	5	11	4

Эталон: время обучения $t = 12$; оценка Q равна 2.



Самостоятельно:
нормировать
данные таблицы и
вновь выбрать
метод обучения по
наихудшему
эталону

Формальная постановка задачи отвечающая определению с) для случая, когда все критерии однородны

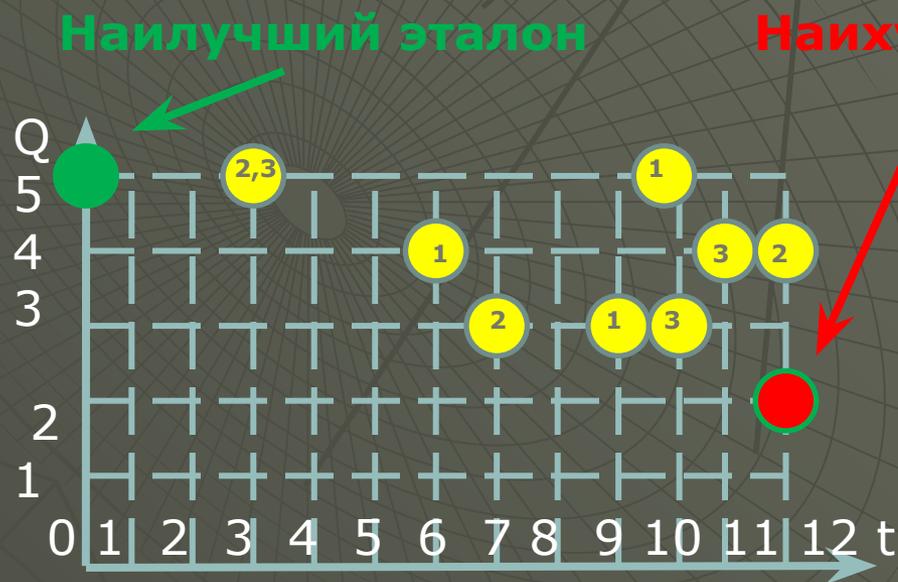
$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [K_i - F_i(\vec{X})]^2}{\sum_{i=1}^n [D_i - F_i(\vec{X})]^2}} \rightarrow \min; \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j; \\ \forall k : \mathbf{x}_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}. \end{array} \right.$$

**Теорема 3: Оптимальное решение системы (7) является
Парето – оптимальным решением системы (1)**



Использование эталонов для выбора метода обучения

Метод	Студент 1		Студент 2		Студент 3	
	Время	Оценка	Время	Оценка	Время	Оценка
1	6	4	9	3	10	5
2	3	5	12	4	7	3
3	10	3	3	5	11	4



Самостоятельно:

- 1) нормировать данные ;
- 2) выбрать метод обучения по отношению расстояний.

Случай неоднородных критериев

Если критерии системы (1) неоднородны, то, нормируя их, получим систему (13), значения всех критериев которой являются безразмерными и заключены в диапазоне $\{0 - 1\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i: f_i(\vec{X}) = \frac{F_i(\vec{X}) - \min(K_i; W_i)}{\max(K_i; W_i) - \min(K_i; W_i)} \rightarrow \max \text{ (min)}; \\ \forall j: \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j; \\ \forall k: x_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \end{array} \right. \quad (13)$$

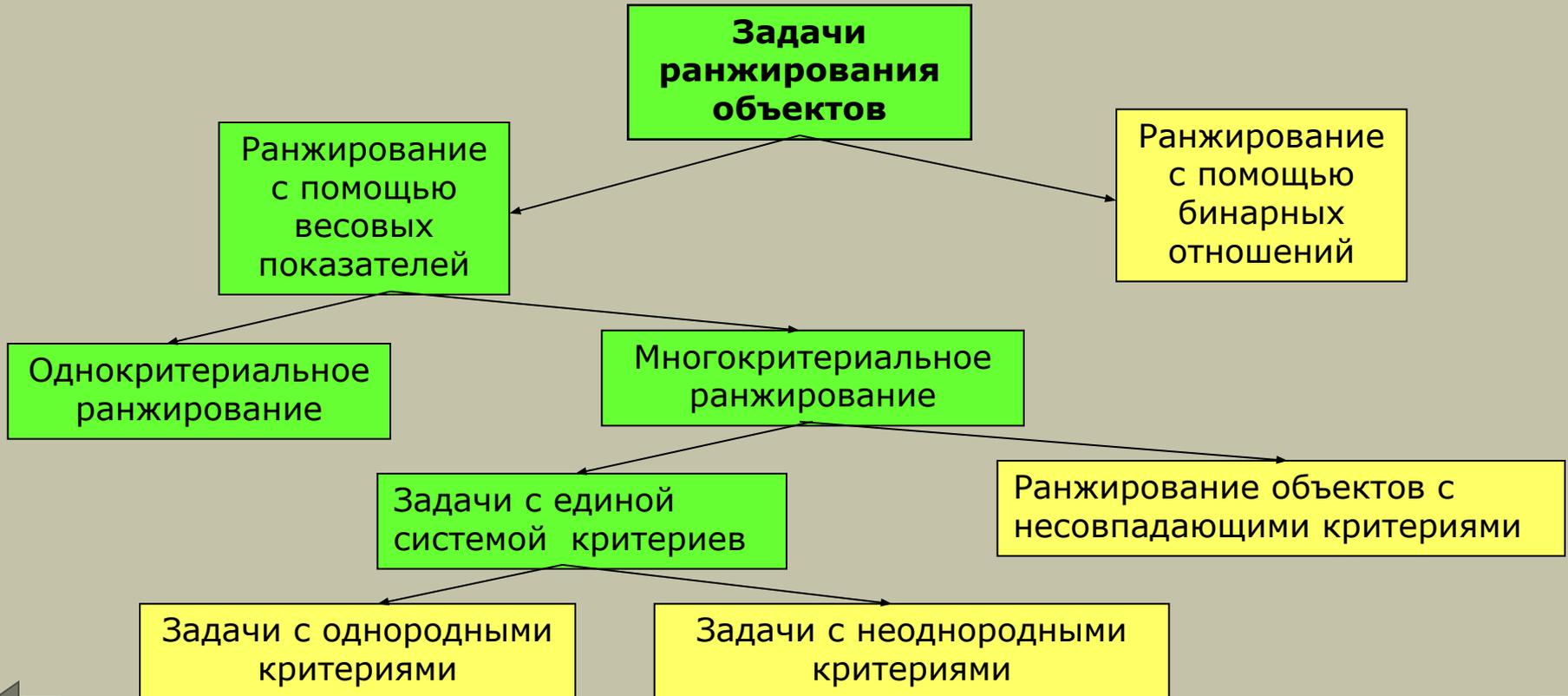
Для которой справедлива теорема:

Теорема 4: Вектор переменных, являющийся Парето - оптимальным для системы (13), оптимален по Парето и для исходной системы (1)



Пример 2. Использование метода эталонов для ранжирования объектов

Классификация задач ранжирования



Ранжирование с помощью бинарных отношений

17

Содержательная постановка задачи

Пусть каждый эксперт или группа экспертов оценивают пару объектов «с», «d» пользуясь только бинарными отношениями: «объект «с» лучше объекта «d»», «объект «с» эквивалентен объекту «d»» и «объект «с» хуже объекта «d»».

Целью является ранжирование объектов, т. е. определение такой перестановки n объектов, для которой справедливо: если $k < j$, то $i_k \boxtimes i_j$

Специфика многокритериальных задач оптимального упорядочения объектов отображается наличием в (1) следующих ограничений, налагаемых на компоненты вектора переменных: значения всех переменных являются целыми числами, не совпадают, и заключены в диапазоне $[1 - n]$.



Пример 2.1 (продолжение)

Традиционный способ решения

18

Одним из традиционных способов реализации ранжирования является использование языка и методов теории графов: строится взвешенный ориентированный граф $G(X, U)$, вершины множества X которого соответствуют объектам, и существует дуга $(i, j) \in U$, если справедливо: $i \succ j$, причем вес этой дуги $r(i, j)$ может быть прямо пропорционален профессиональному рейтингу соответствующего эксперта или группы экспертов. Если граф $G(X, U)$ содержит контуры, то это говорит о наличии противоречий в экспертных оценках. Наиболее простой способ избавиться от противоречий – отказаться от мнений некоторых экспертов, что сводится к задаче о разрыве контуров на графах. Таким образом, задача ранжирования объектов может быть, в конечном счете, сведена к поиску отношения доминирования вершин ориентированного графа без контуров, т.е. к определению некоторого упорядочения этих вершин. Одна из процедур ранжирования вершин на каждой i -й итерации ($i=1, 2, \dots$) сводится к выделению вершин-источников, объекты, соответствующие этим вершинам, ставятся на i -е место в перестановке π , после чего выбранные вершины отбрасываются и, если граф не исчерпан, процедура повторяется на $(i+1)$ -й итерации.



Пример 2.1 (продолжение)

Традиционный способ решения

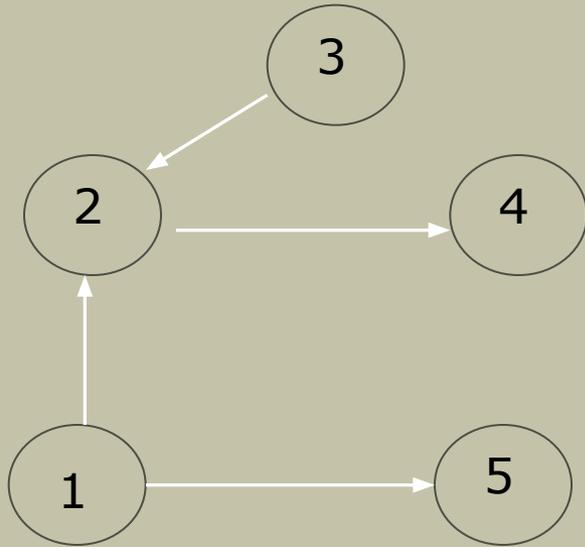


Рис. 6. Исходный граф $G(X, U)$

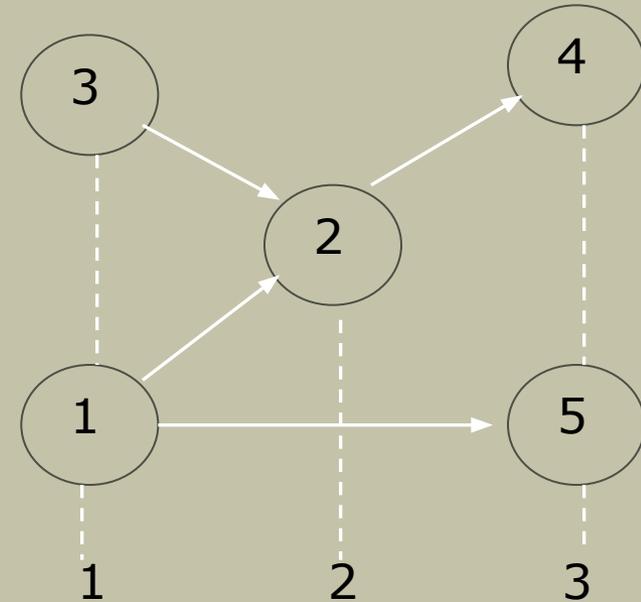


Рис. 7. Граф $G(X, U)$ после разбиения вершин на слои.

Для графа $G(X, U)$ существует множество эквивалентных перестановок вершин, неоднозначно распределяющих объекты – претенденты на первые и последние места, например: $\pi_1 = \{1, 3, 2, 5, 4\}$, $\pi_2 = \{3, 1, 2, 5, 4\}$
 $\pi_3 = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, $\pi_4 = \{3, 1, 2, 4, 5\}$, $\pi_5 = \{3, 1, 5, 2, 4\}$.



Пример 2.1

(продолжение) Решение с помощью эталонов

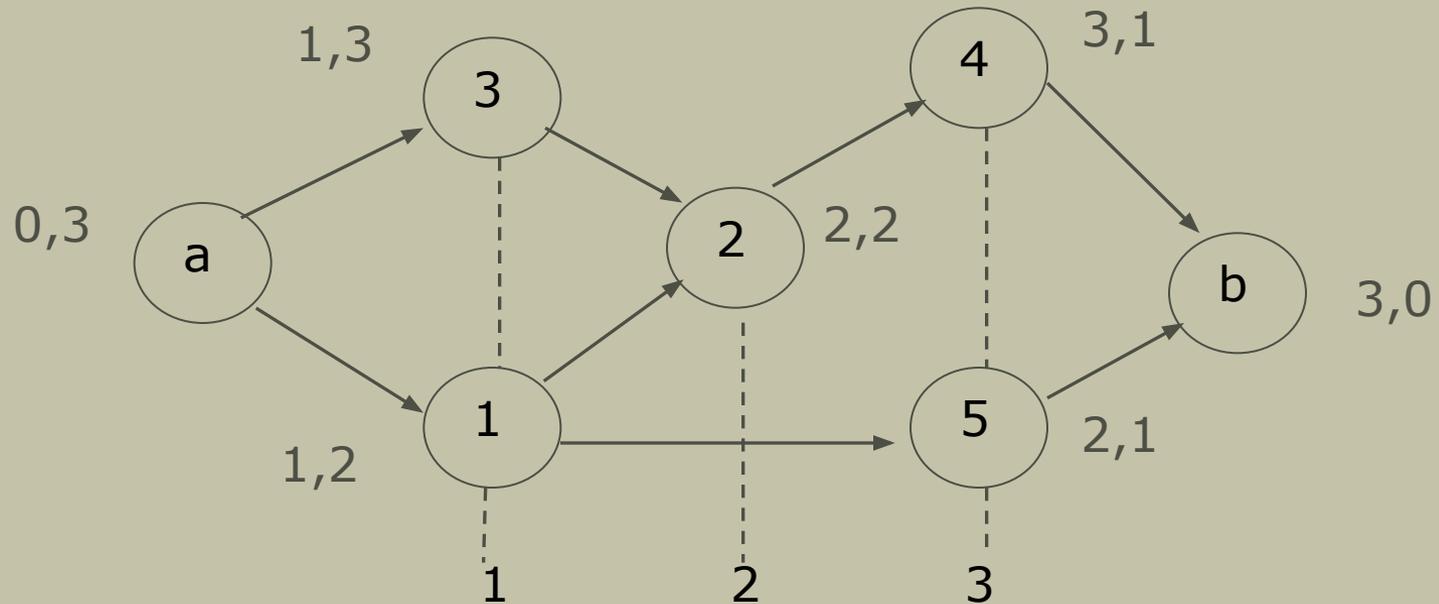


Рис. 8. Модифицированный граф $G'(X', U')$: вершина "а" соответствует идеальному объекту, вершина "b" – наихудшему; вектор u каждой вершины равен расстоянию от неё до вершин "а" и "b".



Пример 2.1 (окончание) Решение с²¹ помощью эталонов

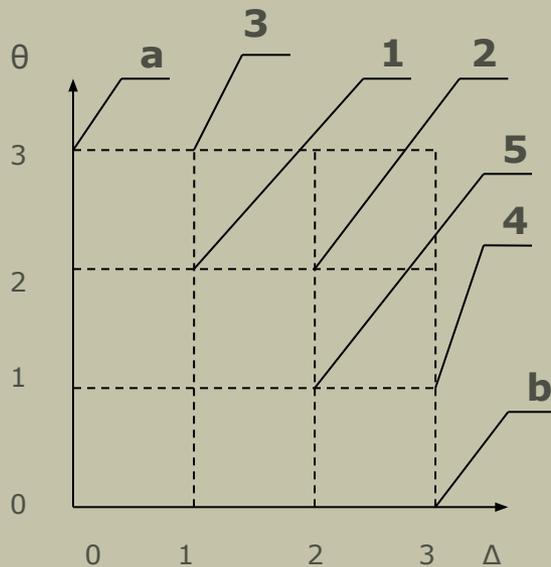


Рис. 9. Расположение эталонов и объектов в пространстве критериев $\Delta \times \theta$.

i	$L(a,i)$	$L(i,b)$
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
3	1	$\sqrt{13}$
4	$\sqrt{13}$	1
5	$\sqrt{8}$	$\sqrt{2}$

Таблица расстояний от каждого объекта до эталонов «а» и «b».

Оптимальное упорядочение объектов - перестановка $\pi_3 = \{3, 1, 2, 5, 4\}$



Пример 2.2 Ранжирование объектов, характеризуемых единой системой однородных критериев

$$(14) \quad \Delta_j = \sqrt{\sum_i [K_{i,j} - F_{i,j}]^2}.$$

$$(15) \quad \theta_j = \sqrt{\sum_i [W_{i,j} - F_{i,j}]^2}.$$

$$(16) \quad \gamma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [K_{i,j} - F_{i,j}]^2}{\sum_{i=1}^n [W_{i,j} - F_{i,j}]^2}}$$

Пример 2.2.1. Пользуясь принципом Парето, суммой набранных баллов и выражениями (14) – (16), определить рейтинг четырёх учеников на основании оценок по трём дисциплинам, приведенным ниже в таблице 1, строки которой соответствуют ученикам, а столбцы – дисциплинам.



Пример 2.2.1. Ранжирование объектов, характеризуемых единой системой однородных критериев

Табл. 1

	1	2	3
1	5	5	2
2	4	4	4
3	3	4	5
4	5	5	4

Оценки учеников

Табл. 2.

	Δ	θ	γ
1	3,0	4,2	0,7
2	1,7	3,5	0,5
3	2,2	3,7	0,55
4	1,0	4,7	0,21

Критерии качества учеников

$p(\Delta)=4,2,3,1$; $p(\theta)=4,1,3,2$ и $p(\gamma)=4,2,3,1$: выбор перестановки, определяющей рейтинг учеников, зависит от выбора критерия.



Ранжирование объектов с неоднородной системой критериев

Нормирование показателей

Вычисление критериев

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i: f_{i,j} = \frac{F_{i,j} - \min(K_{i,j}; W_{i,j})}{\max(K_{i,j}; W_{i,j}) - \min(K_{i,j}; W_{i,j})}; \\ \forall i: k_{i,j} = \frac{K_{i,j} - \min(K_{i,j}; W_{i,j})}{\max(K_{i,j}; W_{i,j}) - \min(K_{i,j}; W_{i,j})}; \\ \forall i: w_{i,j} = \frac{W_{i,j} - \min(K_{i,j}; W_{i,j})}{\max(K_{i,j}; W_{i,j}) - \min(K_{i,j}; W_{i,j})}; \end{array} \right.$$

$$\Delta_j = \sqrt{\sum_i [k_{i,j} - f_{i,j}]^2}.$$

$$\theta_j = \sqrt{\sum_i [w_{i,j} - f_{i,j}]^2}.$$

$$\gamma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [k_{i,j} - f_{i,j}]^2}{\sum_{i=1}^n [w_{i,j} - f_{i,j}]^2}}$$

Ранжирование объектов, осуществляемое с использованием вышеприведенных выражений, удовлетворяет принципу Парето.



Ранжирование объектов с неоднородной системой критериев – пример.

Требуется, пользуясь методом эталонов, ранжировать четыре выпускающих кафедры вуза по следующим трем показателям: процент преподавателей кафедры, имеющих ученые степени; среднее число публикаций, приходящихся на одного сотрудника кафедры за заданный временной период; процент дипломов, выполненных на кафедре и защищенных в заданном временном интервале с оценкой «отлично».

Табл. 3.

	1	2	3
1	60%	2	10%
2	20%	3	10%
3	40%	4	20%
4	80%	3	30%



Ранжирование объектов с неоднородной системой критериев – пример (продолжение).

После нормирования критериев, учитывая, что векторы \mathbf{K} и \mathbf{W} соответственно равны: $\mathbf{K} = \{1, 1, 1\}$, $\mathbf{W} = \{0, 0, 0\}$, величины k и w совпадают с одноименными исходными параметрами.

	1	2	3
1	0,67	0,0	0,0
2	0,0	0,5	0,0
3	0,33	1,0	0,5
4	1,0	0,5	1,0

Данные по кафедрам после нормализации

	Δ	θ	γ
1	1,45	0,67	2,16
2	1,5	0,5	3,0
3	0,84	1,16	0,724
4	0,5	1,5	0,33

Значения критериев

Рейтинги кафедр: $p(\Delta) = p(\theta) = p(\gamma) = 4,3,1,2.$

Самостоятельно:

1) определить рейтинг пяти кафедр:

1	30%	5	15
2	60%	2	15%
3	20%	6	10%
4	70%	4	20%
5	10%	3	30%

2) Прочсть стр. 94-99: подведение итогов голосования методом эталонов.