

ЕГЭ – 2017 по математике

Базовый уровень

Задание № 20

Задачи на логику и смекалку

Шурубова Лидия Павловна, учитель
математики гимназии № 92 г.
Краснодара

Кузнечик и координатная

прямая

Задача: Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за один прыжок. Кузнечик начинает прыгать из начала координат. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 11 прыжков?

Пояснение.

Заметим, что кузнечик может оказаться только в точках с нечётными координатами, поскольку число прыжков, которое он делает, — нечётно.

Максимально кузнечик может оказаться в точках, модуль которых не превышает одиннадцати. Таким образом, кузнечик может оказаться в точках: $-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$ и 11 ; всего 12 точек.

Ответ: 12.

Доски и распилы

Задача. На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, получится 15 кусков, если по жёлтым — 5 кусков, а если по зелёным — 7 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Пояснение.

Если распилить палку по красным линиям, то получится 15 кусков, следовательно, линий — 14. Если распилить палку по жёлтым — 5 кусков, следовательно, линий — 4. Если распилить по зелёным — 7 кусков, линий — 6. Всего линий:
 $14 + 4 + 6 = 24$ линии, следовательно, кусков будет 25.

Ответ: 25.

Параллели и меридианы

Задача: На глобусе фломастером проведены 17 параллелей (включая экватор) и 24 меридиана. На сколько частей проведённые линии разделяют поверхность глобуса?

Пояснение.

Представим, что на глобусе ещё не нарисованы параллели и меридианы. Заметим, что 24 меридиана разделят глобус на 24 части. Рассмотрим сектор, образованный двумя соседними меридианами. Проведение первой параллели разделит сектор на две части, проведение второй добавит ещё одну часть, и так далее, таким образом, 17 параллелей разделят сектор на 18 частей. Следовательно, весь глобус будет разбит на $24 \cdot 18 = 432$ части.

Ответ: 432

Зарплата за колодец

Задача: Хозяин договорился с рабочими, что они копают колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 3500 рублей, а за каждый следующий метр — на 1600 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько денег хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 9 метров?

Пояснение.

Последовательность цен за метр $a_1 = 3500$ арифметическая прогрессия с первым элементом $a = 1600$ и разностью

Сумма S_n первых n элементов арифметической прогрессии —

$$S_9 = \frac{9 \cdot (2 \cdot 3500 + 8 \cdot 1600)}{2} = 89100.$$

То есть, в нашем

Дом, подъезды, квартиры (1)

Задача: Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 455 квартир?

Пояснение.

Число квартир, этажей и подъездов может быть только целым числом. Заметим, что число 455 делится на 5, 7 и 13. Следовательно, в доме должно быть 5 подъезда, 7 квартир и 13 этажей.

Ответ: 13.

Дом, подъезды, квартиры (2)

Задача: Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Пояснение.

Поскольку в первых 7 подъездах не меньше 462 квартир, в каждом подъезде не меньше $462 : 7 = 66$ квартир.

Следовательно, на каждом из 7 этажей не меньше 9 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 9 квартир. Тогда в первых семи подъездах всего $9 \cdot 7 \cdot 7 = 441$ квартира, и квартира 462 окажется в восьмом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 10 квартир. Тогда в первых семи подъездах $10 \cdot 7 \cdot 7 = 490$ квартир, а в первых шести — 420.

Следовательно, квартира 462 находится в седьмом подъезде.

Она в нем 42ая по счету, поскольку на этаже по 10 квартир, она расположена на пятом этаже.

Если бы на каждой площадке было по 11 квартир, то в первых шести подъездах оказалось бы $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ квартиры, то есть 462 квартира в шестом подъезде, что противоречит условию.

Тем самым, Саша живёт на пятом этаже.

Ответ: 5.

Улитка ползёт по дереву (1)

Задача: Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 3 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка впервые доползёт до вершины дерева?

Пояснение.

За день улитка заползёт на 4 метра, а за ночь — сползёт на 3 метра. Итого за сутки она заползёт на метр. За шестеро суток она поднимется на высоту шести метров. И днём следующего, седьмого, дня она окажется на вершине дерева.

Ответ: 7.

Улитка ползет по дереву (2)

Задача: Нефтяная компания бурит скважину для добычи нефти, которая залегаёт, по данным геологоразведки, на глубине 3 км. В течение рабочего дня бурильщики проходят 300 метров в глубину, но за ночь скважина вновь «заиливается», то есть заполняется грунтом на 30 метров. За сколько рабочих дней нефтяники пробурят скважину до глубины залегания нефти?

Пояснение.

За день скважина увеличивается на $300 - 30 = 270$ м. К началу одиннадцатого рабочего дня нефтяники пробурят 2700 метров. За одиннадцатый рабочий день нефтяники пробурят ещё 300 метров, то есть дойдут до глубины 3 км.

Ответ: 11.

Корзина с грибами

Задача: В корзине лежит 50 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 28 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 24 грибов хотя бы один груздь. Сколько груздей в корзине?

Пояснение.

В корзине точно лежит 27 груздей и 23 рыжика, так как взять 28 груздей, как и 24 рыжика, не получится.

Ответ: 27

Золотые и серебряные монеты

Задача: В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 4 золотых монеты получить 5 серебряных и одну медную;
- 2) за 7 серебряных монет получить 5 золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 90 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Пояснение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 4z = 5c + 1m, \\ 7c = 5z + 1m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z - 5c - 1m = 0, | \cdot 5 \\ -5z + 7c - 1m = 0 | \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} 20z - 25c - 5m = 0, \\ -20z + 28c - 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3c - 9m = 0 \Leftrightarrow 3c = 9m \Leftrightarrow 1c = 3m.$$

Если Николай за 1 серебряную получил 3 медных, а у него появилось 90 медных, то он истратил 30 серебряных (т. к. $90 : 3 = 30$ серебряных).

Таким образом, у него количество монет уменьшилось на 30.

Ответ: 30

Прямоугольник разбит на четыре правильных многоугольника

Задача: Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвертого ~~прямоугольника~~ ~~прямоугольника~~ как показано на рисунке. Периметр верхнего левого прямоугольника равна 24, поэтому

| | c | d |
|-----|-----|-----|
| a | 24 | 28 |
| b | ? | 16 |

аналогично,
 $2(a + c) = 24$,
 $2(a + d) = 28$, $2(b + d) = 16$.

При помощи полученной системы уравнений выразим значение $b + c$:

$$\begin{cases} a + c = 12, \\ a + d = 14, \\ b + d = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - c, \\ d = 14 - a, \\ b + d = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - c, \\ d = 2 + c, \\ b + c + 2 = 8. \end{cases}$$

Из третьего уравнения получаем: $b + c = 6$,

Следовательно, искомый периметр равен 12.

Викторина - правильные и неправильные ответы

Задача: Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Пояснение.

Он дал x правильных ответов, y ($y \geq 1$) неправильных и на z вопросов не ответил совсем. $x + y + z = 25$

За каждый правильный ответ он получал 7, за неправильный (-10), за неосвещенный вопрос — 0.

$$7x - 10y + 0z = 42$$

Получили систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Подберем решения этой системы уравнений.

$$x+y+z=25$$

$$7x-10y=42=7*6$$

Из второго уравнения: $7x-7*6=7(x-6)=10y$.

Так как число $7(x-6)$ делится на 7, то и $10y$ делится на

7. Рассмотрим два случая:

1) Если $y=7$, то $x-6=10$, значит, $x=16$, тогда

$$z=25-x-y=25-16-7=2$$

2) Если $y=14$, то $7(x-6)=140$, отсюда, $x-6=20$, значит, $x=26>25$, что противоречит условию.

Таким образом, ученик правильно ответил на 16 вопросов.

Ответ: 16

Бактерии в стакане

Задача: Каждую секунду бактерия делится на две новые бактерии. Известно, что весь объём одного стакана бактерии заполняют за 1 час. За сколько секунд стакан будет заполнен бактериями наполовину?

Пояснение.

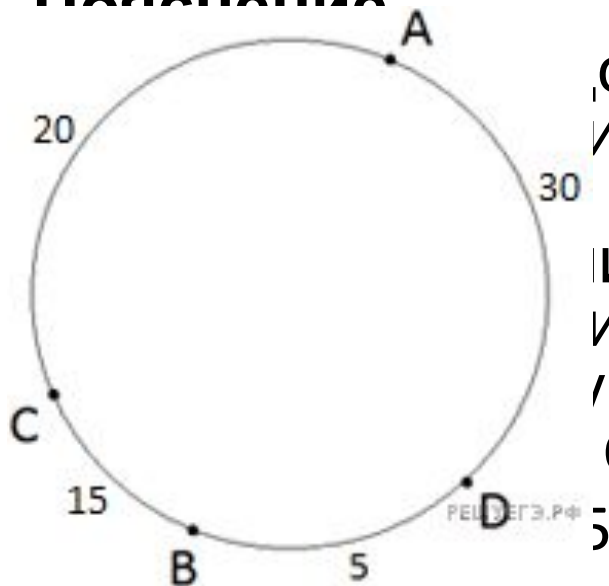
Заметим, что каждую секунду в стакане становится в два раза больше бактерий. То есть если в какой-то момент бактериями заполнена половина стакана, то через секунду будет заполнен весь стакан. Таким образом, полстакана будет заполнено через 59 минут и 59 секунд то есть через 3599 секунд.

Ответ: 3599

Бензоколонка на кольцевой дороге

Задача: На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: А, В, С и D. Расстояние между А и В — 35 км, между А и С — 20 км, между С и D — 20 км, между D и А — 30 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). Найдите расстояние между В и С. Ответ дайте в километрах.

Решение



Расположим А, В, С, D вдоль дороги по очереди так, чтобы соответствовали условиям. Всё хорошо, кроме расстояния между D и А. Чтобы оно нам нужно, подвинем D и В и А нужным образом. С будет 15 км.

Спасибо за внимание!