Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение высшего образования
Пермский национальный  исследовательский политехнический университет
Кафедра прикладной математики

# Обоснование и расчет характеристик конструкционной прочности материалов в условиях неоднородности данных

Работу выполнила: Пастухова О.В.
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент кафедры Прикладной математики
Осечкина  Т.А.

# Цель исследования

Создание методики расчета значений характеристик конструкционной прочности материала в условиях неоднородности данных

# *Задачи*

- Расчет значений характеристик конструкционной прочности материала с помощью однофакторной дисперсионной модели

- Обобщение методики, разработанной Кришнамурти - Мэтью на двухфакторную иерархическую дисперсионную модель

# *Основные определения*

- ***Расчетные значения характеристик конструкционной прочности материалов*** - уровни свойств материалов, допускаемых для расчетного определения гарантированной прочности и долговечности парка однотипных элементов конструкций.

- ***Толерантный интервал*** – интервал, определяемый по выборке, относительно которого можно утверждать с уровнем доверия **γ**, что он содержит, по крайней мере, указанную долю ***p*** совокупности.
- ***Границы статистического толерантного интервала*** – толерантные границы.

- Значение нижней толерантной границы, построенное для выборочных данных, является искомым расчетным значением характеристик конструкционной прочности.

# Однофакторная дисперсионная модель

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij} \qquad j = \overline{1, n_\iota} \qquad i = \overline{1, a}$$

Пусть $Y_{ij}$ представляет собой $j$ – ое наблюдение в $i$ – *ом* уровне фактора.

$\mu$ – общее среднее

$\tau_i$ – эффект $i$ – *ого* уровня фактора

$e_{ij}$ – случайное отклонение

$a$ – число уровней фактора

$n_i$ – число наблюдений в каждой уровне

# *Определение нижней толерантной границы*

Пусть $Y \sim N(\mu, \sigma_\tau^2 + \sigma_e^2)$ представляет собой нормально-распределенную случайную величину с математическим ожиданием $\mu$ и дисперсией вида $\sigma^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma_e^2$.

Тогда доля распределения $Y \sim N(\mu, \sigma_\tau^2 + \sigma_e^2)$, равная p, достоверно находится в одностороннем интервале $\left(\mu - z_p\sqrt{\sigma_\tau^2 + \sigma_e^2}, +\infty\right)$,где $z_p$ - квантиль уровня p стандартного нормального распределения $N(0;1)$. Будем искать нижнюю границу толерантного интервала при неизвестных параметрах $\mu$ и $\sigma^2$ в виде $\bar{\bar{y}} - k * \sqrt{\hat{\sigma}_\tau^2 + \hat{\sigma}_e^2}$, где $\bar{\bar{y}}$ – оценка математического ожидания $Y$, $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_\tau^2 + \hat{\sigma}_e^2$ – оценка дисперсии, $k$ – толерантный множитель.

# Основные характеристики однофакторной дисперсионной модели для несбалансированного набора данных

| Источник изменчивости | Сумма квадратов | Степени свободы | Средний квадрат | Ожидаемый средний квадрат | Оценки компонент дисперсии |
|---|---|---|---|---|---|
| Фактор | $ss_\tau = \sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{\bar{y}})^2$ | $a-1$ | $ms_\tau = \frac{ss_\tau}{a-1}$ | $\sigma_\tau^2 + \tilde{n}\sigma_e^2$ | $\hat{\sigma}_\tau^2 = ms_\tau - \tilde{n} ms_e$ |
| Случайное отклонение | $ss_e = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ | $N-a$ | $ms_e = \frac{ss_e}{a(n-1)}$ | $\sigma_e^2$ | $\hat{\sigma}_e^2 = ms_e$ |

# Расчет нижней толерантной границы с помощью подхода Кришнамурти -Мэтью

Центральные величины для $\mu, \sigma_\tau^2, \sigma_e^2$ представляют собой функции от неизвестных случайных величин $\bar{\bar{Y}}$, $SS_\tau$, $SS_e$ и соответствующих им наблюдаемых значений $\bar{\bar{y}}, ss_\tau, ss_e$.

Известно

$$\frac{\sqrt{a}(\bar{\bar{Y}}-\mu)}{\sqrt{\sigma_\tau^2+\tilde{n}\sigma_e^2}} \sim N(0,1)\,, \qquad \frac{SS_\tau}{\sigma_\tau^2+\tilde{n}\sigma_e^2} \sim \chi^2_{a-1}\,, \qquad \frac{SS_e}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{a(n-1)}$$

Центральные величины для $\mu, \sigma_\tau^2, \sigma_e^2$ можно определить:

$$G_{\mu,i} = \bar{\bar{y}} - \frac{\dfrac{\sqrt{a}(\bar{\bar{Y}}-\mu)}{\sqrt{\sigma_\tau^2+\tilde{n}\sigma_e^2}}}{\sqrt{\dfrac{SS_\tau}{\sigma_\tau^2+\tilde{n}\sigma_e^2}}} \sqrt{\frac{ss_\tau}{a}} \sim \bar{\bar{y}} - \frac{N(0,1)_i}{\sqrt{\chi^2_{(a-1),i}}} \sqrt{\frac{ss_\tau}{a}}$$

$$G_{\sigma_e^2,i} = \frac{\sigma_e^2\, ss_e}{SS_e} \sim \frac{ss_e}{\chi^2_{a(n-1),i}}$$

$$G_{\sigma_\tau^2,i} = \frac{(\sigma_\tau^2+\tilde{n}\sigma_e^2)ss_\tau}{SS_\tau} - \frac{\tilde{n}\sigma_e^2\, ss_e}{SS_e} \sim \frac{ss_\tau}{\chi^2_{(a-1),i}} - \tilde{n}\frac{ss_e}{\chi^2_{a(n-1),i}}$$

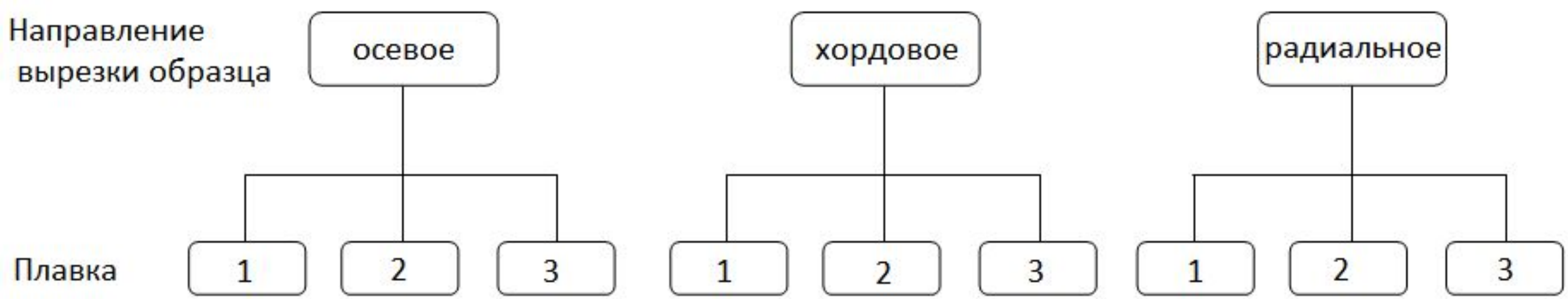
*Тогда*

$$L_{p,i} = G_{\mu,i} - z_p\sqrt{G_{\sigma_\tau^2,i} + G_{\sigma_e^2,i}}$$

$$= \bar{\bar{y}} - \frac{N(0,1)_i}{\sqrt{\chi^2_{(a-1),i}}}\sqrt{\frac{ss_\tau}{a}} - z_p\sqrt{\frac{ss_\tau}{\chi^2_{(a-1),i}} + (1-\tilde{n})\frac{ss_e}{\chi^2_{a(n-1),i}}}$$

При этом нижняя граница толерантного интервала представляет квантиль уровня $(1-\alpha)$ случайной величины $L_{p,i}$

# *Двухфакторный иерархический план*



# Модель со смешанными эффектами

$$Y_{ijk} = \mu_i + \beta_{j(i)} + e_{(ij)k}, \quad i = \overline{1,a} \quad j = \overline{1,b_i} \quad k = \overline{1,n_{ij}}$$

где

$\mu_i$ – среднее значение для кажого уровня фактора А

$\beta_{j(i)}$ – эффект $j$ – го уровня фактора В сгруппированного внутри $i$ – го уровня фактора А.

$e_{(ij)k}$ – случайое отклонение

# Основные характеристики двухфакторной дисперсионной модели для несбалансированного набора данных

| Источник изменчивости | Сумма квадратов | Степени свободы | Ожидаемый средний квадрат |
|---|---|---|---|
| Фактор | $ss_\beta = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}(\bar{y}_{ij.} - \frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{b_i}\bar{y}_{ij.})^2$ | $b. - a$ | $\sigma_\beta^2 + \lambda\sigma_e^2$ |
| Случайное отклонение | $ss_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk} - y_{ij.})^2$ | $n.. - b.$ | $\sigma_e^2$ |

$$\bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n_{ij}}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}$$

$$b. = \sum_{i=1}^{a} b_i\ , \qquad n_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\ , \qquad \lambda = \frac{1}{b.-a}\sum_{i=1}^{a}\frac{b_i-1}{b_i}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{1}{n_{ij}}$$

# Расчет нижней толерантной границы с помощью двухфакторной дисперсионной модели

Определим центральные величины для $\mu, \sigma_\beta^2, \sigma_e^2$ следующим образом:

$$G_{\mu,i} = \bar{y}_i - \frac{\frac{\sqrt{b}(W_i - \mu_i)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 + \lambda\sigma_e^2}}}{\sqrt{\frac{ss_\beta}{\sigma_\beta^2 + \lambda\sigma_e^2}}}\sqrt{\frac{ss_\beta}{b}} = \bar{y}_i - \frac{\sqrt{b}(W_i - \mu_i)}{\sqrt{SS_\beta}}\sqrt{\frac{ss_\beta}{b}} \sim \bar{y}_i - \frac{N(0,1)_i}{\sqrt{\chi^2_{(b.-a),i}}}\sqrt{\frac{ss_\beta}{b}}$$

$$G_{\sigma_e^2,i} = \frac{\sigma_e^2\, ss_e}{SS_e} \sim \frac{ss_e}{\chi^2_{(n..-b.),i}}$$

$$G_{\sigma_\beta^2,i} = \frac{\left(\sigma_\beta^2 + \lambda\sigma_e^2\right)ss_\beta}{SS_\beta} - \frac{\lambda\sigma_e^2\, ss_e}{SS_e} \sim \frac{ss_\beta}{\chi^2_{(b.-a),i}} - \frac{\lambda ss_e}{\chi^2_{(n..-b.),i}}$$

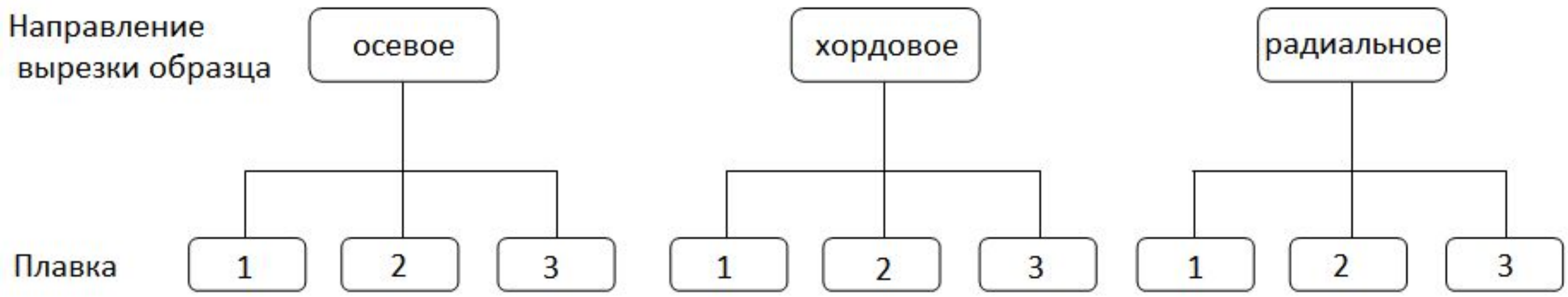
# Расчет нижней толерантной границы с помощью двухфакторной дисперсионной модели

$$L_{p,i} = G_{\mu,i} - z_p \sqrt{G_{\sigma_\beta^2,i} + G_{\sigma_e^2,i}}$$

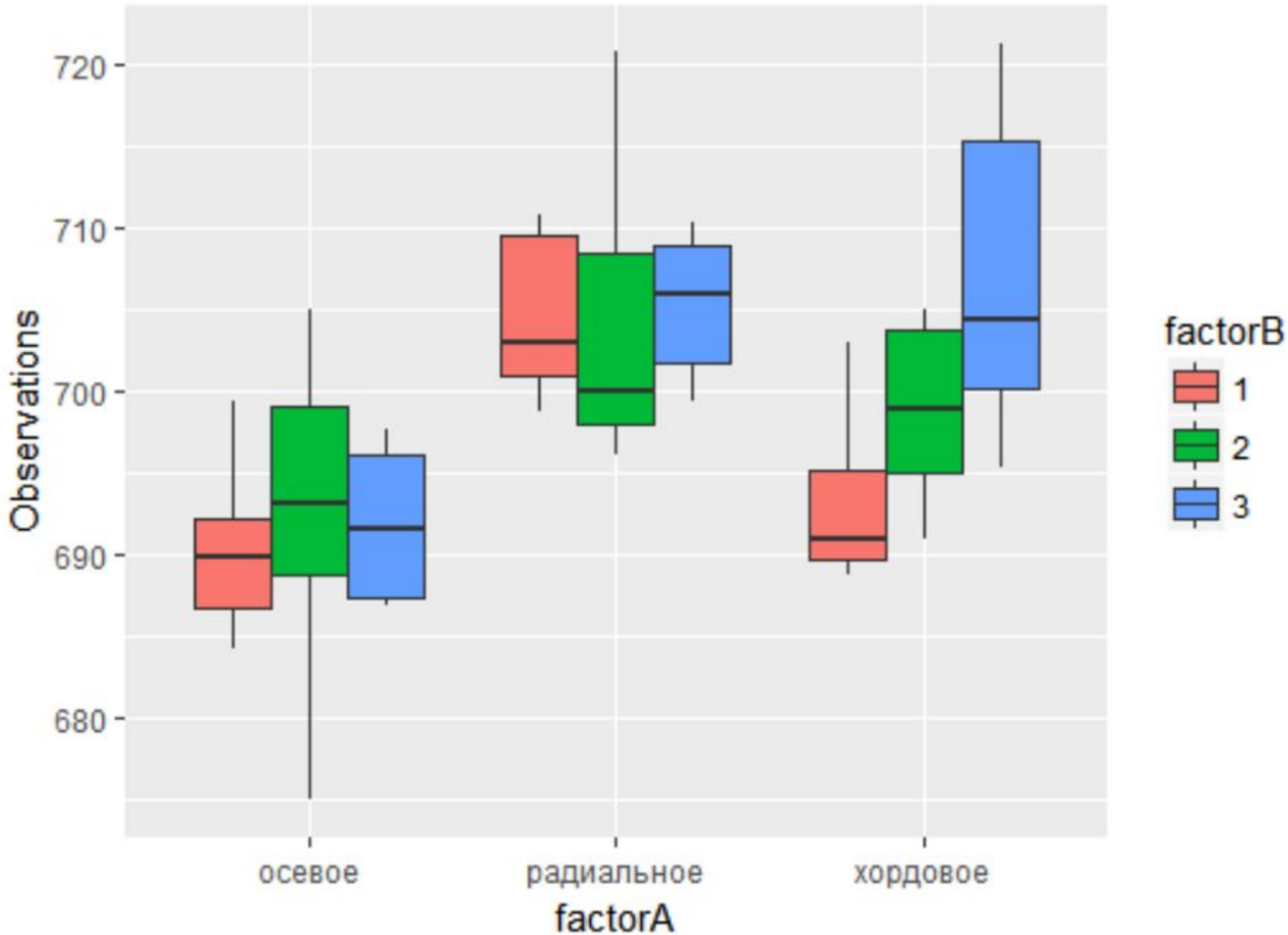
$$= \bar{y}_i - \frac{N(0,1)_i}{\sqrt{\chi^2_{(b.-a),i}}} \sqrt{\frac{ss_\beta}{b}} - z_p \left[ \frac{ss_\beta}{\chi^2_{(b.-a),i}} + (1-\lambda) \frac{ss_e}{\chi^2_{(n..-b.),i}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

При этом нижняя граница толерантного интервала представляет квантиль уровня $(1-\alpha)$ случайной величины $L_{p,i}$

# Двухфакторный иерархический план



# Графическое представление однородности данных



# Расчетные значения конструкционной прочности материала

<table>
<tr><th rowspan="2">Фактор А</th><th rowspan="2">Фактор В</th><th>Классический подход</th><th>Однофакторная дисперсионная модель</th><th>Двухфакторная дисперсионная модель</th><th rowspan="2">Дополнительная информация для уровней фактора А</th></tr>
<tr><th>$p = 0.90$</th><th>$p = 0.90$</th><th>$p = 0.90$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">осевое</td><td>1</td><td rowspan="3">679.621</td><td rowspan="3">678,916</td><td rowspan="3">678.330</td><td rowspan="3">Однородность: $pvalue = 0.71$<br>$Y-$ нормально распределена, $pvalue(SW) = 0.62$<br>Остатки модели распределены нормально: $pvalue(SW) = 0.46$</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">хордовое</td><td>1</td><td rowspan="3">686.194</td><td rowspan="3">641,065</td><td rowspan="3">683.620</td><td rowspan="3">Однородность: $pvalue = 0,0004$<br>$Y-$ нормально распределена, $pvalue(SW) = 0.43$<br>Остатки модели распределены нормально: $pvalue(SW) = 0.23$</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">радиальное</td><td>1</td><td rowspan="3">695.050</td><td rowspan="3">693.997</td><td rowspan="3">691.515</td><td rowspan="3">Однородность: $pvalue = 0,57$<br>$Y-$ нормально распределена, $pvalue(SW) = 0.21$<br>Остатки модели распределены нормально: $pvalue(SW) = 0.32$</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="6">Однородность по фактору А: $pvalue = 000000000,9$<br>Однородность по фактора В вложенному в уровень фактора А: $pvalue = 0.17$<br>$Y-$ нормально распределена, $pvalue(SW) = 0.54$<br>Остатки модели распределены нормально: $pvalue(SW) = 0.35$</td></tr>
</table>

# *Выводы*

- Была разработана методика расчета значений характеристик конструкционной прочности материала в условиях неоднородности данных

- Были реализованы алгоритмы расчета толерантных границ с помощью классического подхода и дисперсионных моделей в пакете R

# Список использованной литературы

1. K.Rrishnamoorthy, Thomas Mathew. «Statistical Tolerance Regions. Theory, Applications, and Computation». Wiley series in probability and statistics», 2009. - 484с.

2. ГОСТ Р ИСО16269-6-2005. Статистические методы. Статистическое представление данных. Определение статистических толерантных интервалов.- Введ. с 01.09.2005.- Москва: Стандартинформ, 2005.- 29 с.

3. Sahai, H., and Ojeda, M. M. (2005), Analysis of Variance for Random Models: Unbalanced Data, Boston: Birkhauser , 2000. - 765 c.

4. Mee. R. W. and Owen D. B. «Improved factors for one-side tolerance limits for balanced one-way ANOVA random model», Journal of the American Statistical Association, 1983. - 905 c.

5. Vangel M. G. «New methods for one-side tolerance limits for one-way balanced random-effects ANOVA model», Journal of the American Statistical Association, 1993. - 756 c.