Математика
Определители. Системы

Матрицы (основные определения)

- **<u>Определение.</u> Матрицей** размера **$m\times n$,** где m- число строк, **n**- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются
- **a_{ij} ,** где **i-** номер строки, **j-** номер столбца.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Замечание. Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определитель квадратной матрицы

- **<u>Определение.</u>** Если число столбцов матрицы равно числу строк **(m=n),** то матрица называется **квадратной порядка n.**
- Каждой квадратной матрице А может быть поставлено в соответствие некоторое число. Такое число называют **определителем** матрицы и обозначают символом **IAI** или
- **det A.** При этом **порядком** определителя называют порядок соответствующей матрицы
- <u>Замечание</u>
- Пусть **n=1**. Тогда **$A=(a_{11})$ и $|A|= a_{11}$** , т. е. определитель матрицы первого порядка равен ее единственному элементу.

Определитель 2-ого порядка

.

2) Пусть **n=2,** тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 5\cdot 4 = 6 - 20 = -14 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 5\cdot(-4) = 14$$

3) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$

Ответы(выбрать правильный вариант):

3) А. -5 В. 10 С. -14 4) А. -5 В. 10 С.20 5) А. 0 В. 10 С. -4

Определитель 3-его порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Правило вычисления определителя третьего порядка можно схематически изобразить так, дописав два первых столбца:

.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Вычисление определителей 3-его порядка

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$ =(1 1 2-1 1 1+1 2 1) – (1 1 1 + 1 1 1 + 2 2 (-1))=
- =(2 -1 +2) – (1+ 1 – 4) =3 – (-2) = 3 +2 = 5

- Пример: вычислить определители:
- 1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
-
-

Ответы

- 1) 19
- 2) 19
- 3) 0

Другой способ вычисления определителей 3-его порядка

- Определитель третьего порядка может быть вычислен с помощью определителей второго порядка по теореме о разложении определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Вычислить определитель двумя способами
- 1 способ. Используем правило Саррюса, дописав в определителе два первых столбца
- $|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix}$ **=** (1·2·1+ 1·3·(-1)+0·1·2)– (0·2·(-1)+1·3·2+1·1·1)=**-8**
- 2 способ. Используем разложение определителя по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

- = (2·1 – 3·2) -1 (1·1+3) +0= -4-4**=-8**

Свойства определителей

1) Определитель не изменится при замене строк столбцами (транспонировании).
2) При перестановки двух строк определитель меняет знак.
3) Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.
4) **Определитель равен нулю, если соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны (в частности равны).**
5) **Определитель равен нулю, если все элементы строки (столбца) равны нулю.**

Системы линейных алгебраических уравнений

Система **m** линейных уравнений с **n** неизвестными x_j .Числа a_{ij} **коэффициенты при неизвестных;** b_i **свободные члены.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$,то система называется **однородной,** в противном случае - **неоднородной**.

Если m=n, т.е. число уравнений равно числу неизвестных, то система называется **квадратной.**

Δ

Пример системы

- Дана система. Выписать ее коэффициенты.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

- Здесь m=3 n=3 (система квадратная) ;
- $a_{11} = 1$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 0$ $b_1 = -1$
  $a_{21} = 2$ $a_{22} = 3$ $a_{23} = 1$ $b_2 = 3$
  $a_{31} = 3$ $a_{32} = -1$ $a_{33} = -2$ $b_3 = 8$

Решение системы

Определение. Совокупность n чисел называется **решением** системы , если после замены $x_1, x_2, ..., x_n$ этими числами каждое из уравнений системы превращается в верное равенство.

Покажем, что линейная система может:

1) **не иметь решений**,
2) **иметь единственное решение**,
3) **иметь бесконечное множество решений.**

Примеры решения систем и их геометрическая интерпретация

1)Система $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=3. \end{cases}$ **решений не имеет,**

(прямые параллельны)

2) Система $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+7y=-3 \end{cases}$ **имеет единственное решение**

x=2 , y= -1

(прямые пересекаются)

3) Система $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2, \end{cases}$ **имеет бесконечно много решений**:

x=t , y=1-t, где t- любое число.

(одна и та же прямая)

Классификация систем по типу решений

- Определение. Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной.**
- Система, обладающая хотя бы одним решением, называется **совместной .**
- Если система имеет единственное решение, то она называется **совместной определенной.**
- Если система имеет бесчисленное множество решений, то она называется **совместной неопределенной.**

Методы решения систем

- Существует два основных метода решения систем.
- 1. **Метод Крамера**(метод определителей). Этот метод применим только для решения **квадратных систем**, у которых матрица коэффициентов при неизвестных **невырождена (ее определитель отличен от нуля)**.
- Такие системы имеют **единственное решение.**
- 2.**Метод Гаусса.** Этот метод является универсальным и может быть применим к **любым системам.**

Решение систем линейных уравнений

Пусть дана система 3-х уравнений с тремя неизвестными .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Составим из коэффициентов при неизвестных определитель третьего порядка и обозначим его символом Δ, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - главный определитель системы.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Если главный определитель системы **Δ≠0**, тогда система имеет единственное решение , которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$X_1=\Delta_1/\Delta \qquad X_2=\Delta_2/\Delta \qquad X_3=\Delta_3/\Delta\ ,$$

где Δ_i (**i=1,2,3**) – определитель, полученный из главного, заменой **i** столбца столбцом свободных членов, т.е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Замечание: после нахождения решения необходимо сделать проверку.

Алгоритм метода Крамера

- 1) Вычисляем главный определитель системы **Δ** и проверяем, что он отличен от нуля.
- 2) Вычисляем **Δ_1, Δ_2, Δ_3**.
- 3) Вычисляем **x_1, x_2, x_3.**
- 4) Делаем проверку.
- 5) Пишем ответ.
- <u>Замечание</u>. Рассмотренный метод можно применять для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.
- При этом в пункте 2) находят только **Δ_1 и Δ_2**

Пример №1 контрольной работы

- Найти точку пересечения прямых и построить прямые ,заданные уравнениями
- **x-3y+2=0 и 3x+y-3=0**
- Решение. Для нахождения точки пересечения непараллельных прямых следует решить систему двух уравнений с двумя неизвестными **x** и **y**

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

Решение примера №1 контрольной работы

- Для решения системы используем формулы Крамера
- **x=Δ_1/Δ y=Δ_2/Δ,** где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-(-3)*3 = 1+9 = 10$
-

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2+9 = 7 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3+6 = 9$$

- x = 0,7 y=0,9 . Проверим полученный результат подстановкой в систему: 0,7-3 0,9=-2 (верно) 3 0,7+0,9=3 (верно).
- **Ответ:x=0,7y=0,9–координаты точки пересечения прямых.**

Пример 2 контрольной работы

- Решить систему с проверкой

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Пример 2 (продолжение)

1) Вычислим главный определитель системы

- $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} = (1\cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1) - (3 \cdot 3 \cdot 3 +1 \cdot 1 \cdot 1+2 \cdot 2 \cdot (-2)) =$$
- $= (-6+6+6) – (27+1-8)=6-20=-14 \neq 0$
- следовательно , метод Крамера применим, т.е.
- далее считаем Δ_1 Δ_2 Δ_3

Δ

Пример (продолжение)

2) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -28$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 14$

3) Подставляем в формулы Крамера Δ, Δ_1 , Δ_2 , Δ_3

$\Delta = -14$ $\Delta_1 = -28$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 14$

$x_1 = (-28)/(-14)$, $x_2 = 0/(-14)$, $x_3 = 14/(-14)$ или

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Пример 2 (проверка)

4) Проверка: подставляем полученные значения переменных в левую часть исходной системы (x_1 =2, x_2 =0, x_3 =-1) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -1(\textit{верно}) \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + (-1) = 3(\textit{верно}) \\ 3\cdot 2 + 0 - 2\cdot(-1) = 8(\textit{верно}) \end{cases}$$

5) Ответ: **x_1 =2, x_2 =0, x_3 =-1.**