В.Б. Тарасов

МГТУ им. Н.Э.Баумана,

Кафедра «Компьютерные системы автоматизации производства»

e-mail: tarasov@rk9.bmstu.ru

ЛЕКЦИЯ 4. СИСТЕМЫ МОДАЛЬНОСТЕЙ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕРЫ В ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ

ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА АГЕНТА: ЕДИНСТВО ОПИСАНИЙ И ПРЕДПИСАНИЙ

Функционирование любого агента опирается как на *описания*, так и на *предписания*. Описания содержат информацию о состояниях среды, воспринимаемых агентом, а предписания – о возможных действиях агента на эту среду.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ: ИНФОРМАЦИОННАЯ ЕДИНИЦА

***p* = *X* is *A*, *T*(*p*)**

ОПИСАНИЕ

Дескриптивная модель: **«как есть»**

***q* = *X* does *A*, *M*(*p*)**

ПРЕДПИСАНИЕ

Нормативная модель: **«как должно быть»**

Истинность (ОПИСАНИЕ)

ОБЪЕКТ → **ВЫСКАЗЫВАНИЕ**

ОБЪЕКТ ← **ВЫСКАЗЫВАНИЕ**

Полезность (ПРЕ ДПИСАНИЕ)

Истинность: соответствие между **объектом** и его **описанием** (**первичен объект**)

Полезность: соответствие между **предписанием** и его **объектом** (**первично предписание**)

СИСТЕМЫ МОДАЛЬНОСТЕЙ:
ЕДИНЫЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ СИСТЕМ МОДАЛЬНОСТЕЙ НА БАЗЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИК

ВИДЫ МОДАЛЬНОСТЕЙ	Сильная положительная SPM	Слабая положительная WPM	Слабая отрицательная WNM	Сильная отрицательная SNM
Алетические: онтологии	Необходимость N	Возможность M	Случайность Q	Невозможность Y
Доксастические: мнения	**Уверенность** BEL	**Предположение** HYP	**Сомнение** DBT	**Отвержение** DEN
Эпистемические: знания	Верификация	Подтверждение	Неразреши-мость	Фальсификация
Деонтические: нормы	Обязанность O	Разрешение P	Безразличие Б	Запрещение З
Эротетические: вопросы	Корректность C	Амбивалент-ность A	Нерелевант-ность IR	Некорректность NC

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ НОРМЫ

Нормы – это социальные запреты и ограничения, накладываемые сообществом (организацией) на отдельного агента.

С одной стороны, нормы есть частный случай оценок: их можно рассматривать как общественно апробированные и закрепленные оценки.

Средством, превращающим оценку в норму, является угроза наказания, т.е. стандартизация норм осуществляется с помощью санкций.

Еще К.Менгер установил прямую связь между предписанием и санкцией: •*p* («обязательно *p*») и «если не *p*, то наказание или ухудшение».

С другой стороны, формирование норм предполагает согласование мнений по этим нормам

РОЛЬ ОБРАЗЦОВ, ОЦЕНОК, НОРМ В ТЕОРИИ АГЕНТОВ

У агентов прагматические суждения оценочного характера опираются на стандарты, образцы, эталоны и т.п.

При этом образец принципиально отличается от примера. *Пример* говорит о том, что имеет место в действительности, а *образец* – о том, что должно быть.

Примеры используются для поддержки описательных высказываний, а ссылки на образцы служат обоснованием предписаний и требований.

Легко понять, что в теории агентов центральное место занимает именно формализация предписаний, оценок, норм.

Реализация агентом нормативного поведения предполагает наличие, по крайней мере, двух элементов:

нормы, обязательной для выполнения в данной ситуации, и

оценки степени выполнения ее предписаний.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ НОРМЫ

Норму как предписание к действию можно выразить четверкой

$$NR = \langle A,\ act,\ \mathrm{M}_4,\ W \rangle,$$

где *A* – множество агентов, которым адресована норма;

act∈*ACT* – действие, являющееся объектом нормативной регуляции (содержание нормы);

W – множество миров, в которых применима норма (условия приложения, обстоятельства, в которых должно или не должно выполняться действие);

M_4 = {О, Р, Б, З} – множество базовых модальностей, связанных с действием *act*: здесь О – «обязательно», Р – «разрешено», Б – «безразлично» (необязательно), З – «запрещено».

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ

Основными характеристиками любого множества являются его границы и мера.

Понятие *меры* есть одно из важнейших математических понятий, как, впрочем, и понятие интеграла, соответствующего данной мере. Оно является естественным обобщением понятия длины отрезка, площади плоской фигуры, объема пространственной фигуры. Классические меры удовлетворяют условию **аддитивности**.

Пусть A и B– некоторые события, а X – полное множество событий.

Мерой **называется функция множества**

$$\boldsymbol{m}: 2^X \to R^+, \qquad R^+=[0,\infty),$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall A \in 2^X,\ A \subseteq X \Rightarrow m(A) \geq 0$;

2) $m(\varnothing) = 0$;

3) $\forall\ A, B \in 2^X,\ m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МЕРА И МЕРА ДИРАКА

Наиболее известным случаем классической меры является *нормальная мера* или *вероятностная мера* А.Н.Колмогорова

$$P: 2^X \to [0,1],$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$ (ограниченность)

2) $\forall A,B \in 2^X$, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ (монотонность)

3) $\forall A,B \in 2^X$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (аддитивность)

Академик Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987)

В общем случае, берется σ-алгебра множеств, $\sigma \subseteq 2^X$ и аксиома аддитивности записывается в форме $\forall A_i \in \sigma$, $\cap A_i = \varnothing \Rightarrow P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$.

С вероятностной мерой связана статистика средних значений.

Пусть x_0 есть заданный элемент в X. Частным случаем вероятностной меры является примитивный класс мер Дирака m_D, определяемый соотношением: $\forall A \in 2^X$,

$$m_D(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_0 \in A \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Мера Дирака есть частный случай вероятностной меры, соответствующий детерминированной сингулярной информации (мера полной уверенности).

КРИТИКА АКСИОМЫ АДДИТИВНОСТИ

Требование аддитивности меры является слишком жестким и ограничительным для многих практических задач информатики, в частности, для процедур экспертного оценивания и формирования мнений.

Существует гипотеза о том, что неаддитивность есть одно из фундаментальных отличий процедур оценивания от процедур измерения.

Тогда в качестве базы для оценивания предлагается пространство с *предмерой* **Г= (*X*, σ, *u*)**, где *предмера u* удовлетворяет лишь условиям ограниченности и монотонности

Таким образом, произвольная ***псевдомера***, называемая также ***неклассической (неаддитивной) мерой***, строится как однопараметрическое расширение обычной меры путем замены стандартной аксиомы аддитивности каким-либо более общим условием.

МЕРЫ СУГЕНО

Мерой Сугено называется функция множества

$$g: 2^X \to [0,1],$$

для которой выполняются следующие условия

1) $g(\varnothing) = 0$, $g(X) = 1$ (ограниченность)

2) $\forall A,B \in 2^X$, $A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$ (монотонность)

3°) $\forall A,B \in 2^X$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow g(A \cup B) = g(A)+g(B) + \lambda g(A)+g(B)$ (λ-правило) $-1 \leq \lambda < \infty$.

4) $\forall A_n \in 2^X$, n=1,2,… если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, или $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$ (непрерывность)

В общем случае λ-правило записывается в виде

$g_\lambda(\cup A_i) = \boldsymbol{\Sigma}\, g(A_i) + \lambda\, \boldsymbol{\Pi}\, g(A_i)$, $-1 \leq \lambda < \infty$.

Это правило получается из уравнения $\lambda+1 = \boldsymbol{\Pi}(1+\lambda_i)$.

В результате при $\lambda>0$ получаем семейство субаддитивных мер:

$\forall A, B \in 2^X$, $g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$,

а при $-1 \leq \lambda < 0$ – семейство супераддитивных (синергетических) мер

$\forall A, B \in 2^X$, $g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$.

При $\lambda=0$ мера Сугено превращается в обычную аддитивную (вероятностную) меру.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВИДЕТЕЛЬСТВ: МЕРЫ ДОВЕРИЯ И ПРАВДОПОДОБИЯ

Одними из первых ученых, предложивших применять неклассические меры (псевдомеры) в интересах описания экспертных суждений (свидетельств), стали А.Демпстер и Дж. Шейфер.
Так Демпстер ввел функции верхних и нижних вероятностей, индуцируемых многозначными отображениями.
В свою очередь, Шейфер построил теорию свидетельств на основе двух классов монотонных неаддитивных мер – мер доверия и мер правдоподобия.
Мерой доверия называется монотонная функция множества

$$b: 2^X \to [0,1],$$

удовлетворяющая следующим условиям:
(а) $b(\varnothing) = 0$, $b(X) = 1$
(б) $\forall A,B \in 2^X$, $b(A \cup B) \geq b(A) + b(B)$.
Здесь условие (б) определяет свойство *супераддитивности*.

Пусть A′ есть дополнение A. Из определения меры доверия вытекает ее важное свойство $b(A) + b(A') \leq 1$ (субкомплементарность).

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВИДЕТЕЛЬСТВ: МЕРЫ ДОВЕРИЯ И ПРАВДОПОДОБИЯ (продолжение)

Если задана мера доверия, то двойственную к ней меру правдоподобия можно определить следующим образом

$$Pl\ (A) = 1 - b\ (A),\quad \forall A \in 2^X$$

Монотонная мера правдоподобия Pl удовлетворяет следующим аксиомам:

(а) $Pl\ (\varnothing) = 0$, $Pl\ (X) = 1$

(б′) $\forall A,B \in 2^X$, $Pl\ (A \cup B) \leq Pl\ (A) + Pl\ (B)$.

Аксиома (б′) определяет условие *субаддитивности*.

Для меры Pl выполняется также условие *суперкомплементарности*

$$Pl\ (A) + Pl\ (A') \geq 1.$$

Пусть $\wp$ - множество высказываний. Введем функцию m_p: $\wp \rightarrow [0,1]$, причем:

1) $m_p(\varnothing) = 0$; 2) $\sum_{p \in \wp} m_p(p) = 1$.

Тогда для любых высказываний p,q$\in\wp$ по Шейферу получаем

$$v(q) = b(q) = \sum_{p \text{ влечет за собой } q} m_p(p).$$

Аналогично имеем
$$Pl\ (q) = \sum_{p \text{ не влечет за собой } \rceil q} m_p(p)$$

Легко определить также меру недоверия $nb\ (A) = 1 - b\ (A)$ и меру отвержения (неправдоподобности) $nPl\ (A) = 1 - pl\ (A)$.

МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ

Из аксиомы монотонности для любой предмеры непосредственно вытекают два важных неравенства, характеризующие два фундаментальных класса псевдомер

- $g\,(A \cup B) \geq \max\{g\,(A),\ g\,(B)\}$
- $g\,(A \cap B) \leq \min\{g\,(A),\ g\,(B)\}$.

Тогда в граничных случаях определяются мера возможности *П* Л.Заде как минимальная мера правдоподобия и мера необходимости *N* Дюбуа-Прада как максимальная мера доверия.

Мера возможности есть функция множества

$$П\colon 2^X \to [0,1],$$

для которой справедливы условия:

1. $П\,(\varnothing) = 0,\ П\,(X) = 1$ (ограниченность)
2. $\forall\ A, B \in 2X,\ A \subseteq B \Rightarrow П\,(A) \leq П\,(B)$ (монотонность)
3. $\forall A, B \in 2X,\ П\,(A \cup B) = \max\{П\,(A),\ П\,(B)\}$ («либо-либо»-условие)

Меру *П* можно задать на множестве высказываний $\wp$. Пусть $p,q \in \wp$.
Тогда условие $П(p \vee q) = \max\{П(p), П(q)\}$ можно интерпретировать следующим образом: истинность дизъюнкции двух суждений определяется возможностью появления хотя бы одного из них.

В свою очередь, **нечеткое множество** может пониматься как функция (плотность) распределения возможности

$$\pi\colon X \to [0,1]$$

удовлетворяющая условию нормировки $П\,(A) = \sup_{x \in A} \pi\,(x) = 1$.

МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ (продолжение)

Мера необходимости есть функция множества

$$N: 2^X \to [0,1],$$

для которой выполняются требования:

1. $N(\varnothing) = 0$, $N(X) = 1$ (ограниченность)
2. $\forall\, A, B \in 2X$, $A \subseteq B \Rightarrow N(A) \le N(B)$ (монотонность)

3*. $\forall\, A, B \in 2X$, $N(A \cap B) = \min\{N(A), N(B)\}$ («и-и» условие).

Если определить меру N на множестве высказываний $\wp$, то условие $N(p \wedge q) = \min\{N(p), N(q)\}$ означает, что истинность конъюнкции двух суждений определяется необходимостью их одновременного выполнения.

Для мер необходимости и возможности справедливо равенство

$$N(A) = 1 - \Pi(A'),\ \forall A \in 2X$$

Это условие можно записать и в более общей форме

$$N(A) = n(\Pi(A')),$$

где n – некоторая функция отрицания.

Меру необходимости также можно определить по функции распределения возможности

$$N(A) = \inf_{x \notin A} (1 - \pi(x))$$

МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ В НЕТРАДИЦИОННЫХ СЕМАНТИКАХ

Модализация истинностных значений (в стиле Н.Решера) на основе квазимер (неаддитивных мер) - **мер возможности Заде П** и **мер необходимости Дюбуа-Прада N**, приводящая к нарушению принципа дополнительности, связана с формированием

ВОЗМОЖНОСТНЫХ СЕМАНТИК

$$2 \geq T(p) + F(p) \geq 1$$

и

НЕОБХОДИМОСТНЫХ СЕМАНТИК

$$T(p) + F(p) \leq 1.$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТЬЮ, ВОЗМОЖНОСТЬЮ И НЕОБХОДИМОСТЬЮ

Основное соотношение между возможностью и необходимостью записывается в виде:

$$\boldsymbol{\Pi(A) \geq P(A) \geq N(A)}$$

В отличие от выполняемого для вероятностной меры закона $P(A)+P(A') = 1$, $\forall A \in 2^X$, для меры возможности имеем условие

$$\boldsymbol{\Pi(A) + \Pi(A') \geq 1, \ \forall A \in 2^X,}$$

а для меры необходимости выпоняется

$$\boldsymbol{N(A) + N(A') \leq 1, \ \forall A \in 2^X}$$

Кроме того, из $\Pi(A) < 1$ следует $N(A) = 0$ (неполная возможность события A приводит к абсолютной неуверенности), а из $N(A)>0$ вытекает $\Pi(A)=1$ (наличие некоторой уверенности в A означает его абсолютную возможность).

В свою очередь, такие понятия как невозможность $n\Pi$ и проблематичность (ненеобходимость, случайность) nN легко описать с помощью обычного оператора отрицания на основе мер возможности и необходимости соответственно:

$$n\Pi(A) = 1 - \Pi(A), \ \forall A \in 2^X$$

$$nN(A) = 1 - N(A), \ \forall A \in 2^X$$

КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕЧЕТКОСТИ

Идея построения сравнительных оценок возможности восходит к работам Д.Льюиса, который интерпретировал возможность как отношение сходства. Затем Дюбуа и Прад показали, что мера возможности индуцирует отношение $\geq_{\Pi}$ между событиями: $\boldsymbol{A \geq_{\Pi} B}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\Pi(A) \geq \Pi(B)}$.

Здесь $A \geq_{\Pi} B$ означает, что возможность события A, по крайней мере, не меньше возможности события B.

Отношение $\geq_{\Pi}$ обладает следующими свойствами:

а) $T \geq_{\Pi} F$, где T и F – истина и ложь соответственно;

б) $A \geq_{\Pi} B$ или $A \leq_{\Pi} B$ (сравнимость);

в) $A \geq_{\Pi} B$, $B \geq_{\Pi} C \Rightarrow A \geq_{\Pi} C$ (транзитивность);

г) если $B \geq_{\Pi} C$, то для любого A имеем $A \cup B \geq_{\Pi} A \cup C$.

В свою очередь, Трильяс и Альсина обобщили идею сравнительных оценок для произвольных неклассических мер, введя (рефлексивное и транзитивное) отношение предпорядка $\geq_g$. Здесь $A \geq_g B$ означает, что множество A обладает неким свойством в степени, не меньшей, чем множество B.

Отношение предпорядка по включению множеств позволяет с единых позиций описать не только расширения классических мер, определенные на 2^X, но и функции нечетких множеств, заданные на $[0,1]^X$.

МЕРЫ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ

Различные меры на нечетких множеств можно определить, вводя разные отношения порядка (или предпорядка) на интервале [0,1].
Здесь классическое отношение порядка (порядок вложенности нечетких множеств) задается в виде:

$$\mu \le \nu \Leftrightarrow \mu(x) \le \nu(x),\ \forall x \in X.$$

Рассмотрим максимально нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu(x) = 0.5$. Тогда новое отношение порядка $\le'$, называемое «порядком заострения», можно задать следующим образом:

$$\mu \le' \nu \Leftrightarrow \mu(x) \le' \nu(x),\ \forall x \in X,$$

где $\mu(x) \le' \nu(x)$ тогда и только тогда, когда $\mu(x) \le \nu(x)$ при $\mu(x) \le 0.5$ и $\mu(x) \ge \nu(x)$ при $\mu(x) \ge 0.5$.
Отношениям порядка $\le$ и $\le''$ ставятся в соответствие два класса мер – меры энергии и меры энтропии нечетких множеств соответственно.
Пусть высказывание $p \in \wp$. Как известно, противоречие в классической логике записывается в форме $p \wedge \rceil p$. В обобщенном виде его можно выразить формулой $pTn(p)$, где T-треугольная норма, отвечающая лингвистической связке «И», а n – унарная операция отрицания в функционально-аксиоматической форме.
Введем отношение предпорядка, индицируемое отрицанием n, т.е. рефлексивное и транзитивное отношение $\le_n$ на [0,1]

$$p \le_n q \Leftrightarrow p\, T\, n(p) \le q\, T\, n(q)$$

и будем рассматривать предупорядоченное множество $[0,1]_n$.
Для наибольшей треугольной нормы $T = \min$ имеем $p \le_n q \Leftrightarrow \min\{p, n(p)\} \le \min\{q, n(q)\}$.

МЕРЫ ЭНЕРГИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ (ПОКАЗАТЕЛИ СИЛЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Пусть X – базовое множество, на котором определено нечеткое множество μ: $X \to [0,1]$, а $[0,1]^X = \{\mu \mid \mu: X \to [0,1]\}$ – множество всех нечетких подмножеств.

Обозначим через R^+ множество всех неотрицательных действительных чисел R^+.

Мерой энергии нечеткого множества называется функция

$$\mathbf{e: [0,1]^X \to R^+},$$

удовлетворяющая следующим аксиомам:

e1) $e(\mu)=0$ тогда и только тогда, когда $\mu(x)=0$ для всех x из X;

e2) $e(\mu)$ принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu(x)=1$ для всех x из X;

e3) $\forall \mu, v \in [0,1]X$, $\mu(x) \le v(x) \Rightarrow e(\mu) \le e(v)$.

Примеры. 1. Мощность нечеткого множества μ $P(\mu) = \sum_i \mu(x_i)$

2. Информационная энергия нечеткого множества μ $IE(\mu) = \sum_i w_i \mu(x_i)$

МЕРЫ ЭНТРОПИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть X – базовое множество, на котором определено нечеткое множество $\mu: X \rightarrow [0,1]$, а $[0,1]X=\{\mu \mid \mu:X\rightarrow[0,1]\}$ – множество нечетких подмножеств.

Мера энтропии определяется в виде функции

$$h: [0,1]^X \rightarrow R^+,$$

удовлетворяющей следующим условиям:

h1) $h(\mu) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(x)=f(x)\in\{0,1\}$, т.е. когда f–классическая характеристическая функция множества;

h2) $h(\mu) = h_{max}$ тогда и только тогда, когда $\mu(x) = 0.5$ для всех $x\in X$;

h3) $\forall \mu,v\in[0,1]X$, $\mu(x) \leq' v(x) \Rightarrow h(\mu)\leq' h(v)$.

Примеры. 1. $h_0(\mu) = \sum_i \mu(x_i)\,(1- \mu(x_i))$. 2. $h_{SH}(\mu) = \sum_i [\mu(x_i) \ln \mu(x_i) +(1- \mu(x_i)) \ln (1-\mu(x_i))]$

Известны и другие определения энтропии, в частности,

А) Энтропии по А.Кофману, как нормализованного расстояния до предельно нечеткого распределения $\mu(x)=0.5$, $\forall x\in X$;

В) Энтропии как расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

Согласно И.З.Батыршину, мера энтропии на алгебре может пониматься как мера ее небулевости.

В общем случае энтропию можно определить через отношение предпорядка $\leq_n$ как функцию

$$h(\mu) = k \mathop{\mathbf{S}}_{x\in X} \{T(\mu(x), n(\mu(x))\},$$

где T и S – треугольная норма и конорма соответственно, n – операция отрицания, а k – константа (коэффициент нормализации).

МЕРЫ СПЕЦИФИЧНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Меры специфичности (неспецифичности) нечетких множеств тесно связаны с понятием гранулярности и показывают степень точности задания нечеткого множества

Пусть X – базовое множество, а $[0,1]^X = \{\mu \mid \mu: X \to [0,1]\}$ – множество всех нечетких подмножеств, определенных на X.

Мера специфичности по Р.Ягеру [15] есть нормализованная функция нечеткого множества .

$$sp: [0,1]^X \to [0,1],$$

такая что

sp1) $sp(\mu) = 1$ тогда и только тогда, когда μ есть одноточечное множество, $\mu = \{x\mathrm{i}\}$;

sp2) $sp(\mu) = 0$, если μ – пустое множество;

sp3) $\forall \mu, \nu \in [0,1]^X$, $\mu(x) \le \nu(x) \Rightarrow sp(\mu) \le sp(\nu)$.

ФОРМИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГИКО-ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ СВЯЗОК: ФУНКЦИОНАЛЬНО-АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В современной теории нечетких множеств логико-лингвистические связки «И» и **«ИЛИ»** определяются в виде **треугольных норм** и **конорм**, т.е. двухместных действительных функций, задаваемых на интервале [0,1].

Треугольные нормы и конормы были введены в 1951 г. **К.Менгером** (Menger,1951] в области стохастической геометрии, а именно с целью расширения неравенства треугольника в определении метрического пространства на случай вероятностных метрических пространств.

Они были подробно изучены Б.Швейцером и А.Скларом (см. [Schweizer and Sklar,1960,1963 и1983]).

ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И КОНОРМЫ В ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В теорию нечетких множеств **треугольные нормы** и **конормы** ввели **К.Альсина, Э.Трильяс и Л.Вальверде** (см. [Alsina et al., 1980 и 1983; Трильяс и др., 1986] в интересах развития концепции **плюрализма операций** над нечеткими множествами и построения единого **функционально-аксиоматического подхода** к определению операций **пересечения и объединения нечетких множеств.**

Треугольные нормы и конормы были подробно исследованы и использованы с целью **упорядочения по силе** различных видов **пересечения** и **объединения** нечетких множеств, а также в рамках построения **новых обобщенных параметризованных нечетких операторов** (семейства операторов Гамахера, Сугено,Ягера, Домби, Франка и др.). Появились меры неопределенности на базе треугольных норм и конорм, меры противоречивости и пр.

См. работы [Dubois and Prade, 1980 и 1982; Klement, 1982; Weber, 1983; Yager, 1980].

Понятие треугольных полунорм и полуконорм предложили Suarez Garcia и Gil Alvarez [Suarez Garcia и Gil Alvarez, 1986].

Обобщение исходных понятий треугольных норм и конорм на случай ограниченных упорядоченных множеств предложено в работе [De Cooman and Kerre, 1994].

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПОЛУНОРМЫ И ПОЛУКОНОРМЫ

Пусть ***L*** – решетка с наименьшим элементом ***0*** и наибольшим элементом ***1***.

Бинарная операция

T*: *L* × *L* → *L ***S*: *L* × *L* → *L*,**

называется

треугольной полунормой, **треугольной полуконормой,**

если удовлетворяются следующие условия:

- ***ограниченность***

1) ***T*(0, 0) =0, *T*(x, 1) = *T*(1, x) = x,** **1') S (1, 1) = 1, S(x, 0) = S(0, x) = x,**
∀ x ∈L;

- ***монотонность***

2) x≤ u, y≤ v ⇒ *T*(x,y) ≤ *T* (u,v), **2') x ≤ u, y ≤ v ⇒ S(x, y) ≤ S (u, v),**
∀ *x*, *y*, *u*, *v* ∈*L*.

ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И КОНОРМЫ

Бинарная операция

$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

называется

треугольной нормой, **треугольной конормой,**

если удовлетворяются следующие условия:

- ***ограниченность***

1) $T(0, 0) = 0$, $T(x, 1) = T(1, x) = x$, 1') $S(1, 1) = 1$, $S(x, 0) = S(0, x) = x$,

$\forall x \in [0,1]$;

- ***монотонность***

2) $x \leq u$, $y \leq v \Rightarrow T(x,y) \leq T(u,v)$, 2') $x \leq u$, $y \leq v \Rightarrow S(x, y) \leq S(u, v)$,

$\forall x, y, u, v \in [0,1]$;

- ***коммутативность***

3) $T(x, y) = T(y, x)$, 3') $S(x, y) = S(y, x)$,

$\forall x, y \in [0,1]$;

- ***ассоциативность***

4) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$, 4') $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$,

$\forall x, y, z \in [0,1]$

ПРИМЕРЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ НОРМ И КОНОРМ

Треугольные нормы *T*	**Треугольные конормы *S***
Каноническая (максимальная) треугольная норма $T_0\,(x,y) = \min\{x,y\},\ \forall x,y \in L$	Каноническая (минимальная) треугольная конорма $S_0\,(x,y) = \max\{x,y\},\ \forall x,y \in L$
Вероятностная треугольная норма $T_{pr}(x,y) = x\,y, \},\ \forall x,y \in L$	Вероятностная треугольная конорма $S_{pr}\,(x,y) = x + y - x\,y, \},\ \forall x,y \in L$
Треугольная норма Лукасевича (ограниченное произведение) $T_b\,(x,y) = \max\{0, x+y-1\},\ \forall x,y \in L$	Треугольная конорма Лукасевича (ограниченная сумма) $S_b\,(x,y) = \min\{1, x+y\},\ \forall x,y \in L$

ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И ОТРИЦАНИЯ

Примеры. **1. Семейство треугольных норм Гамахера T_H**

$T_H(x,y) = x\,y \,/\, [\gamma + (1 - \gamma)(x+y - xy)]$, $0 \le \gamma < \infty$

При $\gamma=1$ имеем $T_p(x,y)$.

2. Семейство треугольных норм Сугено T_S

$T_S(x,y) = \max\,[0,\, x + y - 1 - \lambda(1-x)\,(1 - y)]$, $-1 \le \lambda < \infty$

При $\lambda=0$ имеем $T_b(x,y)$.

3. Семейство треугольных норм Ягера T_Y

$T_Y(x,y) = 1 - \min\,[1,\, (1 - x)^q + (1 - y)^q]^{1/q}$, $0 \le q < \infty$

При $q \to \infty$ имеем $T_Z(x,y)$

УНИНОРМЫ

Унинормы в интервале [0,1] были предложены **Р.Ягером и В.Рыбаловым** [Yager and Rybalov, 1996] и исследованы в работах Я.Фодора,С.-К.Ху и З.-Ф.Ли, М.Маэс. **Структура унинорм** подробно описана в [Fodor et al., 1997; Yager, 2001].

В общем случае **нейтральный элемент e** может отличаться от нуля или единицы. При **e = 0 унинорма** превращается в **t-норму,** а при **e =1** она становится t-конормой.

Унинормы ведут себя **поочередно** как **операции конъюнкции** и **дизъюнкции** в различных зонах области $[0, 1]^2$. Для n–арной операции берется область $[0, 1]^n$ или даже произвольный **гиперкуб** $[a,b]^n$**.** Тогда многие операции, применяемые в экспертных системах, оказываются унинормами (в частности, операции, использованные в системах MYCIN и PROSPECTOR, являются унинормами, например $x \oplus y = xy / [xy + (1-x)(1-y)]$.

Важный класс унинорм, называемый представимыми унинормами, обладает аддитивными генераторами: $g: [0,1] \rightarrow [-\infty,+\infty]$, $g(e) = 0$, $g(0) = -\infty$, $g(1) = +\infty$.
При этом унинорма определяется выражением
$f(x, y) = g^{-1}(g(x)+g(y))$

УНИНОРМЫ

Обобщения t-норм и t-конорм – унинормы U.

Пусть L – решетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1.

Бинарная операция

$$U: L \times L \to L$$

называется унинормой, если выполняются следующие условия:

- ***наличие нейтрального элемента***
  $e \in L$, такого, что $U(x, e) = U(e, x) = x, \ \forall x \in L;$
- ***монотонность***
  $x \le u, y \le v \Rightarrow U(x,y) \le U(u,v), \ \forall x, y, u, v \in L;$
- ***коммутативность***
  $U(x, y) = U(y, x), \ \forall x, y \in L;$
- ***ассоциативность***
  $U(U(x, y), z) = U(x, U(y, z)), \ \forall x, y, z \in L.$