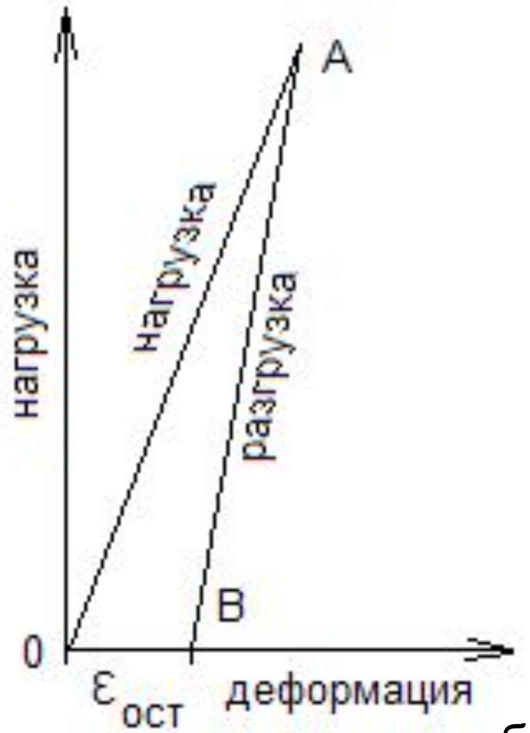
Реологические модели

Реология изучает поведение деформируемых тел во времени.

Для реальных твердых тел закон Гука выполняется лишь приближенно.

Реологическое уравнение твердовязкого тела (тела Кельвина-Фохта). Характерным является наличие зависимости деформации от времени, т.е. проявление вязкостных свойств твердых тел.



а)

б)

Это явление носит название упругого гистерезиса (а). Но с течением времени исчезает остаточная деформация и твердое тело восстанавливает свои размеры. Это явление называют упругим последствием.

При наличии упругого гистерезиса и упругого последствия реологическую модель твердого тела представляют как комбинацию идеально упругого и вязкого тел. Для вязкого тела справедлив закон внутреннего трения Ньютона:

$$\tau = \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

где η – коэффициент вязкости;

t – время;

γ – деформация.

При параллельном деформировании двух тел получается выражение:

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

(1) - реологическое уравнение твердовязкого тела (тела Кельвина-Фохта).

Решение этого уравнения, при приложенном напряжении τ_0 в момент времени t=0 имеет вид:

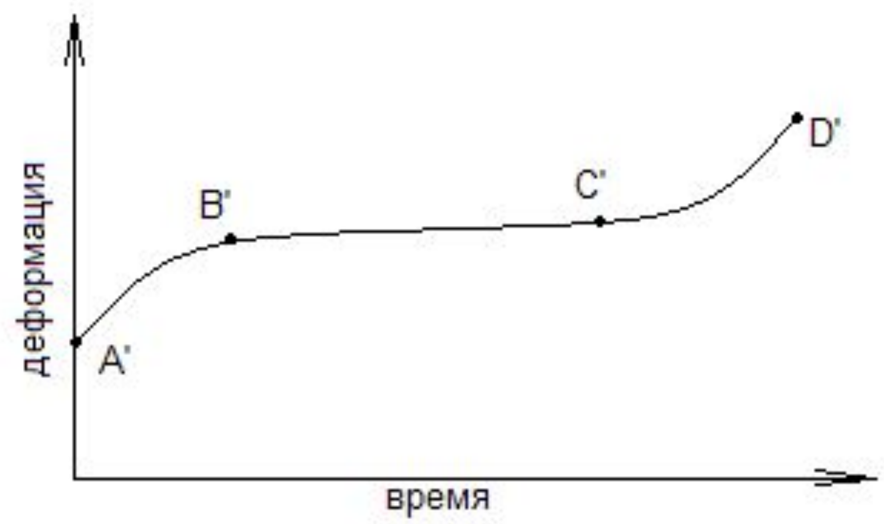
$$\gamma = \frac{\tau_0}{G}[1 - \exp(-\frac{Gt}{\eta})] = \gamma_0[1 - \exp(-\frac{-Gt}{\eta})]$$

2) Реологическое уравнение упруговязкого тела Максвелла.

Рассматривается случай, когда происходит релаксация напряжений и ползучесть одновременно.

Релаксация напряжений характеризуется самопроизвольным уменьшением напряжений для тела, которое деформировано и в напряженном состоянии находится в течение длительного времени.

Ползучестью называется постепенное увеличение деформации при длительном действии на твердое тело нагрузки.



A’B’ – неустановившаяся ползучесть;

B’C’ – установившаяся ползучесть;

C’D’ – разрушение.

Деформация тела представляется как сумма упругой $\gamma_у$ и вязкой $\gamma_в$ деформаций, которые удовлетворяют условиям:

$$\gamma_у = \frac{\tau}{G}; \qquad \frac{d\gamma_в}{dt} = \frac{\tau}{\eta}$$

Скорость деформирования при этом

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}$$ упруговязкое тело Максвелла.

Решение уравнения с учетом, $G\gamma_0 = \tau_0$ если к моменту времени t=0 тело деформировано на величину γ_0 и даже деформация во времени не изменяется.

$$\tau = \tau_0 \exp(-\frac{Gt}{\eta})$$

- называется уравнением релаксации напряжений.

Для случая, когда тело не деформировано к моменту времени t=0, а затем приложено постоянное напряжение τ_0, то общая деформация:

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G} + \frac{\tau_0}{\eta}t$$

- уравнение установившейся ползучести.

ПОКАЗАТЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД.

Показатели механических свойств горных пород, определяемые при одноосном сжатии, растяжении и чистом сдвиге (простые виды напряженного состояния), позволяют получить начальный участок предельной зависимости σ_{in} от σ_0 до среднего напряжения, равного $\sigma_0=\sigma_{сж}/3$ и проводить расчеты, если σ_0 в горных породах не превышает этой величины.

Одноосное сжатие.

Определяют по максимальной нагрузке предела прочности образца на сжатие (прочность на сжатие).

$$\sigma_{сж} = \frac{P_{\max}}{F}$$

F – начальная площадь поперечного сечения образца.

Если используется образец цилиндрической формы диаметром 40-45 мм, то отношение *l/d* отличается существенно от единицы, то необходимо сделать перерасчет по формуле:

$$\sigma_{сж} = \frac{9\sigma'_{сж}}{7 + 2\frac{d}{l}}$$

где $\sigma'_{сж}$ – прочность на сжатие нестандартного образца.

Модуль деформации при сжатии:

$$E_{сж} = \frac{\Delta P l}{F \Delta l}$$

где Δ*l* – изменение длины образца, соответствующее изменению нагрузки на величину ΔP.

В процессе нагружения, при измерении изменений диаметра образца можно определить **коэффициент Пуассона:**

$$\mu_{сж} = \frac{\Delta d}{d} \frac{l}{\Delta l}$$

де Δd – увеличение диаметра образца, соответствующее изменению длины на величину Δ*l.*

Растяжение.

Определяется из следующих показателей: предел прочности на растяжение (σ_P); модуль деформации при растяжении E_P, коэффициент Пуассона μ_0.

Есть и косвенные методы определения предела прочности на растяжение горных пород.

«Бразильский метод» основан на раздавливании цилиндрических образцов равномерно распределенной нагрузкой, прикладываемой к диаметрально противоположным образующим.

Предел прочности на растяжение определяют по формуле:

$$\sigma_p = \frac{2P_i}{\Pi d}(1+\mu)(1+2\mu),$$

где Pi – нагрузка на единицу длины образца.

Для всего диапазона изменения коэффициента Пуассона величины $\frac{2}{\Pi}(1+\mu)(1+2\mu)$ изменяется от 0,64 до 1,91.

Изгиб.

Испытываются образцы пород цилиндрического или прямоугольного сечения при отношении *l*/h>8 (h – высота сечения, *l* – длина образца), чтобы исключить влияние поперечных сил.

Прочность на изгиб определяется:

$$\sigma_{и} = \frac{M}{W}$$

где M – максимальный изгибающий момент,

W – момент сопротивления сечения изгибу.

Для прямоугольного сечения шириной B:

$$W = \frac{Bh^2}{6}$$

Для круглого сечения диаметром d:

$$W = \frac{\Pi d^2}{32}$$

Сдвиг.

Показатели механических свойств горных пород при сдвиге определяют в процессе исследований на срез и кручение.

Определяют по наибольшей нагрузке Pmax напряжения в плоскости среза.

$$\sigma = (\frac{P_{\max}}{F})\sin\alpha$$

F – площадь среза;

α – угол наклона плоскости среза к линии действия силы P.

Сопротивление срезу при данном нормальном напряжении составляет:

$$\tau = (\frac{P_{\max}}{F})\cos\alpha$$

Сравнение прочности горных пород при одноосном сжатии, сдвиге, изгибе, растяжении обычно проводят в относительных величинах.

Относительная прочность горных пород (%)

Горная порода	Сжатие	Сдвиг	Изгиб	Растяжение
Глинистые сланцы	100	-	28	12
Песчаники	100	10-12	6-20	2-5
Гипсы	100	-	35	11
Известняки	100	15	8-10	4-10

Из таблицы видно, что наибольшее сопротивление горные породы оказывают при одноосном сжатии.

σ сж >> τ сдвига ≥ σ изгиба ≥ σ растяжения

Легче всего разрушать горные породы при растяжении.

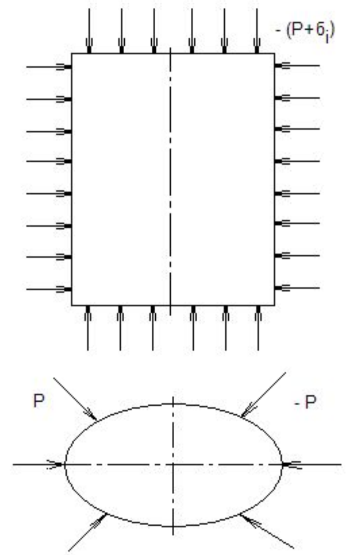
ЛАБОРАТОРНЫЕ СХЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ.

А) Схема Кармана.

Цилиндрические образцы, предварительно нагруженные всесторонним равномерным давлением р и нагретые до требуемой температуры.

В процессе испытания увеличивают нагрузку на торцевые поверхности образца при T=const.

Схема Кармана.



Компоненты нормальных напряжений в образце при нагружении и всестороннем давлении равны:

$$\sigma_z = \sigma_3 = -(P + \sigma_i)$$

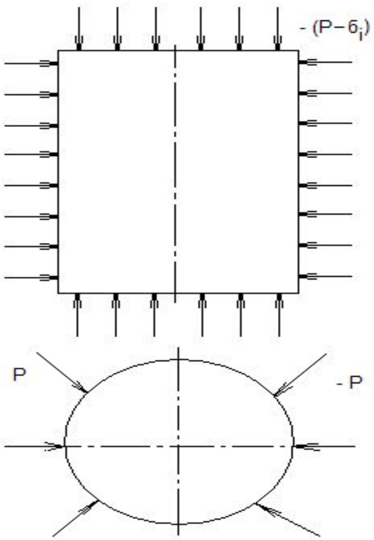
$$\sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2 = -P$$

При (P=0, атмосферном давлении) схема Кармана переходит в схему испытания при одноосном сжатии.

Б) Схема Бокера.

Испытываются предварительно нагруженные цилиндрические образцы на растяжение (выдавливание) под действием бокового давления со стороны цилиндрической поверхности.

Схема Бокера.



Снижается нагрузка на торцевые поверхности в процессе испытания при T=const.

Нормальные напряжения:

$$\sigma_z = \sigma_1 = -(P-\sigma_i);$$
$$\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_{23} = -P$$

Определяется график зависимости интенсивности касательных напряжений σ_i от деформации ε образца.

Среднее напряжение при испытании

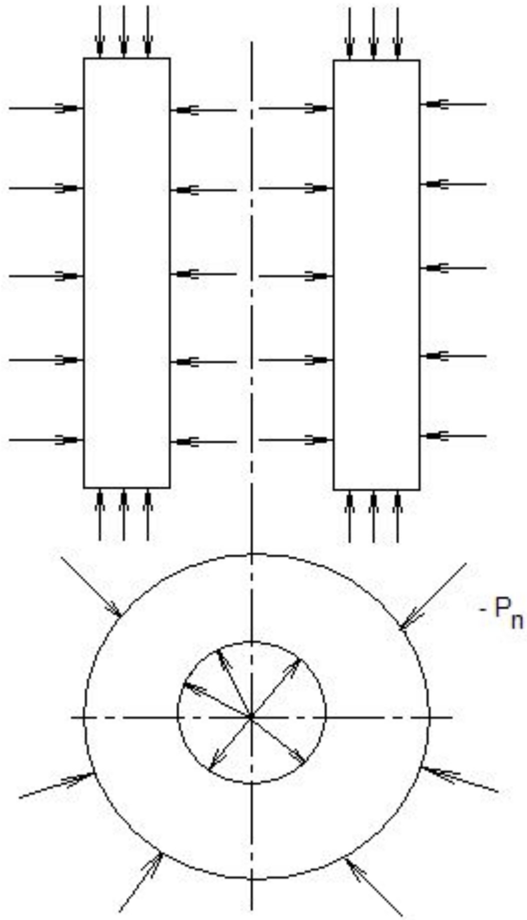
$$\sigma_0 = -(p + \frac{\sigma_i}{3})$$

по схеме Кармана:

$$\sigma_0 = -(p - \frac{\sigma_i}{3})$$

Третья схема.

Предназначена для испытаний полых цилиндров.



ВЛИЯНИЕ РАВНОМЕРНОГО ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД. КОЭФФИЦИЕНТ СЖИМАЕМОСТИ ПОРОД.

Равномерным всесторонним сжатием называется условие равенства нулю трех главных сжимающих напряжений.

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

В этом случае равны нулю и касательные напряжения.

Коэффициент сжимаемости β равен относительному уменьшению объема V с увеличением давления на 1 МПа, т.е.

$$\beta = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dp}$$

где V_0 – первоначальный объем при нормальном давлении и температуре.

При соблюдении закона Гука.

$$\frac{dV}{dp} = \frac{V_0 - V}{p},$$ тогда

$$\beta = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dp} = \frac{V_0 - V}{V_0 p} = \frac{\varepsilon_v}{p}$$

или учитывая, что $p=\sigma_0$, получим

$$\beta = \frac{\varepsilon_v}{\sigma_0} \Rightarrow: \quad \beta = \frac{1}{k} \quad (т.к. \quad \varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_0}{k}, \quad k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_v}).$$

Коэффициент сжимаемости β некоторых минералов и горных пород по данным Адамса

Минерал, порода	$\beta \cdot 10^5$ 1/мПа	
	P=106 мПа	P=981 мПа
Алмаз	0,18	0,18
Кальцит	1,42	1,42
Полевые шпаты	1,54-1,86	1,36-1,71
Кварц	2,86	2,35
Каменная соль	4,09	3,60
Гранит	2,16	1,92

Из таблицы видно, что по мере увеличения давления коэффициент сжимаемости для таких минералов, как алмаз и кальцит не изменяется, а для полевых шпатов, кварц, каменной соли – уменьшается. Коэффициент сжимаемости горных пород с увеличением давления обычно уменьшается в большей степени, чем коэффициент сжимаемости слагающих и минералов.

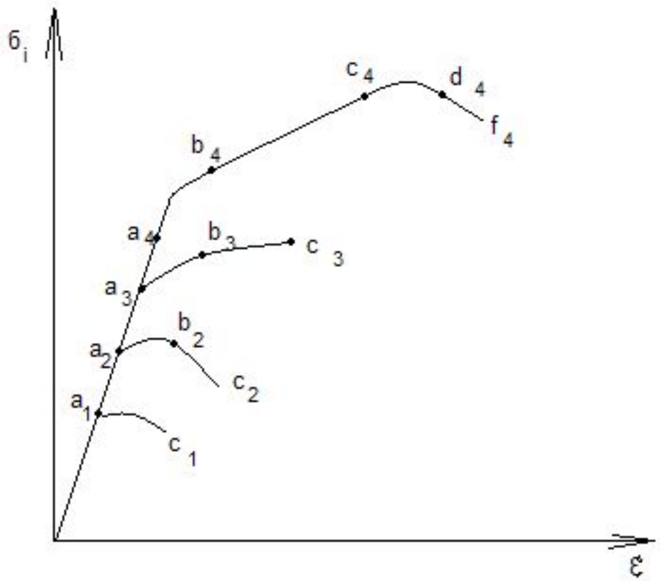
Это происходит ввиду уплотнения пород, т.е. их пористость не равна нулю.

Коэффициент сжимаемости у горных пород всегда больше или иногда равен среднему коэффициенту объемного сжатия минералов, входящих в состав данной породы, что объясняется менее плотным сложением горной породы, наличием большого количества дефектов на внутренних поверхностях (поверхностных зерен).

ГОРНЫЕ ПОРОДЫ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ.
ПОСТРОЕНИЕ ПАСПОРТОВ ПРОЧНОСТИ ПОРОД.

В том случае, если хотя бы одно главное напряжение не равно двум другим возникает неравномерное всестороннее сжатие. Общий случай, когда возникает условие:

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$



Обобщенная зависимость σ_i от ε при различных значениях начального всестороннего сжатия.

Индексы соответствуют различным значениям давления Р, причем с увеличением индекса увеличивается давление Р.

$|P_1|<|P_2|<|P_3|<|P_4|$

Закон Гука выполняется на отрезках Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4. На отрезках a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4 – переходный процесс, заканчивающийся или установившимся пластическим деформированием (отрезки b_2c_2, b_3c_3, b_4c_4) или хрупким разрушением (отрезок a1c1). Если же пластические сдвиги локализуются в определенных зонах образца, тогда развитие деформирования сопровождается уменьшением σi и заканчивается разрушением образца. В этом случае модуль пластичности или отрицателен или равен нулю.