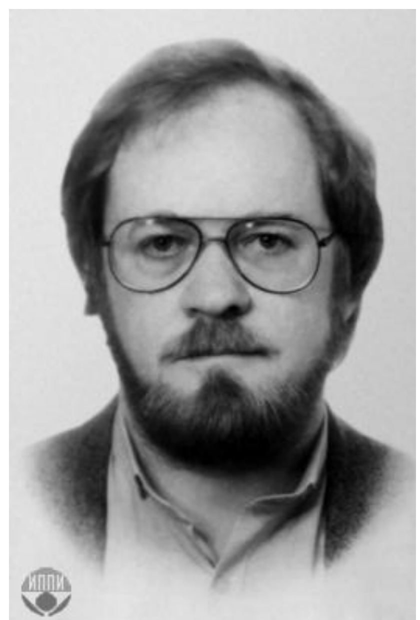
НОВЫЕ ТИПЫ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

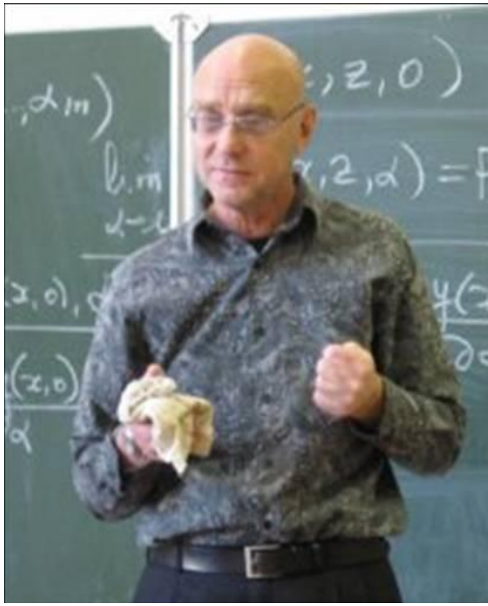


О возникновении т.н. «теории робастных систем»

Основополагающей работой, определившей возникновение теории робастности, является ***теорема В. А. Харитонова.***

(«Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем дифференциальных уравнений» - Дифференциальные уравнения. – 1978. – №11. – С.2086-2088.)

Теорема Харитонова имеет важный и красивый результат.
Но наряду с этим имеет и ограничение.



Классификация простейших случаев неопределенности по видам характеристических полиномов для линейных стационарных систем

- Интервальная неопределенность – коэффициенты полинома являются интервальными параметрами;
- Аффинная неопределенность – коэффициенты полинома образованы суммой или разностью интервальных параметров;
- Полилинейная неопределенность – коэффициенты полинома линейно зависят от каждого параметра, если остальные параметры фиксированы;
- Полиномиальная неопределенность – коэффициенты полинома зависят полиномиально хотя бы от одного параметра.

Для интервальной и аффинной неопределенностей существуют достаточно простые методы анализа и синтеза, но если коэффициенты полинома являются более сложными функциями интервальных параметров, то анализ и синтез ИС значительно усложняется.

- # Постановка задачи:

$$\dot{x} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & . & -a_1(t) \end{matrix} x + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{matrix} u$$

$$| a_i(t) | < A_i$$

где *a(t)* - произвольные функции времени, в том числе разрывные

Хорошо бы расследовать

1. Координатно-операторная обратная связь
1.1. Система с одним неопределенным параметром
1.2. Система с двумя неопределенными параметрами
1.3 Система с более, чем двумя неопределенными параметрами
2.1 Операторная обратная связь с одним неопределенным параметром
2.2 Операторная обратная связь более чем с одним неопределенным параметром

1. Координатно-операторная обратная связь
1.1. Система с одним неопределенным параметром
«Хрестоматийный» пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a \cdot x_1 + u \end{cases}$$

скаляризуем путем введения новой переменной $\sigma = dx_1 + x_2$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -dx_1 + \sigma \\ \dot{\sigma} = (a - d^2) \cdot x_1 + d\sigma + u \end{cases}$$

Теперь имеем дело со скалярным объектом:

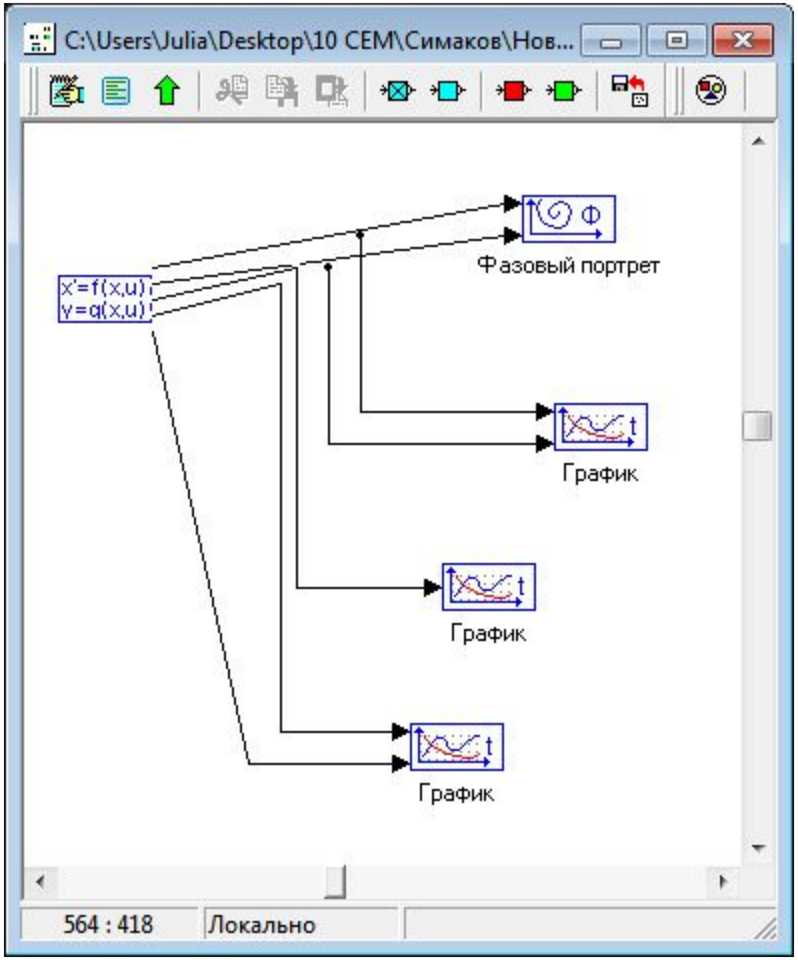
$$\dot{\sigma} = d\sigma + u + (a - d^2) \cdot x_1$$

Будем рассматривать стабилизацию в малом

$$|\sigma| \le \delta \cdot |x_1|$$

$$u = -(a_0 + d^2)\,|\,x_1\,|\operatorname{sgn}\sigma$$

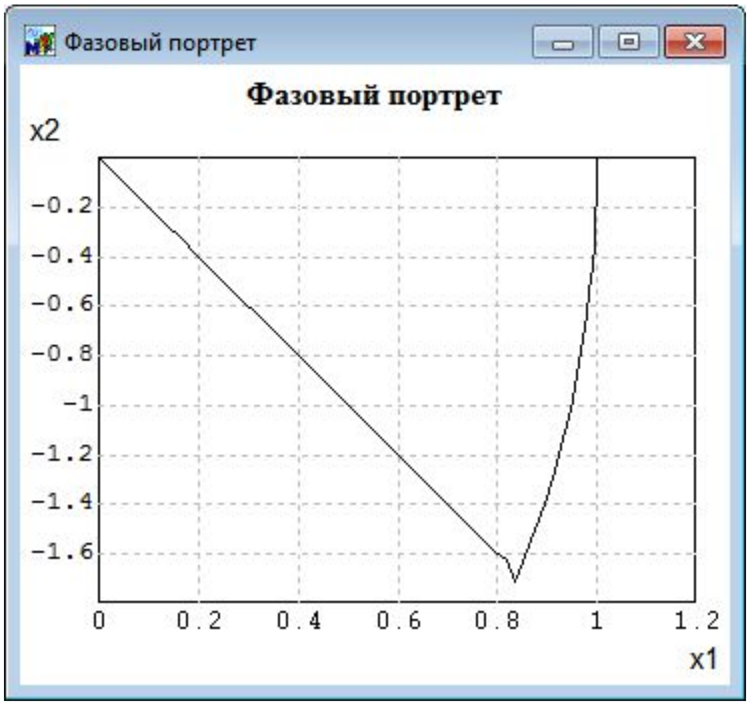
1. Координатно-операторная обратная связь
1.1. Система с одним неопределенным параметром

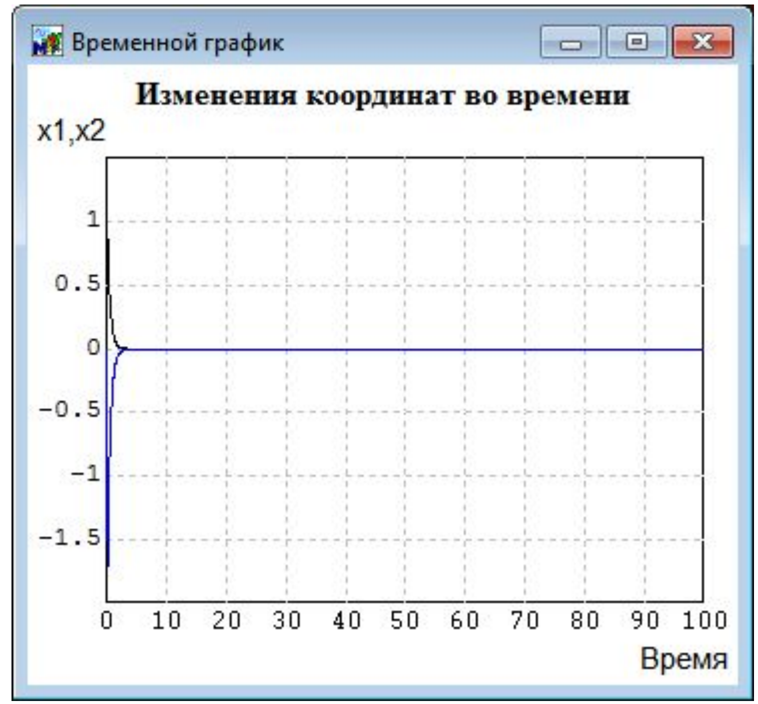



```
t=time;
init x1=1,x2=0,Miu_cp=0;
ao=5;
w=0.5;
K=10;
d=2;
a=ao*sin(w*t);
sigma=d*x1+x2;
Ksi=sigma/x1;
Miu=-K*sign(Ksi);
Miu_cp'=5*(Miu-Miu_cp);
a_oc=d^2-Miu_cp;
u=-K*abs(x1)*sign(d*x1+x2);
x1'=x2;
x2'=a*x1+u;
output x1,x2,u,a_oc,a;
```

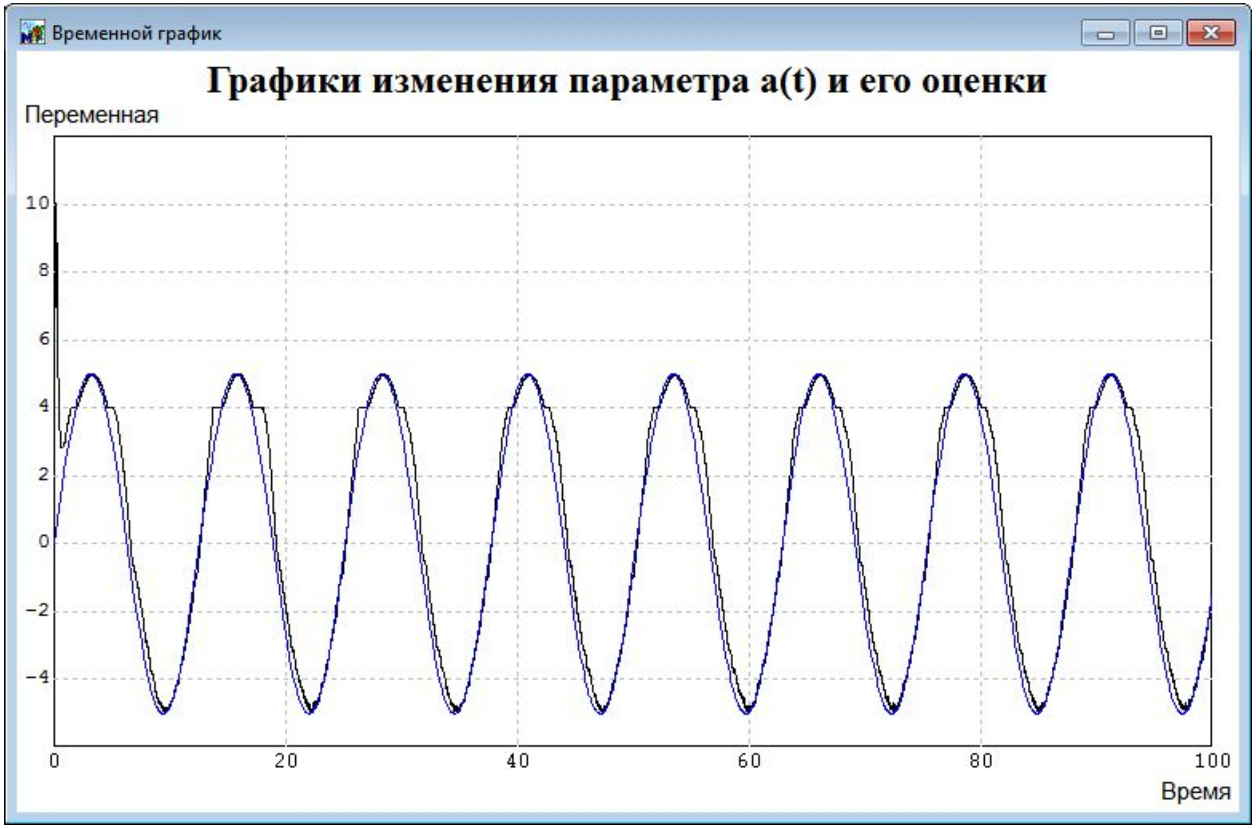
1. Координатно-операторная обратная связь

1.1. Система с одним неопределенным параметром





1. Координатно-операторная обратная связь
1.1. Система с одним неопределенным параметром



1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a(t)x_1 + b(t)x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

$$a(t) < A$$

$$b(t) < B$$

Сделаем замену переменных $E = \dfrac{x_2}{x_1} + d$

1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

$$\dot{x}_1 = x_2 = (E - d)x_1,$$

$$x_2 = (E - d)x_1 \Leftrightarrow \dot{x}_2 = \dot{E}x_1 + (E - d)\dot{x}_1 \Leftrightarrow$$

$$\dot{E} = a(t) + b(t)(E - d) + u(t) / x_1 - (E - d)^2$$

где d характеризует качество стабилизации.
Проведем следующие преобразования

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (E - d)x_1, \\ \dot{E} = a(t) + b(t)(E - d) + u(t) / x_1 - (E - d)^2 \end{cases}$$

1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

Если E>0 то для стабилизации требуется $\dot{E} < 0$

Для того чтобы $\dot{E} < 0 \Leftarrow D < 0$

$$D = b(t) \wedge 2 + 4(a(t) + u(t) / x_1)$$

$$u(t) = -(A + \frac{B \wedge 2}{4})x_1$$

Если E<0 то для стабилизации требуется $\dot{E} > 0$

То есть E-d попадает в корневой промежуток рассматриваемого выражения

$$(E - d) > \frac{b - \sqrt{b(t) \wedge 2 + 4(a(t) + u(t) / x_1)}}{2}$$

$$u(t) = ((E - d) \wedge 2 + B \mid E - d \mid + A)x_1$$

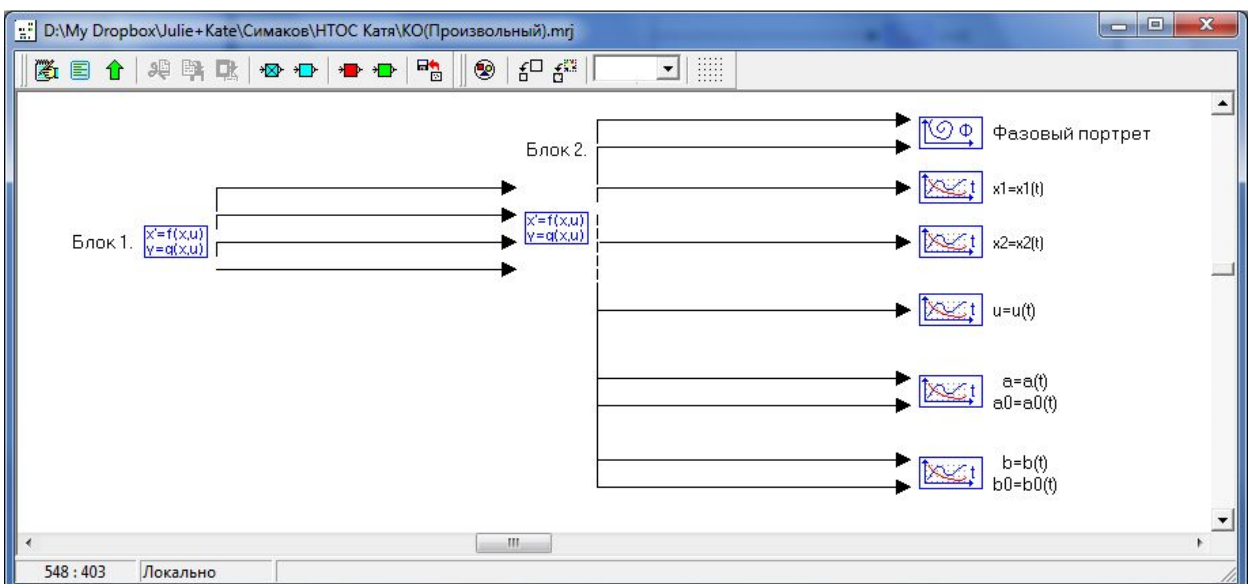
1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

<u>Тригонометрический закон изменения параметров объекта.</u>

Рассматривается стабилизация модели вида

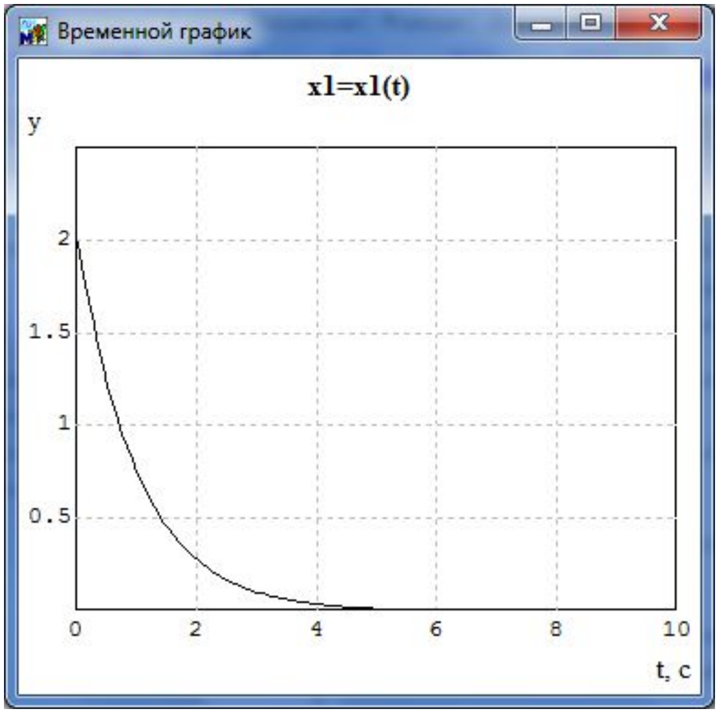
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a(t)x_1 + b(t)x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

$$a = a_0 \sin(wt);$$
$$b = b_0 \cos(wt);$$



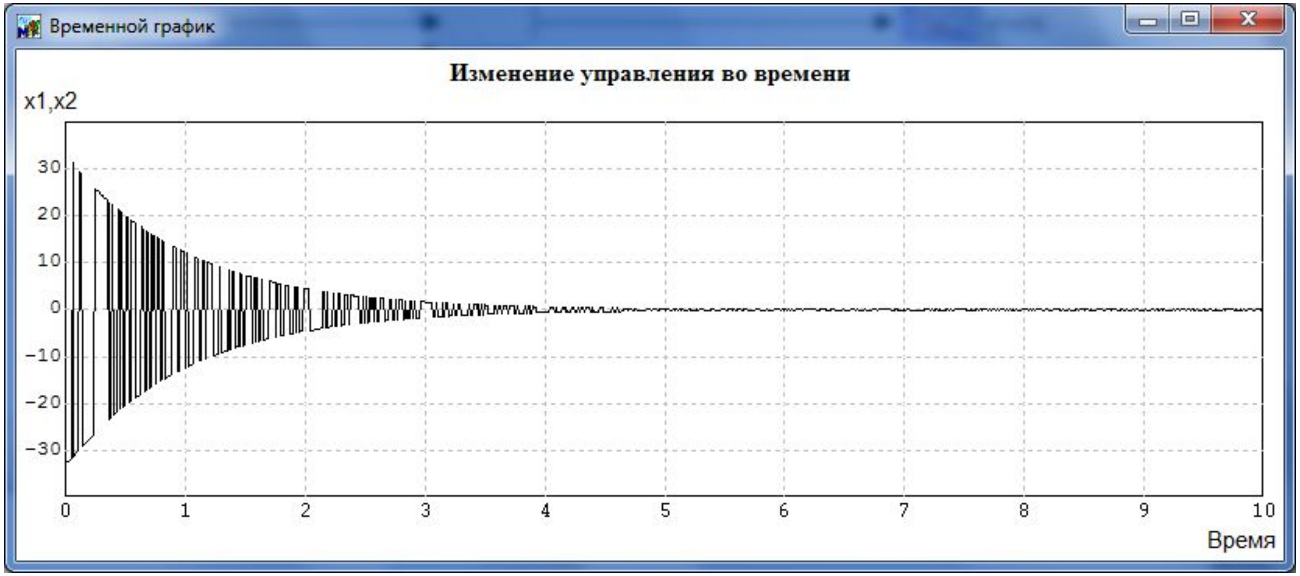
1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

Тригонометрический закон изменения параметров объекта.



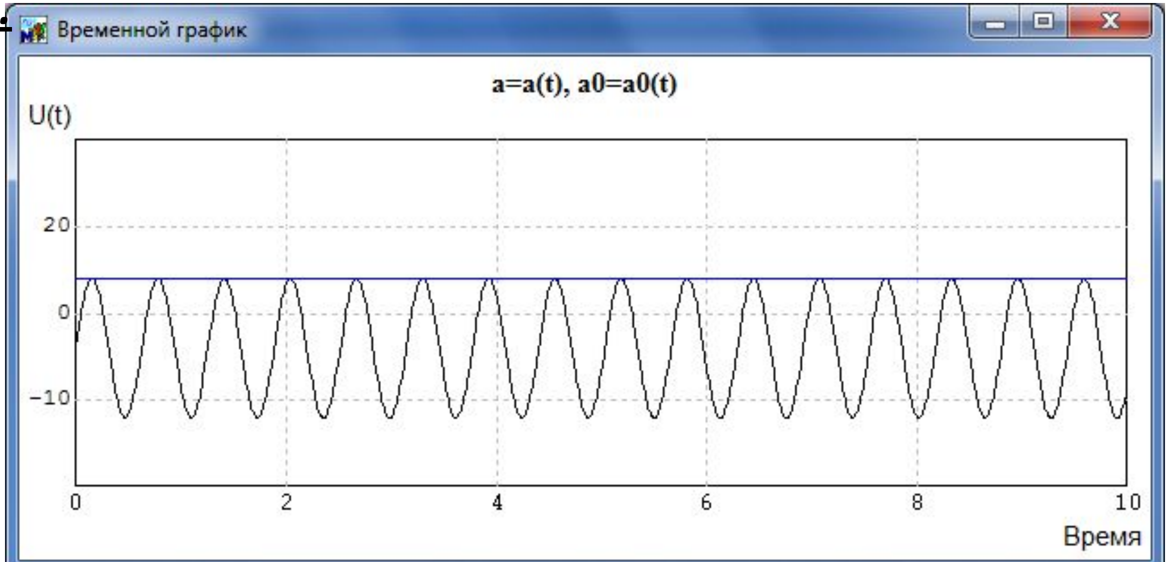
1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

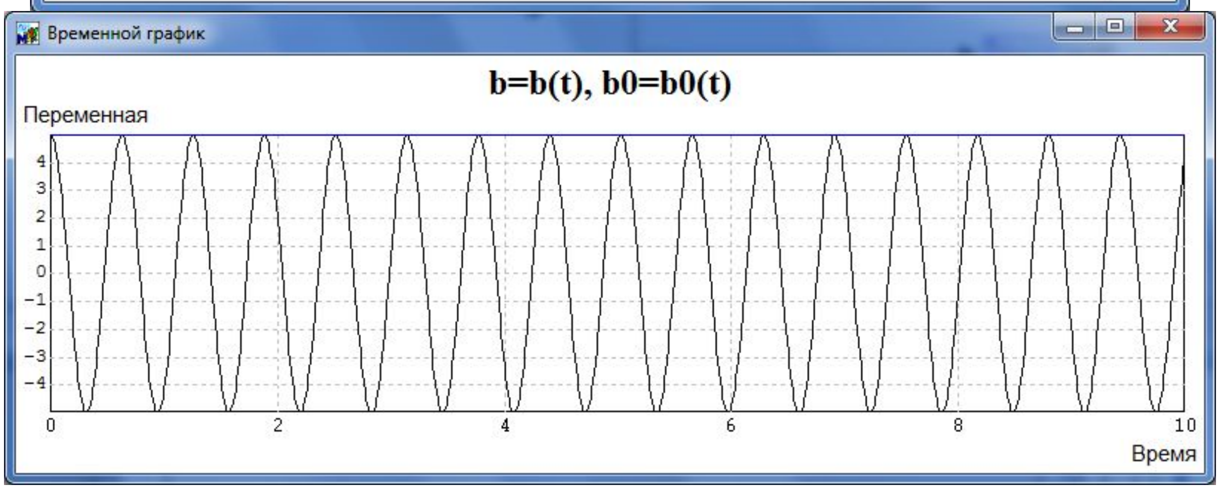
Тригонометрический закон изменения параметров объекта.



1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

Тригонометрический закон изменения параметров объекта.





1. Координатно-операторная обратная связь

1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

<u>Дифференциальный закон изменения параметров объекта.</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a(t)x_1 + b(t)x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

, где

$$a(t) = x3(t);$$

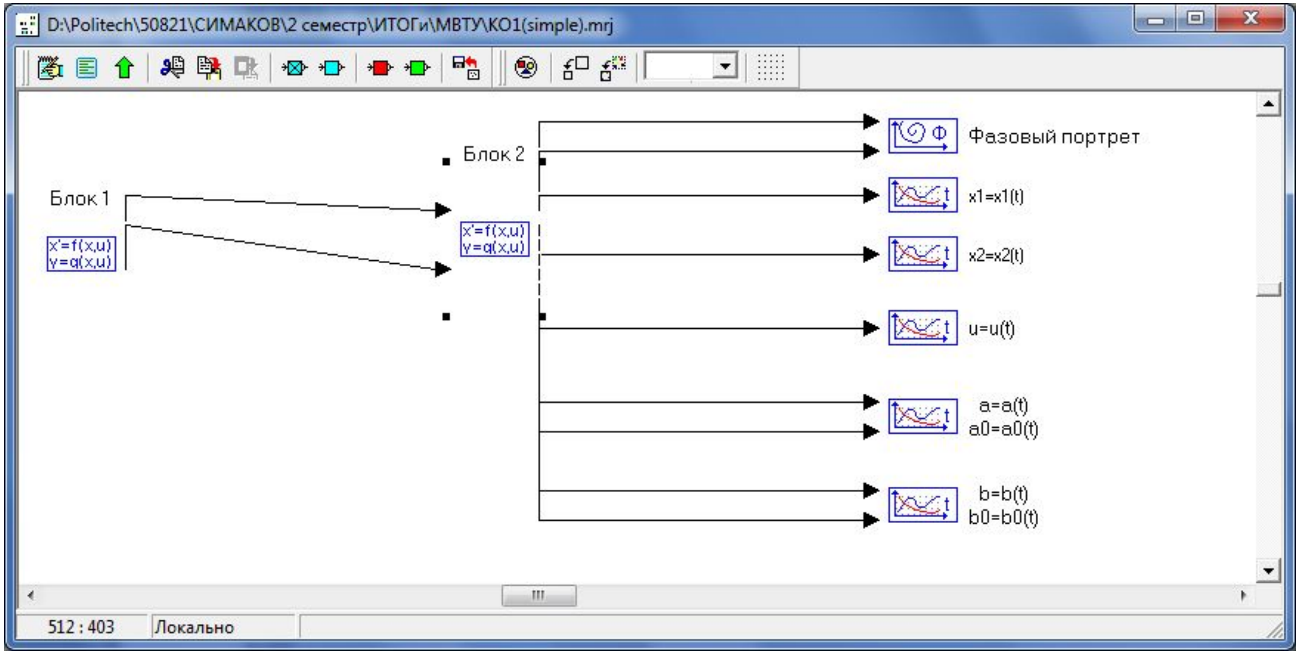
$$b(t) = x6(t)$$

$$\begin{cases} \mathrm{x3}' = -10 * (\mathrm{x3} - \mathrm{x4}); \\ \mathrm{x4}' = -\mathrm{x3} * \mathrm{x5} + 28 * \mathrm{x3} + \mathrm{x4}; \\ \mathrm{x5}' = \mathrm{x3} * \mathrm{x4} - 2.666 * \mathrm{x5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x6}' = -\mathrm{x7} - \mathrm{x8}; \\ \mathrm{x7}' = \mathrm{x6} + 0.3 * \mathrm{x7}; \\ \mathrm{x8}' = 0.4 - 8.5 * \mathrm{x8} + \mathrm{x6} * \mathrm{x8}; \end{cases}$$

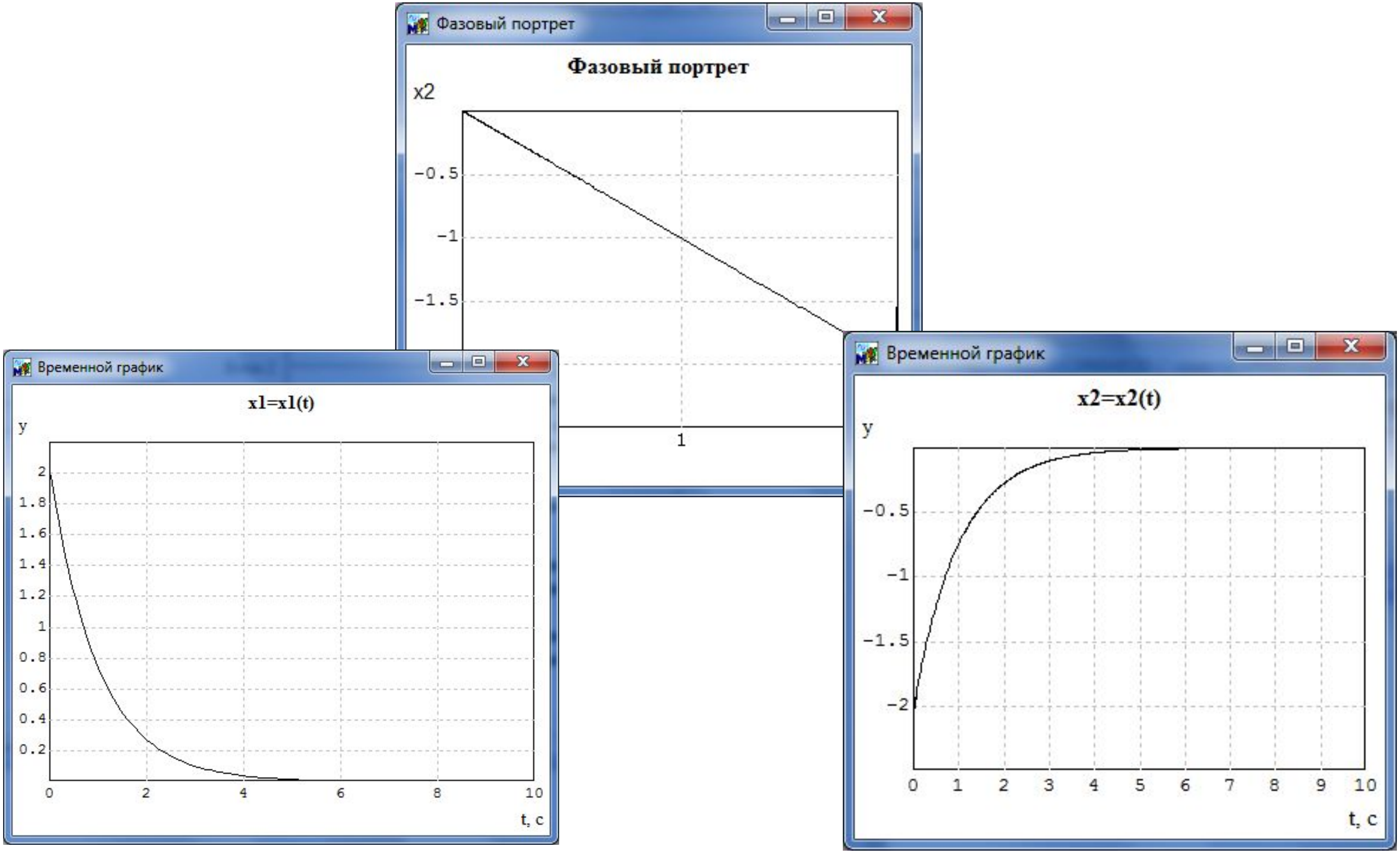
1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

<u>Дифференциальный закон изменения параметров объекта.</u>



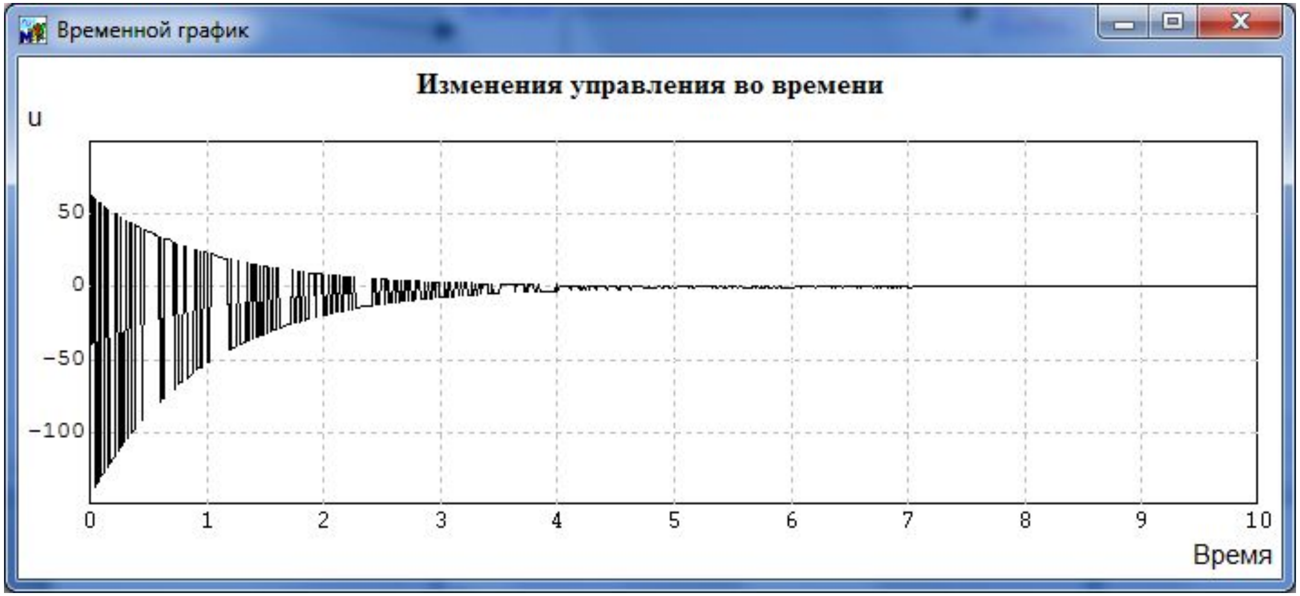
1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

<u>Дифференциальный закон изменения параметров объекта.</u>



1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

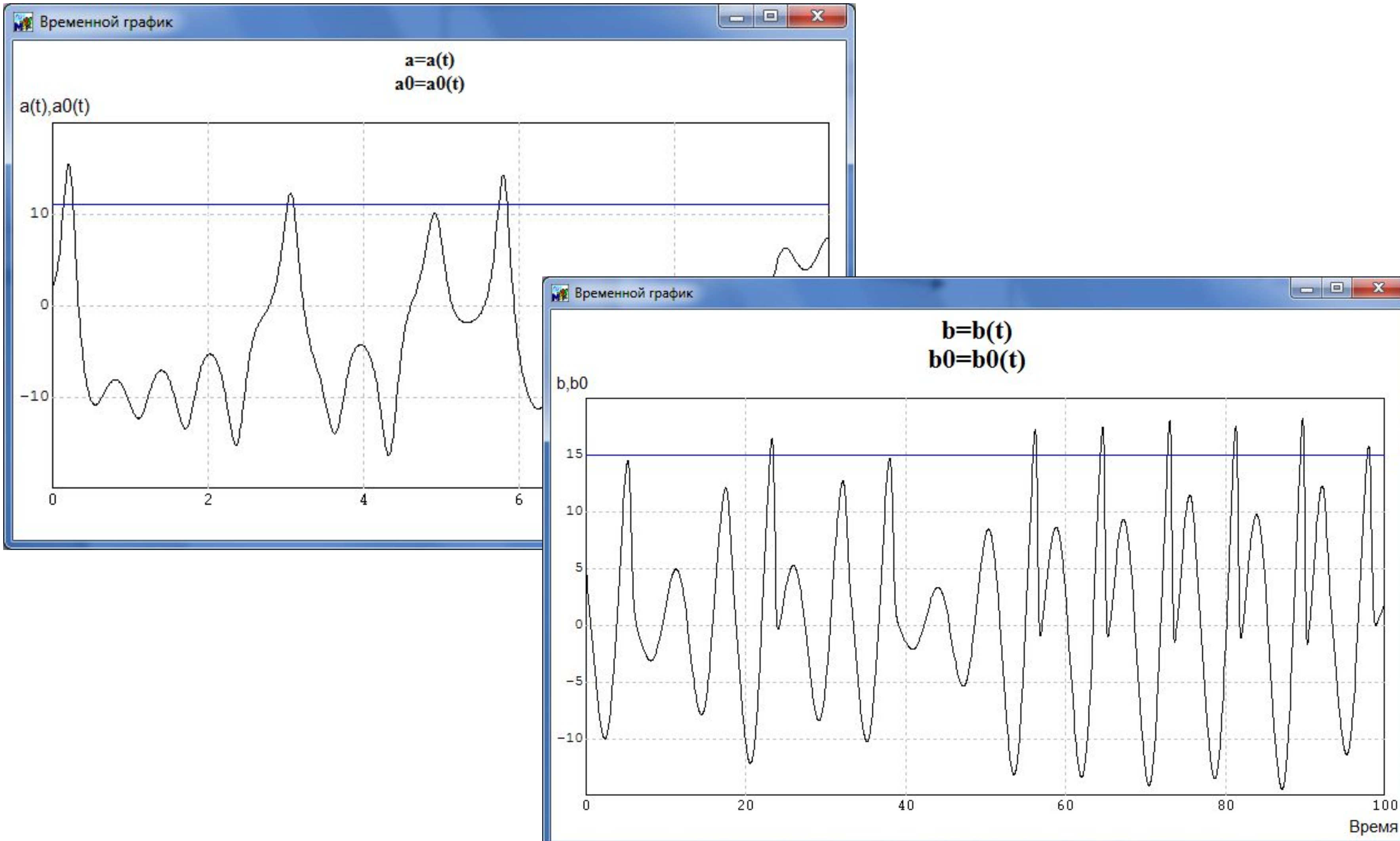
<u>Дифференциальный закон изменения параметров объекта.</u>



1. Координатно-операторная обратная связь

1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

<u>Дифференциальный закон изменения параметров объекта.</u>



1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

Дифференциальный с sign закон изменения параметров объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a(t)x_1 + b(t)x_2(t) + u(t) \end{cases}$$,где $$\begin{aligned} a(t) &= a0(t)sign(x3(t)); \\ b(t) &= b0(t)sign(x6(t)) \end{aligned}$$

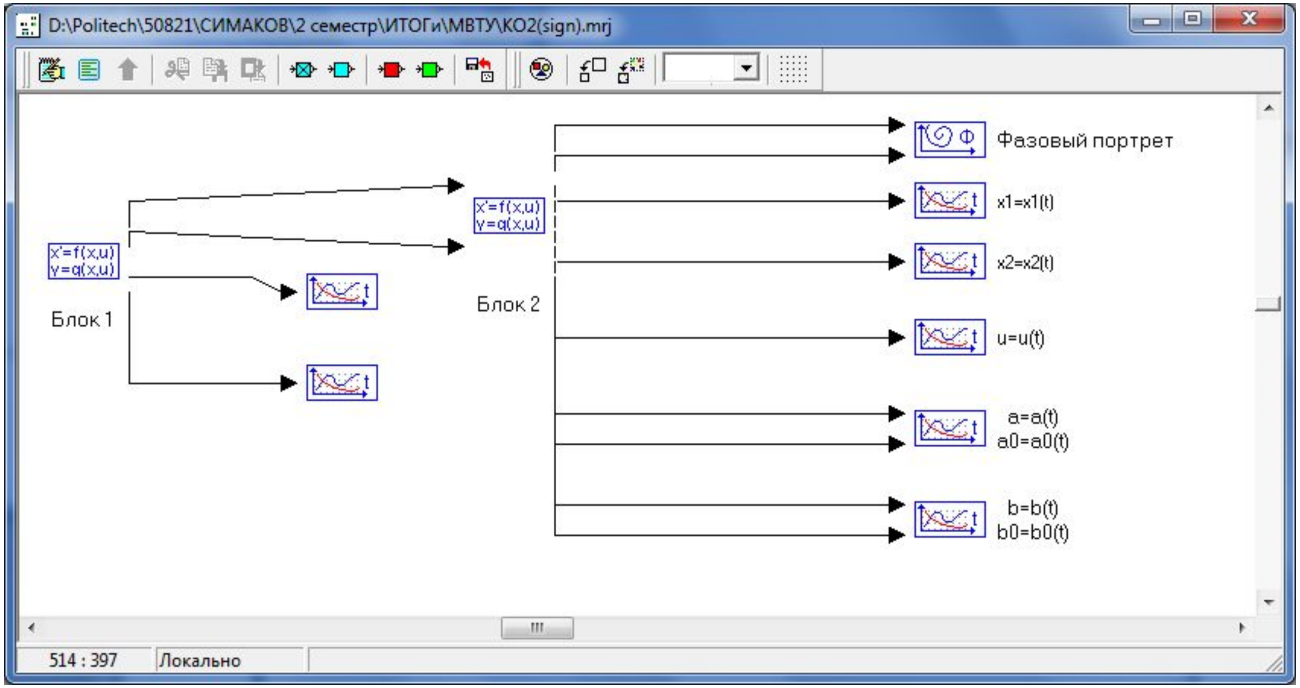
$$\begin{cases} \mathrm{x3'} = -10 * (\mathrm{x3} - \mathrm{x4}); \\ \mathrm{x4'} = -\mathrm{x3} * \mathrm{x5} + 28 * \mathrm{x3} + \mathrm{x4}; \\ \mathrm{x5'} = \mathrm{x3} * \mathrm{x4} - 2.666 * \mathrm{x5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x6'} = -\mathrm{x7} - \mathrm{x8}; \\ \mathrm{x7'} = \mathrm{x6} + 0.3 * \mathrm{x7}; \\ \mathrm{x8'} = 0.4 - 8.5 * \mathrm{x8} + \mathrm{x6} * \mathrm{x8}; \end{cases}$$

1. Координатно-операторная обратная связь

1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

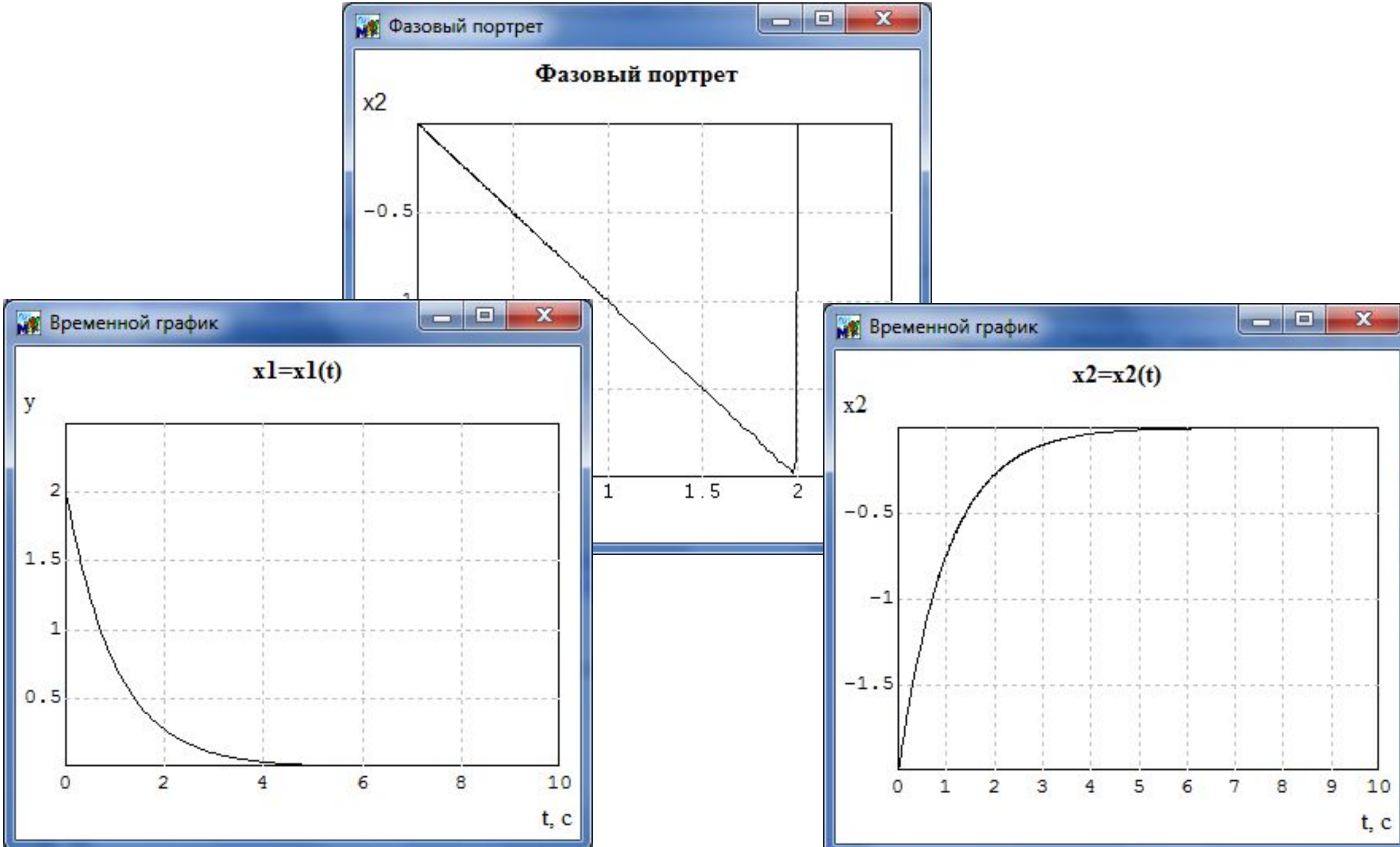
<u>Дифференциальный с sign закон изменения параметров объекта</u>



1. Координатно-операторная обратная связь

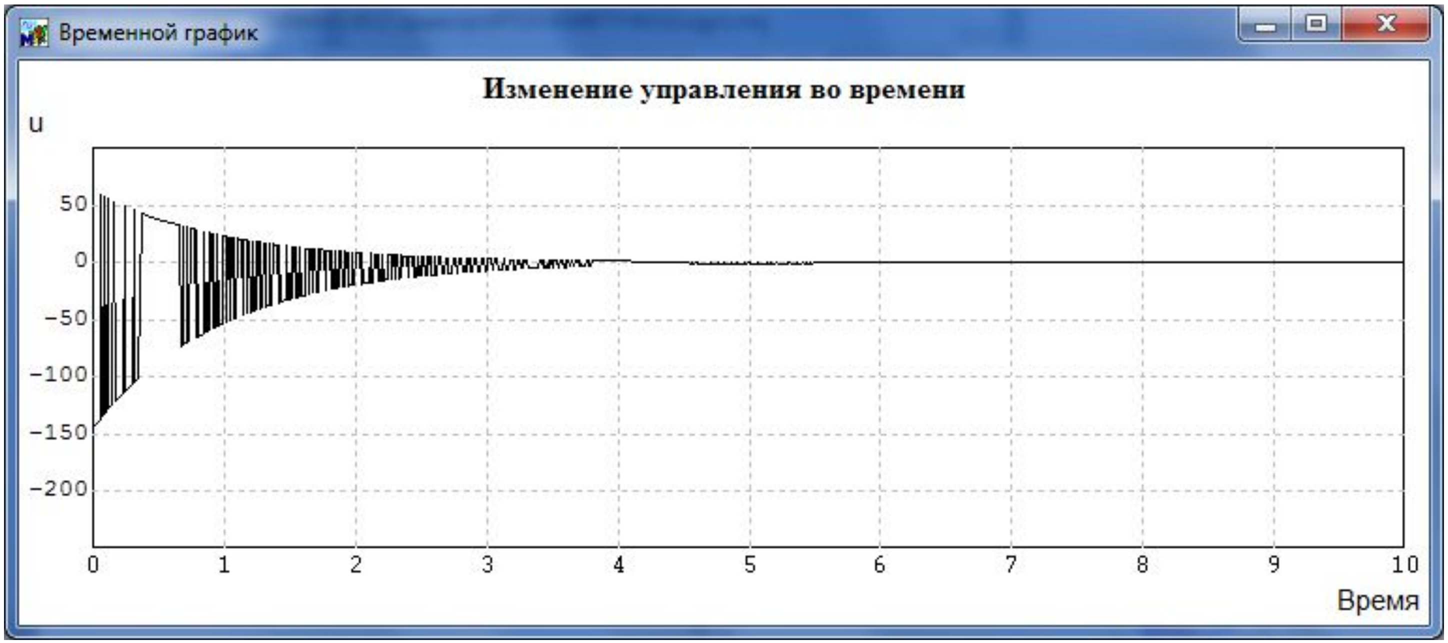
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

Дифференциальный с sign закон изменения параметров объекта



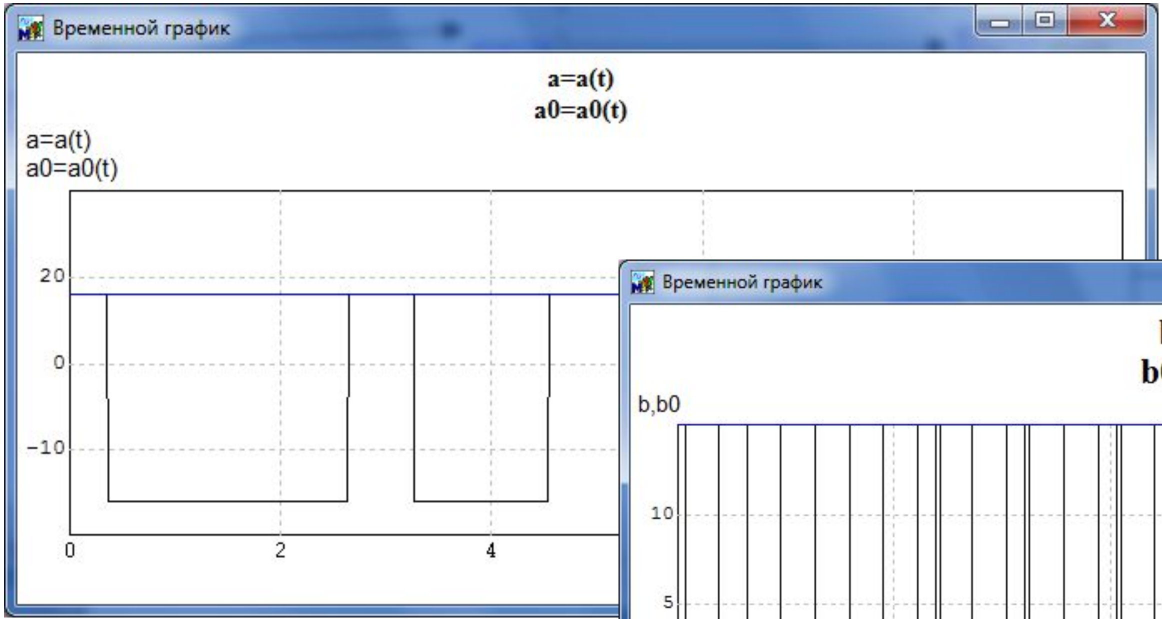
1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

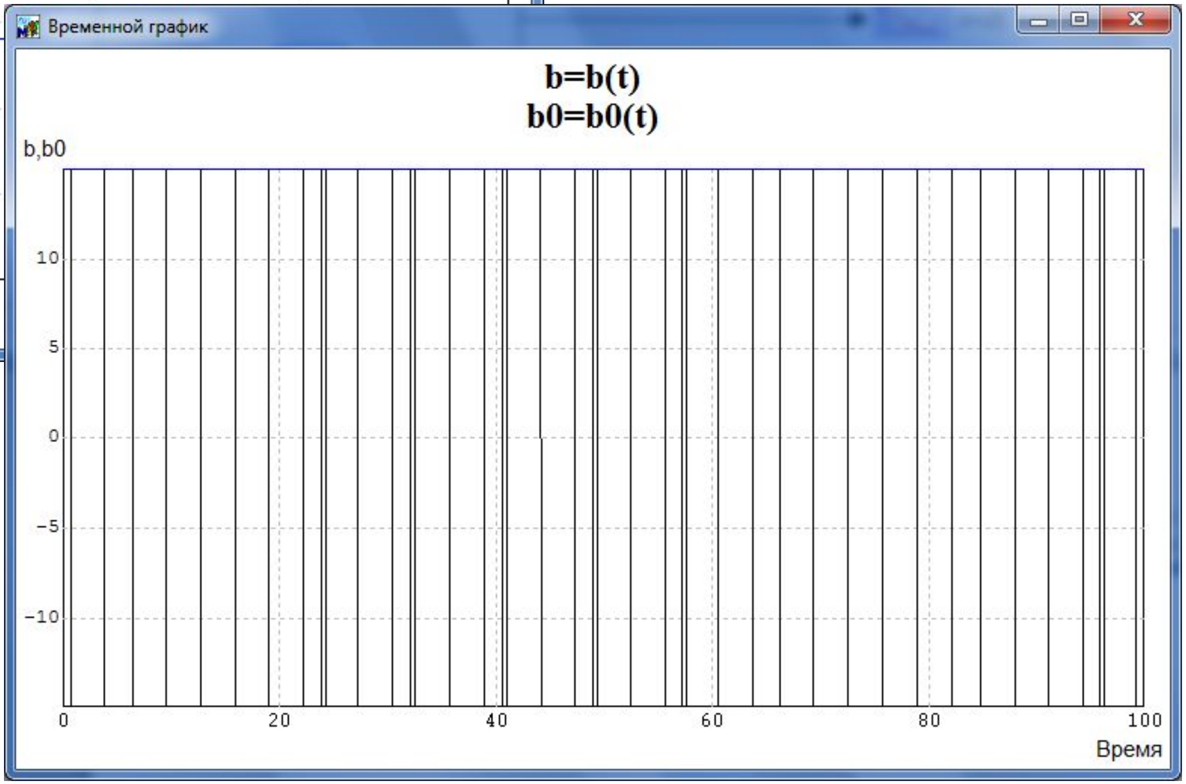
Дифференциальный с sign закон изменения параметров объекта



1. Координатно-операторная обратная связь
1.2. Система с двумя и более неопределенными параметрами

<u>Дифференциальный с sign закон изменения параметров объекта</u>





1. Координатно-операторная обратная связь
1.3. Система, представленная в «Фробениусовой» форме с неограниченным числом неопределенных параметров

$$\dot{x} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & . & -a_1(t) \end{matrix} \; x + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{matrix} \; u$$

$$| a_i(t) | < A_i$$

Введем новую переменную характеризующую отклонение объекта от требуемого режима

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i$$

$$d_n = 1$$

1. Координатно-операторная обратная связь
1.3. Система, представленная в Фробениусовой форме с неограниченным числом неопределенных параметров

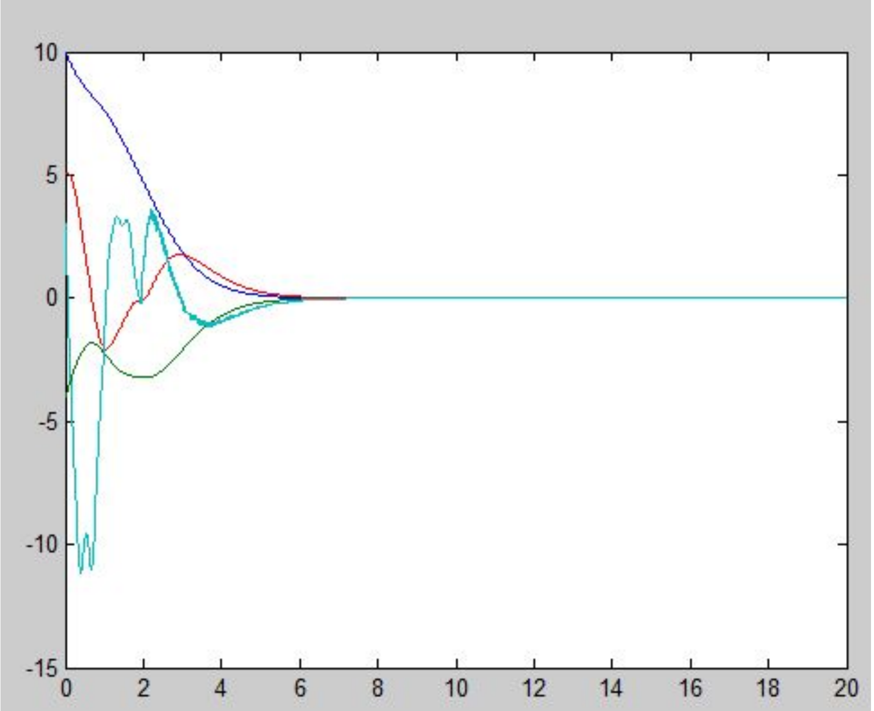
$$\dot{x}_{n-1} = x_n = \sigma - \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i$$

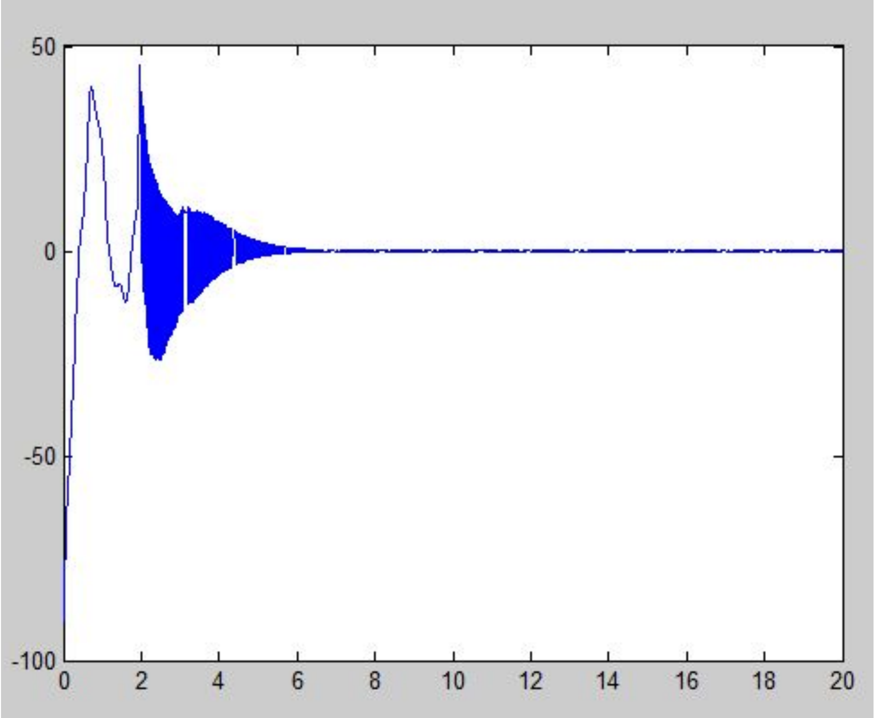
$$\dot{\sigma} = \dot{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + u$$

Стоит задача стабилизации сигма в нуле и выбора коэффициентов d_i

$$u = -\sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i - sign(\sigma)\sum_{i=1}^{n} A_i \,|\, x_i \,|$$

1. Координатно-операторная обратная связь
1.3. Система с 4- мя неопределенными параметрами





Состояние объекта

управление

2. Операторная обратная связь

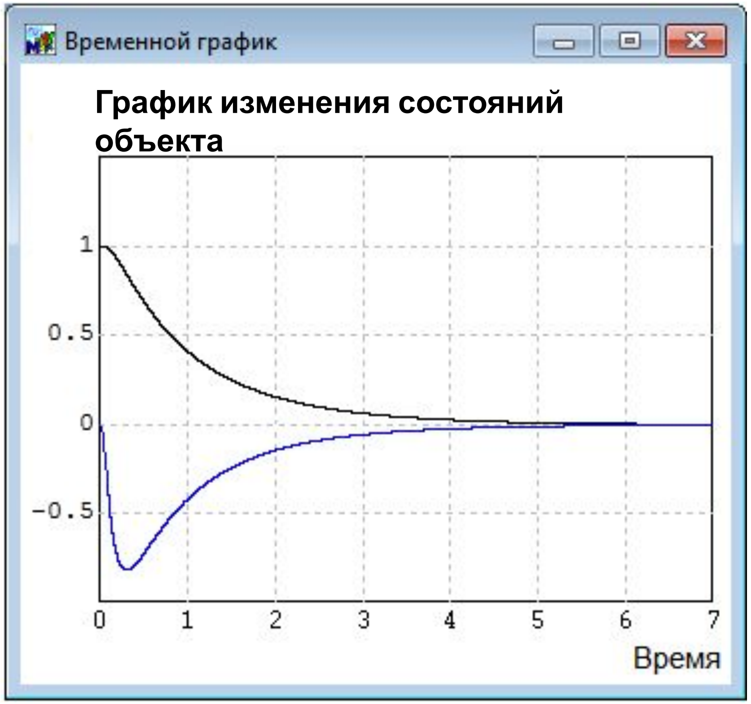
2.1. Система с одним неопределенными параметрами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 + u, \quad |a| \le a_0 \end{cases}$$

в отличие от п. 3, вводим координатную ошибку следующим соотношением

$$\sigma_\rho = x_2 + d_\rho x_1 = x_2 + (d + \rho)x_1$$

2. Операторная обратная связь
2.1. Система с одним неопределенными параметрами



2. Операторная обратная связь
2.2. Система с неограниченным числом неопределенными параметров

$$\dot{x} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & . & -a_1(t) \end{matrix} \; x + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{matrix} \; u$$

$$| a_i(t) |< A_i$$

Заметим что рассматриваемая матрица является «Фробениусовой», $a_i(t)$
т.е. являются коэффициентами «характеристического» полинома(точнее его аналога):

$$\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t)$$

Будем искать управление в следующем виде u=Kx

2. Операторная обратная связь
2.2. Система с неограниченным числом неопределенными параметров

Тогда уравнение замкнутой системы примет вид

$$\dot{x} = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . \\ -a_n(t)+k_n & -a_{n-1}(t)+k_{n-1} & . & -a_1(t)+k_1 \end{array} x$$

Характеристический полином имеет вид :

$$\lambda^n + (a_1(t) - k_1)\lambda^{n-1} + ... + (a_{n-1} - k_{n-1})\lambda + (a_n - k_n)$$

стабилизация системы с заданным качеством d

$$(\lambda + d)^n + b_1(\lambda + d)^{n-1} + ... + b_{n-1}(\lambda + d) + b_n$$

Необходимым условие стабилизации с заданным качеством ОУ является не отрицательность коэффициентов последнего характеристического уравнения

Найдем оценки этих коэффициентов

2. Операторная обратная связь
2.2. Система с неограниченным числом неопределенными параметров

$$k_1 = -A_1 - C_n^1 d + z_1$$

$$b_1 \in [0 + z_1; 2A_1 + z_1]$$

$$k_i = -(z_i + A_i + C_n^i d^i + \sum_{k=1}^{i-1} C_{n-k}^{i-k} d^{i-k} \max(b_k))$$

$$b_i \in [z_i; z_i + 2A_i + \sum_{k=1}^{i-1} C_{n-k}^{i-k} d^{i-k} (\max(b_k) - \min(b_k))]$$

Теперь можно найти значения z_i обеспечивающие достаточности сходимости, использую **критерий Харитонова** и достаточности для постоянных коэффициентов

2. Операторная обратная связь
2.2. Система с неограниченным числом неопределенными параметров

Произведем синтез регулятора для системы с 3-мя неопределенными параметрами

$$K_1 = -(z_1 + A_1 + 3d)$$

$$K_2 = -(z_2 + A_2 + 3d^2 + 4dA_1)$$

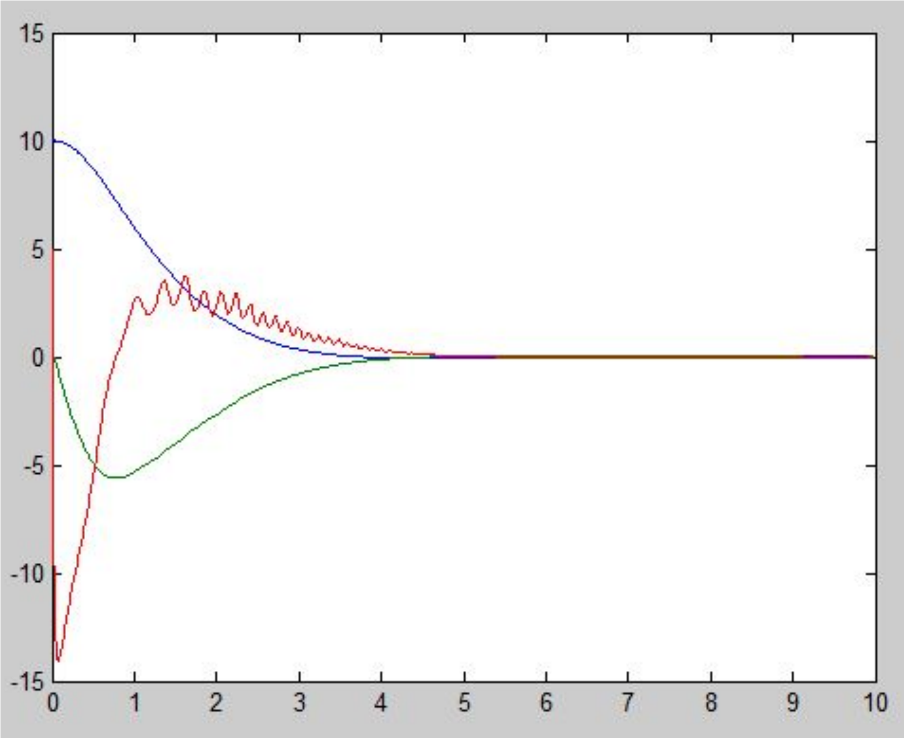
$$K_3 = -(z_3 + A_3 + d^3 + d^2(6A_1 + z_1) + d(2A_2 + z_2))$$

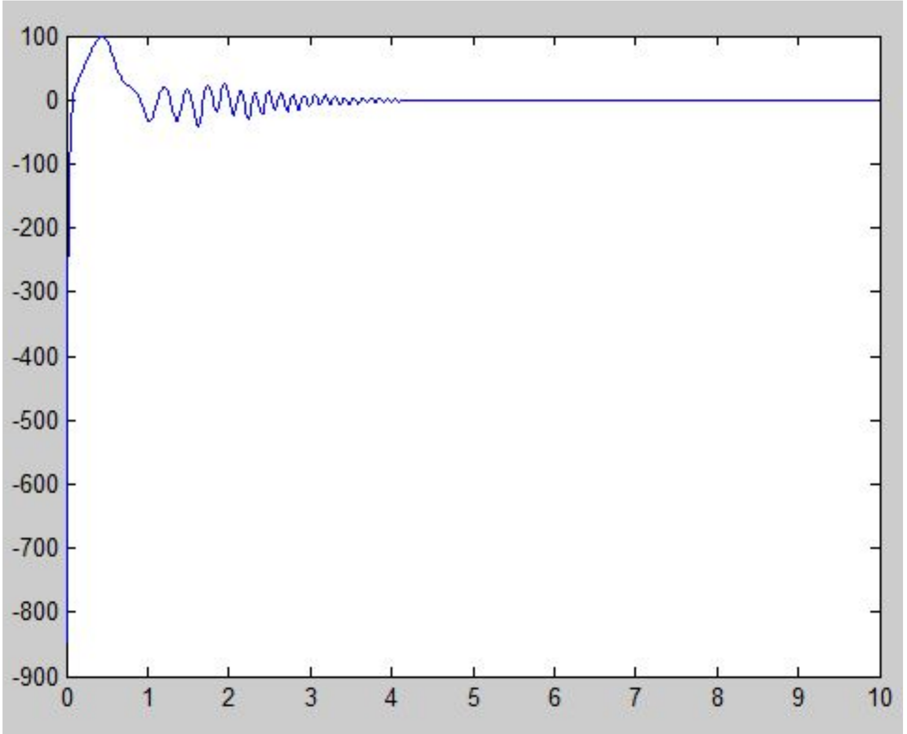
$$z_1 = 2A_3 + 6d^2 A_1 + 2dA_2$$

$$z_2 = 1$$

$$z_3 = 0$$

2. Операторная обратная связь
2.2. Система с неограниченным числом неопределенными параметров





Состояние объекта

управление