

Смешанное произведение

8. Смешанное произведение 3 векторов.

Смешанным произведением векторов $(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}])$ наз. число (скаляр), равное скалярному произведению вектора \mathbf{A} на вектор $[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$.

Свойства:

а) $(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = ([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})$

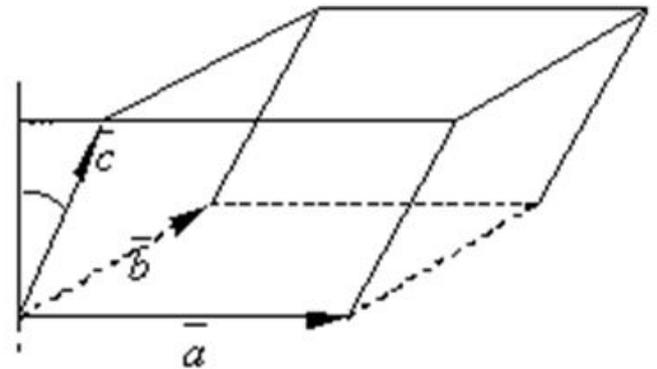
б) циклическая перестановка:
 $(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = (\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]) = (\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}])$

в) смеш. произ-ние равно нулю, если среди сомножителей есть нулевой вектор, или среди них

есть параллельные, или все три лежат в одной плоскости;

г) геометрический смысл – объем параллелепипеда, построенного на сомножителях.

Значение смешанного произведения может быть выражено через проекции сомножителей:



$$(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Умножение вектора на матрицу

$$\text{Матрица: } \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Векторы: } \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \hat{A} \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_3 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_3 \\ a_{31} \cdot b_1 + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Операции с векторами.

10. Не определены операции деления на вектор – ни обратная скалярному умножению, ни векторному.

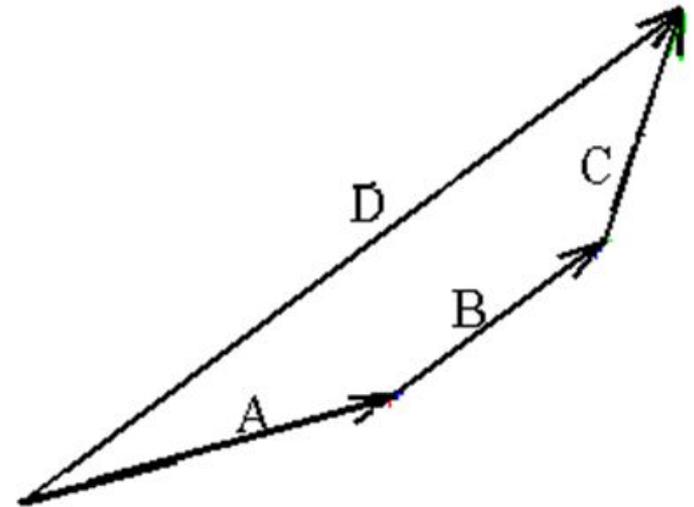
∃ умножение на обратную матрицу:

$$\vec{B} = \widehat{A}^{-1} \vec{C}$$

\widehat{A}^{-1} – матрица, обратная матрице \widehat{A}

11. Любой вектор можно разложить на произвольное число векторов, так чтобы сумма:

$$\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{B}_k$$



Произведения векторов

Скалярное произведение:

$$c = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \alpha = AB_a = BA_b = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ – типографские способы записи

(\vec{A}, \vec{B}) - при письме от руки

Векторное произведение:

$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ – типографские способы записи

$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}]$ - при письме от руки

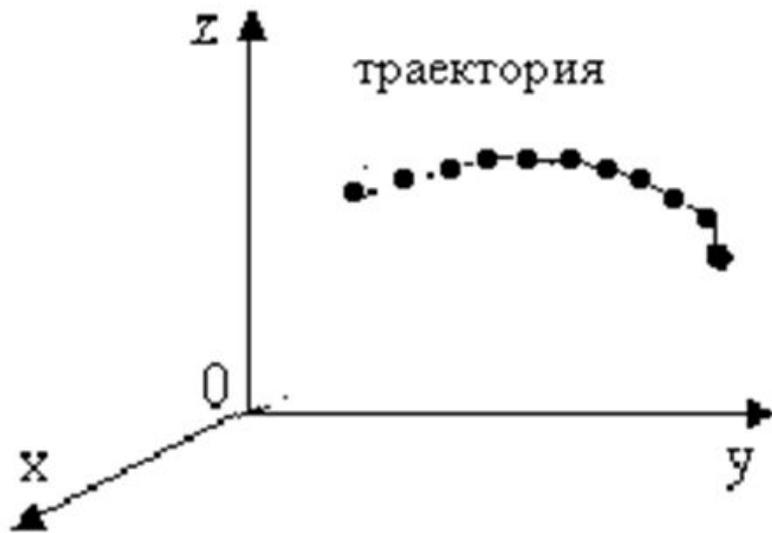
Смешанное произведение 3 векторов.

$(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}])$ – типографский способ записи

$(\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}])$ - при письме от руки

Траектория. Материальная точка.

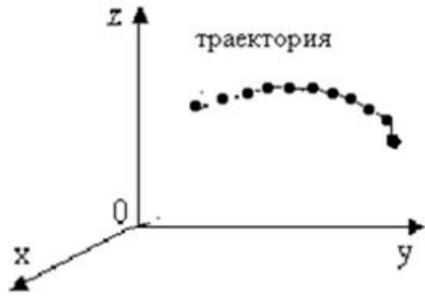
Каждая малая часть тела \Rightarrow геометрическая точка \Rightarrow радиус-вектор этой точки.



Движение тела \Rightarrow изображающая точка \updownarrow свое положение отн. тела отсчета (системы координат) \Rightarrow ее различные положения образуют линию, кот. наз. траекторией. Если

размеры тела \ll характерных размеров для данного движения (напр., радиуса кривизны траектории) \Rightarrow размерами тела пренебрегают \Rightarrow тело представляют в виде модели - материальной точки.

Время. Единица измерения времени.



Движение тела приближенно - движение одной точки.

Движение с-мы тел \approx смена картинок, изображающих их положения друг отн. друга. Смена картинок изображает

течение *времени*.

«Частота смены картинок» - выбор *единицы времени* \Rightarrow найти к.-либо периодический, т.е. регулярно повторяющийся процесс \Rightarrow было выбрано вращение Земли вокруг оси. В системе СИ за единицу времени принята *секунда* - $1/86400$ доля от *средних солнечных суток*. (Солнечные сутки - промежуток времени между двумя полуднями.) Способы хранения эталона секунды: механические \rightarrow кварцевые хронометры \rightarrow мазер на ^{133}Cs : $1 \text{ с} \approx 9.192 \cdot 10^9$ периодов колебания этого мазера.

Уравнение траектории

Уравнение траектории:

$$y = y(x)$$

$$z = z(x)$$

В параметрическом виде (u – параметр):

$$x = x(u)$$

$$y = y(u)$$

$$z = z(u)$$

Если параметр – время, то получится кинематическое уравнение движения:

$$x = x(t)$$

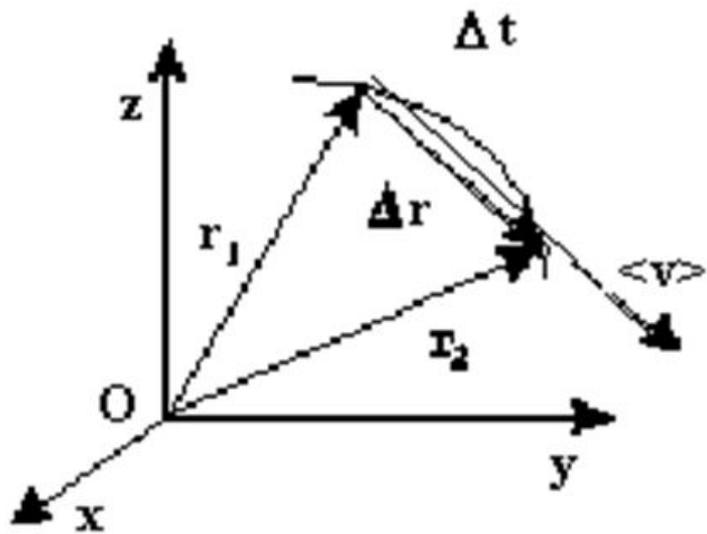
$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Вектор скорости



Выбрать малый промежуток времени $\Delta t \Rightarrow$ приращение радиус-вектора точки $\overline{\Delta r}$ – вектор перемещения.

Деление вектора $\overline{\Delta r}$ на скаляр Δt : вектор средней скорости:

$$\langle \vec{v} \rangle = \overline{\Delta r} / \Delta t$$

Направление вектора $\langle \vec{v} \rangle$ такое же, как у $\overline{\Delta r}$.

Его проекции типа:

$$\langle v_x \rangle = \Delta x / \Delta t$$

$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$ проекции вектора мгновенной скорости \vec{v} :

$$v_x = \lim \Delta x / \Delta t$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = d\vec{r} / dt$$

Ед. измерения скорости в системе СИ является м/с.

Вектор \vec{v} направлен по касательной к траектории.

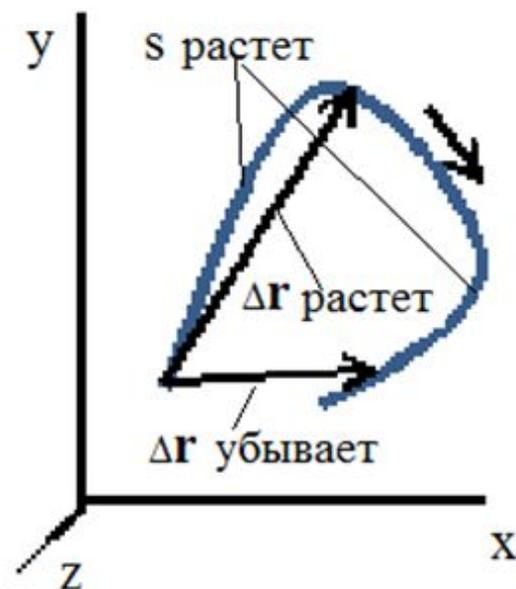
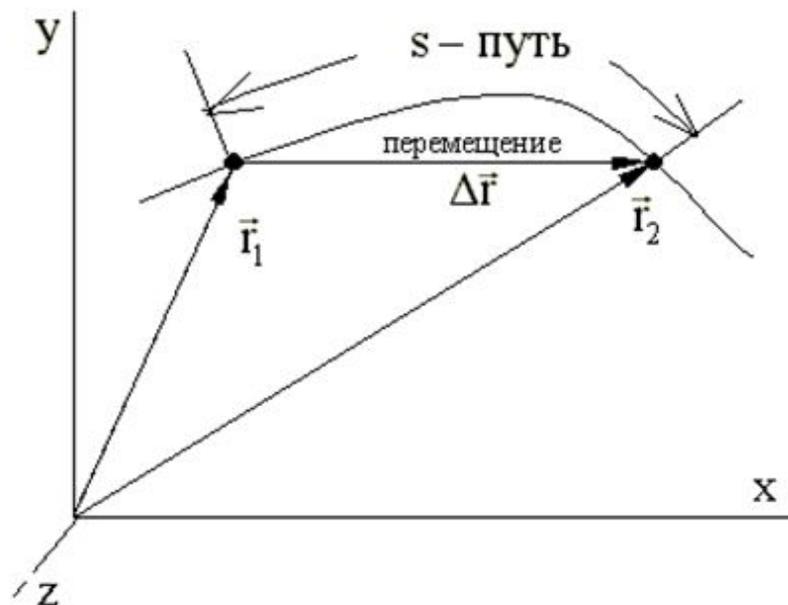
Скорость, путь

Абс. вел-на скорости \Leftrightarrow длины пути s : $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$

Длина пути отличается от вектора перемещения и даже от его модуля.

1) из рисунка путь длина дуги траектории, а модуль вектора перемещения – ее хорда.

2) $v \geq 0 \Leftrightarrow s \uparrow$ со временем, а $|\vec{\Delta r}|$ может \downarrow



Ускорение: вектор, тангенциальное, нормальное

Промежуток $\Delta t \Rightarrow$ приращение вектора скорости $\Delta \vec{v}$.

Вектор $\langle \vec{w} \rangle = \Delta \vec{v} / \Delta t$ наз. *средним ускорением* точки за промежуток Δt .

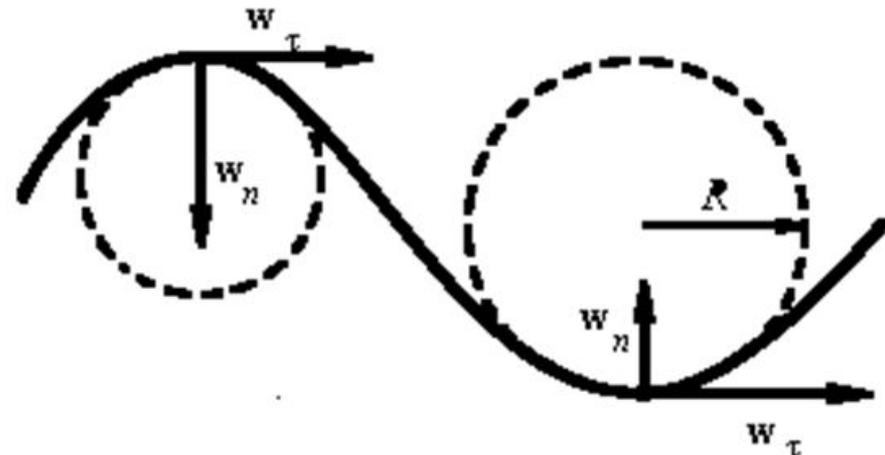
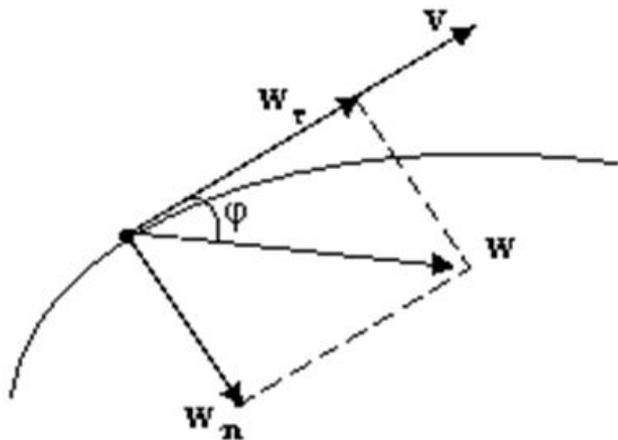
Его проекции $\langle w_x \rangle = \Delta v_x / \Delta t$ и т.п.

При $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$ проекции *вектора мгновенного ускорения* \vec{w} :

$$w_x = \lim \Delta v_x / \Delta t$$

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} = d\vec{v} / dt$$

Естественная с-ма координат: оси по касательной и по нормали к траектории $\Rightarrow \vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ - сумма тангенциальной \vec{w}_τ и нормальной компонент \vec{w}_n



Тангенциальное и нормальное ускорение

Модуль \vec{w}_τ $w_\tau = |dv/dt|$, направление совпадает с \vec{v} , если $dv/dt > 0$ и противоположно ему, если $dv/dt < 0$.

Модуль \vec{w}_n $w_n = v^2/R$, где R – радиус кривизны траектории.

\vec{w}_n направлен к центру кривизны траектории \Rightarrow

$$\vec{w}_\tau \perp \vec{w}_n$$

Модуль вектора ускорения удобно выражать либо через его проекции на координатные оси, либо через тангенциальную и нормальную компоненты:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$$

Ед. измерения ускорения в системе СИ является м/с^2 .

Частные случаи кинематики МТ (1)

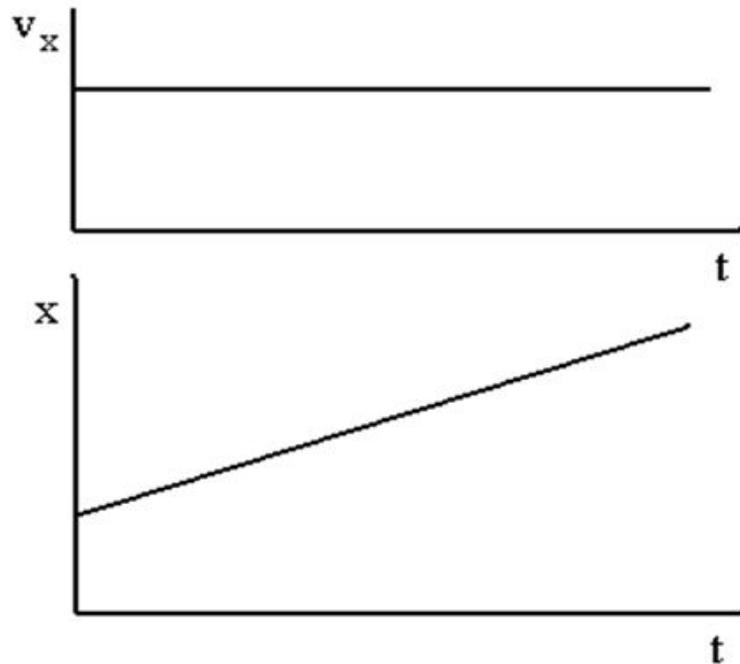
Частные случаи: прямолинейное движение (траектория – прямая, вдоль нее ось Ox) и криволинейное, а также равномерное (с постоянной скоростью) и неравномерное (с меняющейся).

В последнем случае можно выделить равнопеременное движение, когда постоянно ускорение, или его модуль, или одна из компонент.

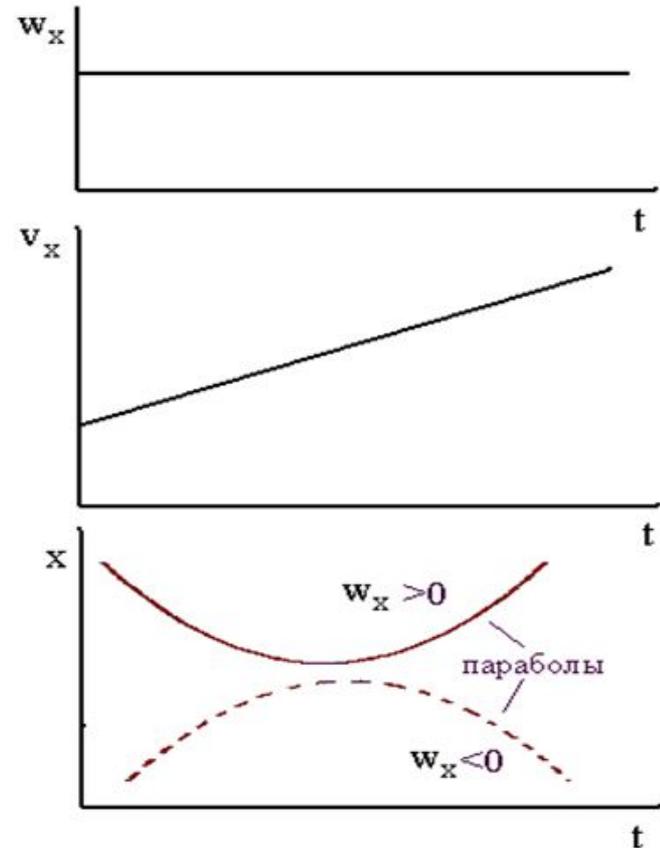
	Равномерное	Неравномерное
Прямолинейное	$\mathbf{v} = \text{const}; \mathbf{w} = 0;$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t;$ $s = v t$	$\mathbf{w} \neq 0; w = w_\tau \neq 0;$ При $\mathbf{w} = \text{const}$ $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} t;$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{w} t^2$
Криволинейное	$v = \text{const};$ $\mathbf{v} \neq \text{const};$ $\mathbf{w}_\tau = 0; \mathbf{w} = \mathbf{w}_n$	$\mathbf{w}_\tau \neq 0; \mathbf{w}_n \neq 0;$ $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n;$ $\mathbf{v} \neq \text{const}$

Частные случаи кинематики МТ (2)

Графики равномерного прямолинейного движения



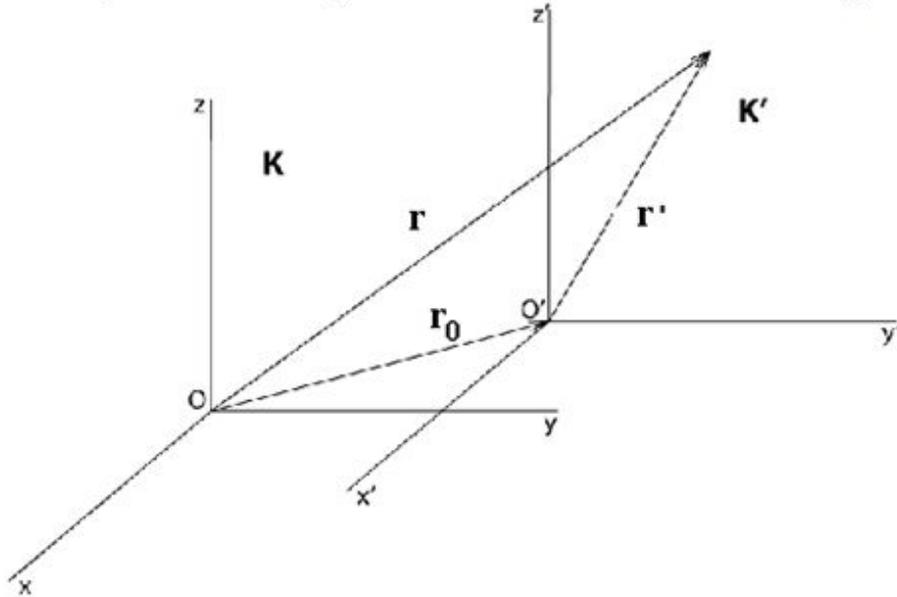
Графики неравномерного прямолинейного движения



Преобразования Галилея, координаты

Выбор системы координат – произвольный (направления осей, тело отсчета).

Соотношения координат и скоростей МТ в разных системах координат (системах отсчета) - преобразование Галилея.



Две СО K и K' с параллельными осями.

Отн. K начало координат K' движется со скоростью \mathbf{u} , а некая частица со скоростью \mathbf{v} . Тогда координаты частицы в K' выражаются через координаты в системе K :

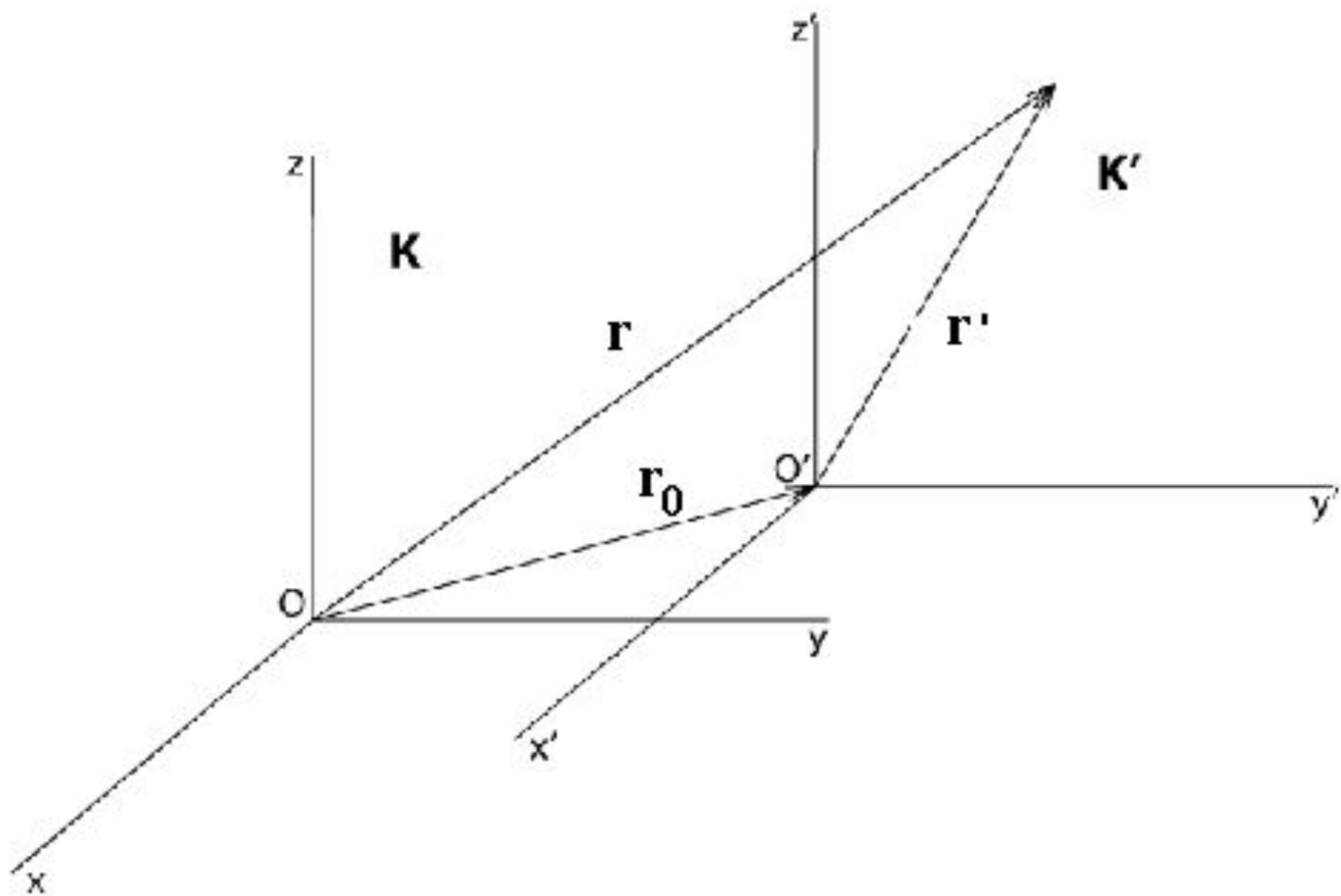
$$x' = x - x_0 - u_x t$$

$$y' = y - y_0 - u_y t$$

$$z' = z - z_0 - u_z t$$

В векторной форме: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u} t$.

\mathbf{r}_0 – радиус-вектор начала координат K' при $t = 0$.



Преобразования Галилея, скорости

Проекции скорости преобразуются по правилу:

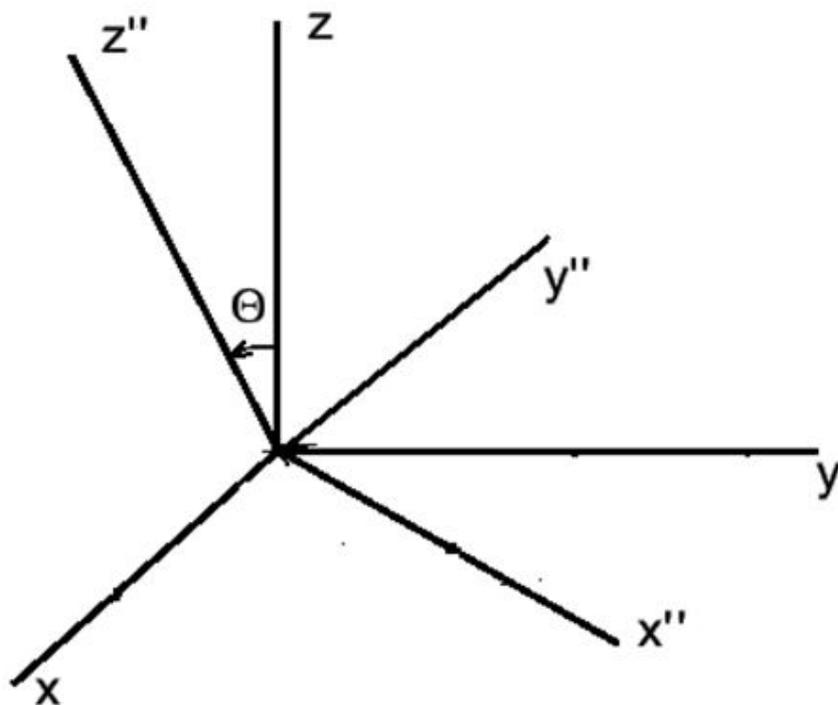
$$v_x' = v_x - u_x$$

$$v_y' = v_y - u_y$$

$$v_z' = v_z - u_z$$

В векторной форме: **$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$**

Преобразования вращения (поворота)



Если оси \nparallel , то нужно сначала (или после) провести преобразование поворота координатных осей.

В повернутой K'' «дважды штрихованной», СО координаты задаются по правилу:

$$\vec{r}'' = \hat{T} \vec{r}$$

\hat{T} – тензор вращения (или матрица направляющих

косинусов)

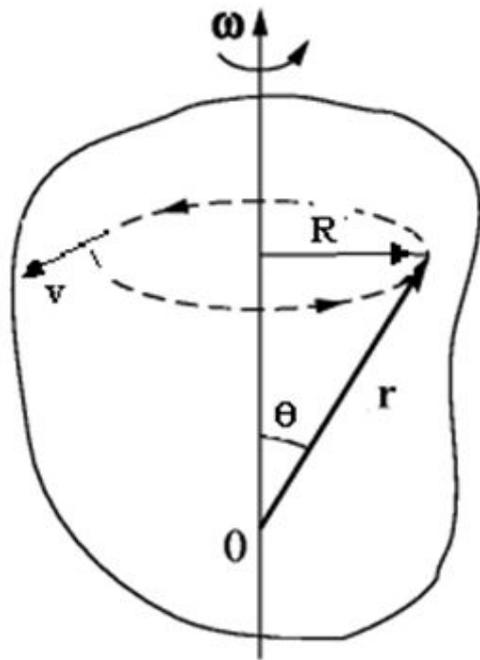
$$x'' = x \cos(x, x'') + y \cos(y, x'') + z \cos(z, x'')$$

$$y'' = x \cos(x, y'') + y \cos(y, y'') + z \cos(z, y'')$$

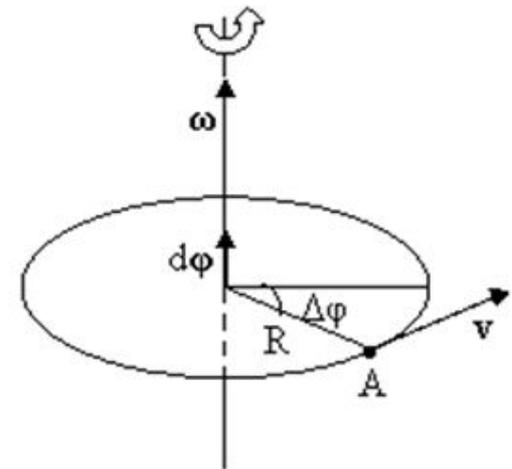
$$z'' = x \cos(x, z'') + y \cos(y, z'') + z \cos(z, z'')$$

Аргументы косинусов – углы между парами (их 9 штук) осей. На рисунке показан угол (z, z'') .

Угловая скорость вращения



При вращении тела вокруг фиксированной оси: модель *абсолютно твердого тела*, т.е. тела, в кот. при движении расстояния между \forall парами точек не меняются. Фиксированная ось вращения - все точки оси неподвижны в выбранной СО. Расстояния от \forall точки до оси неизменны $\Rightarrow \forall$ точка тела движется по окружности.



Если за Δt точка проходит по дуге $\Delta\phi$, то \forall другая точка проходит по такой же дуге \Rightarrow все тело поворачивается на угол $\Delta\phi$.

Средняя угловая скорость вращения $\langle\omega\rangle = \Delta\phi/\Delta t$, кот. при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в *мгновенную угловую скорость вращения*:

$$\omega = d\phi/dt$$

Векторы угловой скорости и углового ускорения

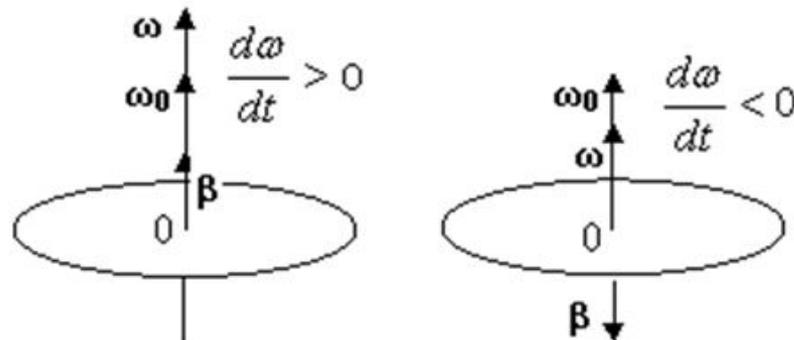
Линейная скорость точки: $v = dl/dt = R d\varphi/dt = R \omega$.

\mathbf{v} и \mathbf{r} – векторные величины, причем $\mathbf{v} \perp \mathbf{r} \Rightarrow$ величине ω сопоставляется вектор $\boldsymbol{\omega}$, такой что $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$, а направление определяется по правилу буравчика, кот. вращается вместе с телом:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

Это соотношение годится не только для вектора \mathbf{R} , проведенного из центра окружности, по кот. движется точка, но из \forall точки на оси, т.к. $R = r \sin\theta$.

Если $\omega \uparrow$ со временем, то определяют *вектор углового ускорения* $\boldsymbol{\beta}$: $|\boldsymbol{\beta}| = |d\omega/dt|$, а направление совпадает с $\boldsymbol{\omega}$, если $d\omega/dt > 0$, и противоположно, если $d\omega/dt < 0$.



Динамика

Кинематика - траектории, скорости, ускорения, но не причины.

Динамика - раздел механики, изучающий причины движения. Динамика рассматривает движение тел с пом. модели, основные положения кот. можно сформулировать следующим образом:

- 1. если тело достаточно мало, то его движение подчиняется законам движения материальной точки (МТ);
- 2. основные законы движения МТ - 3 закона Ньютона (ЗН);
- 3. если тело большое, то его мысленно разбивают на части, каждую из которых можно считать МТ;
- 4. взаимодействие между частями крупного тела - с помощью тех же законов Ньютона.

Опыт \Rightarrow движение МТ полностью описывается 3 ЗН (конец 17 века. «Математические начала натуральной

3 закона Ньютона

I. Всякое тело продолжает оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения пока и поскольку не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

II Изменение количества движения тела происходит пропорционально действующей силе и по направлению той прямой, по которой приложена эта сила.

III Действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие, иначе - воздействия 2 тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

1 закон Ньютона

Аристотель: естественное состояние \forall тела - состояние покоя. Чтобы привести тело в движение и поддерживать его, нужна внешняя причина (наз. силой). Сила исчезает \Rightarrow тело возвращается в состояние покоя.

Галилей (нач. 16 в.): нет принципиальной разницы между состояниями покоя и равномерного прямолинейного движения (РПД). Если корабль движется равномерно и прямолинейно относительно берега, то тело покоится на его палубе, но движется равномерно и прямолинейно относительно берега.

Все физические процессы в СО протекают одинаково, независимо от того, неподвижна система или находится в состоянии РПД.

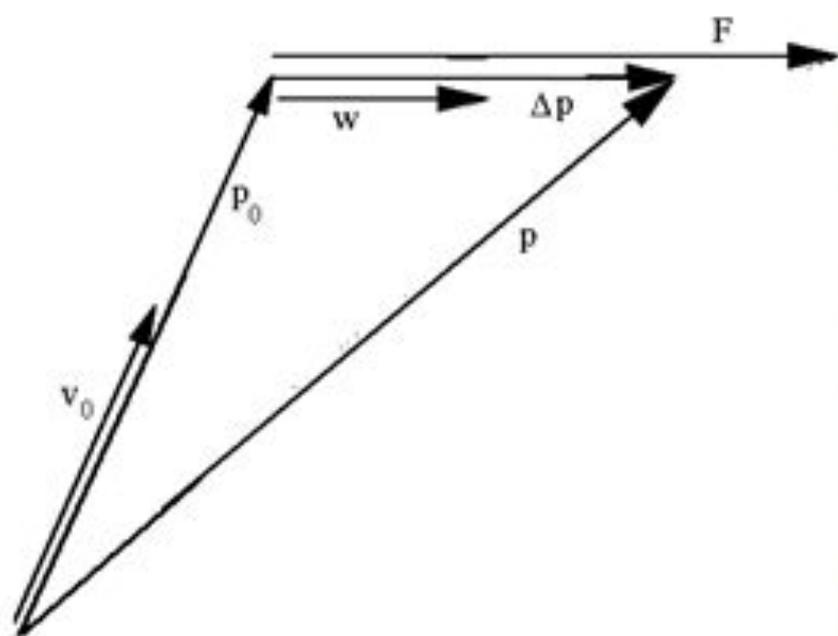
Это (принцип относительности Галилея), уравнивает состояния покоя и равномерного прямолинейного движения и является частью 1 ЗН.

Второй смысл этого закона - при рассмотрении 2 ЗН.

2 закон Ньютона

- 1 ЗН \Rightarrow состояние покоя или РПД «естественное» (без внешних причин)
2 ЗН - изменение этого состояния при взаимодействии с другими телами.
В нем новая ФВ – *количество движения, или импульс тела \mathbf{p}* :

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$



Импульс содержит скорость \mathbf{v} (известна из кинематики), а массу m Ньютон определял, как меру количества вещества в теле.

Эта мера м. б. разной – по объему, по числу молекул, по теплотворной способности и т.д.

Изменение импульса пропорционально *силе \mathbf{F}* :

$$d\mathbf{p}/dt \sim \mathbf{F}$$

Все величины векторные (в законе речь идет о направлениях).

Это соотношение удобно

воспользоваться более привычной формой:

$$d\mathbf{v}/dt \sim \mathbf{F}/m \text{ или } \mathbf{w} \sim \mathbf{F}/m$$

В ЛЧ – известное из кинематики ускорение, а в ПЧ – 2 неопределенных, масса и сила.

Понятия силы и массы

Сила? Ньютон: тело испытывает ускорение \Rightarrow на него воздействуют другие тела, а мерой этого воздействия является F – сила. Происхождение м. б. разным.

Как сравнивать разные силы?

Масса? Ньютон: мера количества вещества в теле, чем больше в теле вещества, тем меньшее ускорение оно получит.

Эйлер (около 1740): масса - ***мера инертности тела***, т.е. способности сохранять свою скорость под воздействием силы.

Масса

2 тела получают одинаковое ускорение под действием одной и той же силы \Rightarrow у них одинаковая масса.

Масса - особая ФВ \Rightarrow нужна единица измерения, т.е. нужно указать тело, масса которого считается единичной.

В СИ: единица массы *килограмм* (кг) - масса 1 дм³ чистой воды при 4^oC и нормальном давлении. [m] = кг

Эталон из сплава платины и иридия.

Диапазон: от 10^{-30} кг для электрона до 10^{48} кг для Галактики (человек - 10^2 кг, Земля - 10^{25} кг, Солнце - 10^{30} кг).