

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

(

Выполнила: Адерман Виктория
Студентка группы БН-41

Один из важнейших аспектов модернизации математического образования в основной школе состоит во включении в школьные программы новой стохастической линии *«Анализ данных»*, в которой *представлены основы вероятностно-статистических подходов к анализу явлений повседневной жизни.*

Изучение элементов стохастики предусмотрено государственным стандартом общего образования второго поколения, начиная с 5-го класса.

В примерных программах по математике для начальных классов в стандартах второго поколения выделена новая содержательная линия «Работа с данными», ориентированная на развитие у обучающихся умения работать с математической информацией на основе содержания всех разделов курса математики.

Е.П.Виноградова, Н.Б.Истомина, Л.Г.Петерсон, В.Н.Рудницкая считают оправданным начинать пропедевтику элементов стохастики в начальной школе, при этом, не вводя понятий или способов решения задач, недоступных восприятию младших школьников.

Стохастика (греч. «stocaistikoz», «искусный в стрельбе по цели», от «stokos», «цель») – метод, основанный на принципе вероятности.

В математике под *стохастическим подходом* считается метод, в котором величины извлекаются из соответствующих последовательностей совместно распределенных случайных величин.

Разделы стохастики в начальной школе

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это область математики, изучающая способы построения подмножеств некоторого конечного множества, причем таких, которые удовлетворяют наложенным ограничениям.

Комбинаторика является основой для изучения теории вероятностей и математической статистики.

Разделы стохастики в начальной школе

2. Теория графов

Теория графов – раздел дискретной математики, особенностью которого является геометрический подход к изучению объектов.

Широкое применение методы теории графов находят в таких областях прикладной математики, как: программирование, теория конечных автоматов, в решении вероятностных и комбинаторных задач.

Успех применения графов можно объяснить тем, что они являются удобным языком для формулировки и эффективным инструментом для решения задач.

Разделы стохастики в начальной школе

3. Элементы теории вероятностей

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности.

В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

Разделы стохастики в начальной школе

4. Наглядная описательная статистика

Математическая статистика – это раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Обе эти математические дисциплины изучают массовые случайные явления.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-либо образом обработать: упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде.

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики используются для научных и практических выводов.

Подходы к внедрению в практику содержательной линии «Элементы стохастики» в начальной школе

В исследовании **Е.Е. Белокуровой** обоснована роль комбинаторных рассуждений:

- в совершенствовании умственных операций: *анализа, синтеза, сравнения, обобщения и абстрагирования;*
- в развитии действенного, образного и словесно-логического компонентов мышления и их взаимосвязи;
- в формировании таких качеств мышления как вариативность, гибкость и критичность.

Подходы к внедрению в практику содержательной линии «Элементы стохастики» в начальной школе

В исследовании **Е.П. Виноградовой** впервые комбинаторные задачи рассмотрены как средство усвоения программного содержания развивающего курса математики в начальных классах, разработана система комбинаторных задач, сориентированная на усвоение основных вопросов начального курса математики.

Е.П. Виноградова разработала методику обучения *решению комбинаторных задач*, нацеленных:

- на развитие мышления младших школьников,
- на расширение их представлений о способах моделирования (таблицы, графы, «дерево» возможных вариантов),
- на овладение младшими школьниками доступными способами решения комбинаторных задач.

В образовательной системе «Начальная школа XXI век» В.Н. Рудницкая в качестве модели для фиксации важнейших свойств отношений использует графы.

На уроках по теме «Сравнение чисел» вводятся *цветные стрелки* для обозначения слов «больше» и «меньше».

В первом классе на уроках графы используются при высказываниях типа «Петя моложе Ани», «Платье дороже юбки, а юбка дороже блузки», «5 меньше 7 и 7 меньше 10».

При изображении графов используются цветные стрелки: **синяя** заменяет слово «меньше», а **красная** – слово «больше».

Граф определяется как графический рисунок, на котором изображены точки и соединяющие их стрелки.

Во втором классе приобретает новое содержание работа с графами. Например, при решении задачи «Карандаш дороже тетради, блокнот дешевле тетради, блокнот дороже ручки, линейка дешевле ручки. Какой предмет дороже из остальных?» достаточно заменить слово «дешевле» словом **дороже** и изобразить все высказывания **красными** стрелками. По построенному графу можно легко ответить на вопрос (карандаш **дороже** каждого из остальных предметов).

В.Н. Рудницкая считает, что **графы** позволяют сделать весьма доступным для учащихся вопрос о свойствах отношений.

Глядя на графическое изображение того или иного отношения, дети учатся проверять, обладает или не обладает, данное отношение указанным свойством; полученный опыт позволяет им выделять из известных отношений те, которые обладают общими свойствами.

Применение графов позволяет выделить такие свойства отношений, которые помогают учащимся овладеть способами решения широкого круга практических задач. Так, используя графы и свойства отношений, учащихся можно научить решать простейшие уравнения, логические задачи.

В.Н. Рудницкая предлагает включать важнейшие свойства математических отношений: *рефлексивность, симметричность и транзитивность* в математический словарь учащихся в 4 классе.

В учебнике и в рабочих тетрадях в данной системе предлагаются следующие виды упражнений:

1. *Дан граф какого-либо отношения. Нужно определить, обладает или не обладает это отношение указанным свойством (рефлексивности, симметричности или транзитивности). Привести соответствующие обоснования.*

2. *Построить на данном графе недостающие ребра так, чтобы отношение обладало указанным свойством.*

3. *Даются наиболее распространенные отношения (больше, меньше, равно, короче, выше и т.д.) и относительно каждого из них учащиеся решают вопрос о том, какими из трех основных свойств обладает каждое из этих отношений.*

Упражнения третьего вида полезны и позволяют обратить внимание учащихся на отношения, обладающие одними и теми же свойствами. Знание свойств отношений предоставляют учащимся возможность приобрести некоторый опыт в проведении простейших доказательств.

В программе по математике в образовательной системе «Школа 2100» (Т.Е. Демидова, С.А. Козлова, А.П. Тонких) выделена содержательная линия «Элементы стохастики».

В содержательной линии «Элементы стохастики»:

- 1) рассматривается запись и чтение информации в виде таблиц, графов, линейных, столбчатых и круговых диаграмм;
- 2) изучается ряд комбинаторных задач на нахождение числа перестановок, количества пар в небольших множествах (сочетания по 2), на перебор вариантов с помощью дерева выбора, на применение принципа умножения;
- 3) дается представление о сборе и первичной обработке статистической информации;
- 4) формируются понятия «чаще», «реже», «невозможно», «возможно», «случайно»;
- 5) вводится понятие *случайного эксперимента*, его исходов, дается представление *случайного события*.

В образовательной системе «Школа 2100»:

- В первом классе учащиеся знакомятся с начальными представлениями о графах.
- Во втором классе в учебнике «Моя математика», начинается знакомство детей с элементами математической статистики: предлагается информация для чтения, заданная с помощью линейных диаграмм; предлагаются задания, связанные с записью данных, содержащихся в тексте, в таблицу; формируются первоначальные представления о сборе и накоплении данных. В конце второго класса учащиеся должны уметь находить число перестановок не более чем из трех элементов с помощью таблиц и графов.
- В третьем классе должны уметь использовать упорядоченный перебор вариантов, используя дерево выбора; уметь решать комбинаторные задачи на перестановку из трех элементов с помощью правила произведения и удобным для себя способом (в том числе и с помощью таблиц и графов).

Результаты анализа современных учебников математики для начальной школы позволяют констатировать, что *комбинаторная, вероятностная, статистическая компоненты содержания представляют собой некоторый минимум, доступный младшим школьникам и достаточный для формирования у них комбинаторного стиля мышления, вероятностной интуиции и первоначальных вероятностно-статистических представлений.*

Характеристика элементов стохастической линии «Анализ данных» в начальных классах

Элементы комбинаторики

В начальный курс математики включены комбинаторные задачи. Решать простейшие комбинаторные задачи является требованием Государственного образовательного стандарта второго поколения. Решение таких задач дает возможность расширить знания учащихся о самой задаче, о методах решения задач.

Комбинаторные задачи, включенные в курс математики, обладают рядом ценных качеств, которые полезны в образовательном процессе:

- 1) на комбинаторных моделях четко прослеживаются этапы использования математики в решении практических задач;
- 2) комбинаторные модели взяты из жизни;
- 3) наш мир построен на вероятности, нам часто приходится сталкиваться с ситуациями, разрешить которые жестко детерминированным способом невозможно.

Характеристика элементов стохастической линии «Анализ данных» в начальных классах

Элементы комбинаторики

Комбинаторные задачи, включенные в курс математики, *задачи, цель которых – определение числа способов того или иного действия*, обладают рядом ценных качеств, которые полезны в образовательном процессе:

- 1) на комбинаторных моделях четко прослеживаются этапы использования математики в решении практических задач;
- 2) комбинаторные модели взяты из жизни;
- 3) наш мир построен на вероятности, нам часто приходится сталкиваться с ситуациями, разрешить которые жестко детерминированным способом невозможно.

Комбинаторные задачи, предлагаемые в начальных классах, как правило, носят практическую направленность и основаны на реальном сюжете.

В методике математики имеются различные классификации комбинаторных задач, для которых используют различные основания.

Виды комбинаторных задач

Основание классификации: характер требования задач

1. Нахождение комбинации элементов, обладающих заданными свойствами.
2. Доказательство существования или отсутствия комбинаций элементов с заданными свойствами.
3. Нахождение общего числа комбинаций с заданными свойствами.
4. Выбор оптимального по тем или иным параметрам, критериям решения.

Основание классификации: сложность перебора

1. Задачи, в которых нужно произвести перебор всех возможных вариантов.
2. Задачи, в решении которых использовать прием полного перебора не целесообразно и нужно сразу исключить некоторые варианты, не рассматривая их (т.е. осуществить сокращенный перебор).
3. Задачи, в решении которых использовать прием полного перебора не целесообразно и нужно сразу исключить некоторые варианты, не рассматривая их (т.е. осуществить сокращенный перебор).
4. Задачи, в решении которых операция перебора производится несколько раз и по отношению к разного рода объектам.

Основание классификации: вид комбинации

1. Нахождение числа перестановок без повторений и с повторениями.
2. Нахождение числа размещений без повторений и с повторениями.
3. Нахождение числа сочетаний без повторений и с повторениями.

Основание классификации: способ выбора и упорядочения множеств

1. Задачи на упорядочение элементов множества.
2. Задачи на выбор подмножества и их упорядочение.
3. Задачи на выбор подмножеств.

Методы решения комбинаторных задач

1. «Формальный» метод - решение задачи с помощью использования формул комбинаторики и правил суммы и произведения.

При формировании умения решать комбинаторные задачи «формальным» методом учащиеся знакомят с четкими определениями различных видов соединений (*перестановками, размещениями, сочетаниями*), с выводами соответствующих формул, с правилами суммы и произведения и лишь после этого рассматривают задачи, при решении которых используются полученные результаты.

При «формальном» методе решения необходимо определить вид выборки, подобрать соответствующую формулу, подставить в нее числа и вычислить значение выражения.

Значение выражения – это количество возможных вариантов, сами же эти варианты не образуются.

Методы решения комбинаторных задач

2. «Неформальный» метод - процесс составления различных вариантов.

Понятия «*комбинация*», «*соединения*», «*выборка*» дети осваивают на интуитивном уровне, опираясь на текст и контекст конкретной задачи. *Комбинация* может трактоваться как вид соединения.

При «неформальном» методе решения на первый план выходит сам процесс составления различных вариантов.

Основным методом решения комбинаторных задач в начальных классах является «неформальный» метод, так как он учитывает особенности мышления младших школьников, их опыт и не перегружает учащихся дополнительной информацией, связанной с введением в содержание курса новых понятий.

К «неформальному» методу можно отнести *метод перебора*.

Различают хаотический и систематический (организованный) перебор.

- При *хаотическом переборе* учащиеся осуществляют перебор методом «блуждания» при отсутствии четкого плана в поисках ответа на поставленный вопрос.

Типичными ошибками, которые допускают учащиеся при решении комбинаторных задач с помощью хаотического перебора, являются пропуск вариантов, их повторение.

В начальной школе основным методом признан метод систематического перебора вариантов. Слово «*перебор*» означает разбор всех случаев, т.е. заменяет термин «*полная индукция*».

Основная цель обучения приемам систематического (организованного) перебора заключается в том, чтобы помочь учащимся открыть приемы, с помощью которых можно было бы не пропустить и не повторить несколько раз одни и те же варианты.

С методической точки зрения прием перебора имеет ряд достоинств:

- обучение детей умению выделять основные элементарные действия, из которых состоит данное и планировать последовательность выделенных действий,
- накапливать опыт практического решения конкретных задач, что служит основой для введения в дальнейшем комбинаторных понятий и формул для вычисления различных соединений.

Е.Е. Белокурова выделила три этапа обучения детей решению комбинаторных задач: *подготовительный, основной и этап отработки умения выполнять организованный перебор.*

Название этапа	Цель этапа	Приемы выполнения этапа
Подготовительный этап	Формирование мыслительных операций в процессе решения комбинаторных задач с помощью хаотического перебора	Драматизация, обыгрывание задачи; построение модели (схема, рисунок; решение задачи с помощью практического действия
Основной этап	Ознакомление учащихся с методом систематического перебора всех возможных вариантов	Построение модели (таблица, граф, дерево-возможных вариантов) под руководством учителя
Этап отработки умения выполнять организованный перебор	Отработать у учащихся умения выполнять систематический перебор	Построение модели (таблица, граф, дерево-возможных вариантов) самостоятельно

Первый этап – подготовительный

На данном этапе учащиеся приобретают опыт образования объектов из отдельных элементов, осуществляя случайный перебор. От них не сразу требуется найти все возможные варианты решения задачи.

К концу подготовительного этапа учащиеся должны:

- *знать в неявном виде определение комбинаторных задач и то, чем они отличаются от других математических задач;*
- *уметь решать задачи практическим перебором самостоятельно и неорганизованным перебором под руководством учителя.*

Второй этап - основной

Этапы формирования умения выполнять организованный перебор (по П.Я. Гальперину):

1. Предварительное ознакомление с приемом систематического перебора, создание положительной мотивации, эмоциональной готовности учащихся.

2. Составление схемы – ориентировочной основы перебора. В качестве ориентировочной основы перебора можно использовать таблицы и графы, т. к. данные приемы перебора позволяют решать задачи с большим число возможных вариантов, при этом наглядно показывая процесс решения задачи.

3. Организация перебора практически в материальном виде. Все операции, входящие в действие перебора, выполняются развернуто. Элементы действий фиксируются в форме внешней речи, с целью осознания общего способа действия.

4. Выполнение перебора практически с частичным сворачиванием операций, элементы действий частично фиксируются во внешней речи.

5. Выполнение перебора в умственном плане с частичной фиксацией во внешней речи.

6. Выполнение перебора как умственного действия.

Второй этап - основной

Для подведения детей к идее организованного перебора опишем ситуацию (по Е. Е. Белокуровой):

Три девочки: Маша, Шура и Ульяна едут в электричке на дачу. Они сидят на одной скамейке. (Трое детей выходят к доске и садятся на стулья в любом порядке). Детям нужно было проехать 8 остановок. Чтобы не было скучно ехать, они решили на каждой остановке меняться местами. Ставится вопрос: «Смогут ли дети каждый раз меняться местами так, чтобы их новое расположение оказалось все время отличным от предыдущих?»

Ученики предлагают различные варианты расположения детей. Пока перебор осуществляется случайным образом, хаотично. После того, как найдены 6 расположений, ученики стараются еще составить другой, новый вариант. Все их попытки сделать это, не приводят к успеху. Встает вопрос: «Почему они не нашли седьмой вариант?» Чтобы ответить на него, учащимся предлагается рассмотреть составленные 6 вариантов, очень похожие друг на друга. Например, можно выделить такие пары:

М.Ш.У.
М.У.Ш.

Ш.У.М.
Ш.М.У.

У.М.Ш.
У.Ш.М.

Второй этап - основной

Полученная последовательность вариантов анализируется. Учащиеся замечают, что все девочки сидели у окна и, когда одна из них сидит у окна, то две другие могут разместиться только двумя различными способами.

Таким образом, дети убеждаются в том, что можно составить 6 различных вариантов, других быть не может.

При выполнении данного задания ученики должны осознать общий способ действия. В данном случае нужно придерживаться определенного способа образования расположения детей. Например:

- если у окна сидит Маша, то Ульяна и Шура могут сесть двумя различными способами;
- если у окна сидит Шура, то Ульяна и Маша могут сесть двумя способами;
- если у окна сидит Ульяна, то Маша и Шура могут сесть двумя способами.

Важно показать, что, придерживаясь данного способа, мы не упустили ни одного случая и ни один из случаев не повторили дважды. Постепенно дети убеждаются в пользе систематического перебора и приучаются его использовать.

Второй этап - основной

Например, при решении задачи: *«Прямоугольник состоит из трех квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты тремя красками: красного, зеленого и синего цветов?»* учащимся предлагается перебор, предварительно установив порядок перебора:

1. Пусть первый квадрат раскрашен красным цветом, тогда остальные квадраты можно раскрасить двумя способами: синим и зеленым, зеленым и синим.

2. Пусть первый квадрат раскрашен зеленым цветом, тогда остальные квадраты можно раскрасить двумя способами: красным и синим, синим и красным.

3. Пусть первый квадрат раскрашен синим цветом, тогда остальные квадраты можно раскрасить двумя способами: красным и зеленым, зеленым и красным. В результате получаем всего 6 способов.

Постепенно практические действия должны переходить в сферу умственных действий. Данную задачу можно решить с помощью только одного рисунка. При этом учащиеся должны рассуждать следующим образом: пусть первый квадрат раскрашен красным цветом, тогда остальные квадраты можно раскрасить двумя способами: синим и зеленым, зеленым и синим. Но первый квадрат можно раскрасить любым из трех данных цветов, и каждый из этих случаев дает два способа раскраски остальных квадратов. Всего получится способов – $2 \cdot 3 = 6$.

Третий этап – отработка умения выполнять организованный перебор

Третий этап – это решение комбинаторных задач с помощью таблиц и графов.

Для облегчения систематического перебора возможных вариантов решения задач в математике используются следующие средства: *таблицы, графы, «дерево» возможных вариантов и схематические рисунки.*

Практика обучения решению комбинаторных задач учащихся начальных классов показывает, что непосредственный перебор всех возможных вариантов в некоторых случаях может быть затруднен. Решение комбинаторных задач с использованием таблиц и графов является основным содержанием третьего этапа, выделяемого в обучении младших школьников решению комбинаторных задач.

Перед тем, как знакомить учащихся с новым способом решения комбинаторных задач – с помощью *таблиц*, необходимо актуализировать знания детей о таблицах, выделить существенные признаки таблиц и сформулировать определение понятия «*таблица*», например, такое: «*таблица – это перечень сведений, числовых данных, приведенных в определенную систему и разнесенных по строкам и столбцам*». Таблица является ориентировочной основой перебора.

Сначала учащимся можно предложить готовую составленную таблицу. Рассматривая таблицу, учащиеся выделяют ее элементы и различные принципы ее составления по строкам и столбцам.

В целях освоения принципа составления таблиц учащимся предлагаются следующие виды заданий:

1. Проверь, правильно ли составлена таблица?

	Ед.	5	9
Дес.			
2		25	92
7		75	97
1		15	91

2. Запиши в нужные клетки таблицы следующие числа: 23, 32, 11, 31, 22, 33, 13.
Какие числа нужно записать в оставшиеся клетки таблицы?

Дес.	Ед.	1	2	3
1				
2				
3				

Когда учащиеся научатся составлять таблицы, можно переходить к решению комбинаторных задач с помощью составления таблиц. Например, учащимся может быть предложена следующая задача.

Задача 1. Сколько домов можно пронумеровать двузначными числами, составленными из цифр 8, 9, 3, 5?

Ученики чертят таблицу, в верхнюю строку и в первый столбик записали цифры 8, 9, 3, 5.

Ед.	8	9	3	5
Дес.				
8				
9				
3				
5				

Затем учащиеся заполняют таблицу. Числа, получившиеся на пересечении строк и столбцов, искомые номера домов.

Ед.	8	9	3	5
Дес.				
8	88	89	83	85
9	98	99	93	95
3	38	39	33	35
5	58	59	53	55

Ответ: двузначными числами, составленными из цифр 8, 9, 3, 5, можно пронумеровать 16 домов.

Задача 2. В одной деревне мужчин называли именами Иван, Пётр, Михаил. Проживало в этой деревне 8 мужчин. Может ли случиться так, что в деревне нет мужчин с одинаковым именем и отчеством?

Решение. Составим таблицу. Пусть буквы, стоящие в строках обозначают имя, а буквы, стоящие в столбцах отчество. Пары, получившиеся на пересечении строк и столбцов – имя и отчество мужчины.

	И	П	М
И	ИИ	ИП	ИМ
П	ПИ	ПП	ПМ
М	МИ	МП	ММ

Из таблицы видно, что сочетания не совпадают. По таблице подсчитываем число всех возможных отличающихся имен-отчеств. Таких вариантов шесть: Иван Иванович, Иван Петрович, Иван Михайлович, Петр Иванович, Пётр Петрович, Петр Михайлович, Михаил Петрович, Михаил Михайлович. Сравниваем число 6 с числом мужчин в деревне -8 и отвечаем на вопрос задачи.

Ответ: *может случиться, что в деревне нет мужчин с одинаковым именем и отчеством.*

При составлении таблиц необходимо обращать внимание на составленное соединение. При решении некоторых задач из таблицы следует выбирать только те соединения, которые, удовлетворяют условиям задачи.

Задача 3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого и итальянского на любой другой из этих пяти языков?

Решение. Составим таблицу. Пусть буквы, стоящие в строках, обозначают, с какого языка переводить, а буквы, стоящие в столбцах, – на какой язык переводить. Пары, получившиеся при пересечении строк и столбцов, – искомые названия словарей (за исключением пар, стоящих по диагонали).

	Р	А	Ф	Н	И
Р		РА	РФ	РН	РИ
А	АР		АФ	АН	АИ
Ф	ФР	ФА		ФН	ФИ
Н	НР	НА	НФ		НИ
И	ИР	ИА	ИФ	ИН	

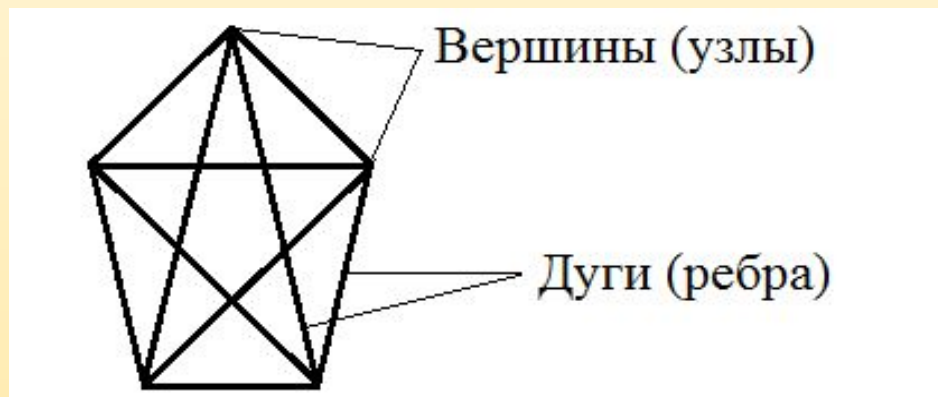
Ответ: надо издать 20 словарей, чтобы можно было выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого и итальянского.

В качестве ориентировочной основы перебора при решении комбинаторных задач можно использовать *графы*.

Во многих прикладных задачах изучаются системы связей между различными объектами. *Объекты* называются *вершинами* и отмечаются точками или кружочками, а *связи между вершинами* – *отрезками*, соединяющими пары точек, и эти *отрезки* называются *ребрами*.

Граф – это совокупность объектов со связями между ними.

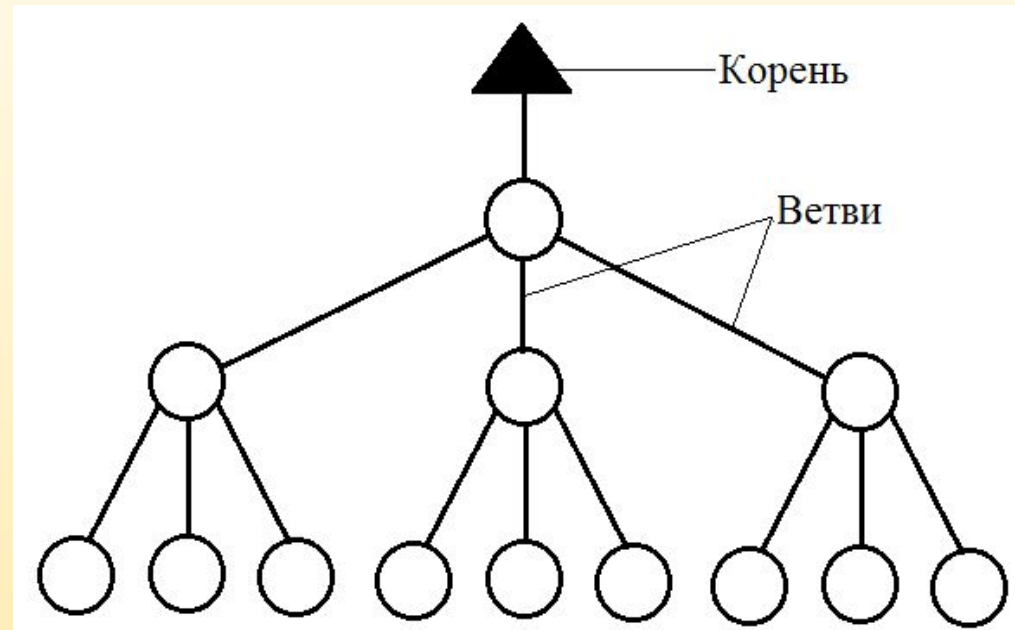
Объекты представляются как вершины или узлы графа, а связи – как дуги или ребра. При этом пара вершин может соединяться несколькими ребрами. Ребром может соединяться и вершина сама с собой (в этом случае ребро называют петлей). При изображении графов на рисунках или схемах ребра могут быть прямолинейными или криволинейными. Длины ребер и расположение вершин произвольны.



В начальном курсе математики для решения задач используются *ориентированные, неориентированные графы и дерево*.

- Граф называется **неориентированным**, если он не имеет ориентированных ребер.
- Граф называется **ориентированным**, если он состоит только из ориентированных ребер (где направление каждого ребра указано стрелкой).

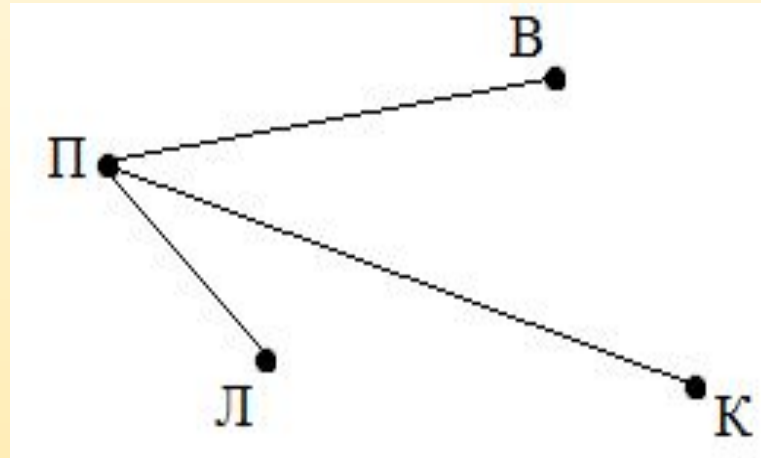
Дерево возможных вариантов – это граф, схема, отражающая структуру задачи, упорядочивания многошагового процесса принятия решений. Ветви дерева отображают различные события, которые могут иметь место, а корень дерева – состояние, в котором возникает необходимость.



Ознакомление учащихся с изображением того или иного графа можно осуществить в процессе решения задачи под руководством учителя. Например, требуется решить задачу:

«В чемпионате класса по шахматам четыре участника: Петя, Вова, Катя и Лена. Сколько будет проведено игр, если каждый должен сыграть с каждым одну партию?»

Сначала выясняется, как можно обозначить каждого участника чемпионата. Рассмотрев разные предложения, приходим к выводу, что быстрее и удобнее изобразить каждого участника точками и точки обозначить следующими буквами: П, В, К, Л. Учитель предлагает изобразить точки по кругу. Далее ученики придумывают, как изобразить на чертеже одну партию игры двух участников. Чтобы показать одну игру, надо соединить две точки ребром. Сначала составляются все игры одного участника (точки соединяются ребрами со всеми остальными). Потом переходят к другому участнику. И так до тех пор, пока каждый участник не сыграет партию с каждым участником чемпионата. По получившемуся графу подсчитываем число игр.



Для формирования умения решать комбинаторные задачи с помощью графов детям предлагаются задания:

- на определение числа комбинаций по готовым рисункам, схемам, графам;
- на обсуждение готовых графов по вопросам;
- на достраивание рисунков и графов так, чтобы они соответствовали тексту задачи;
- на заполнение схемы-графа по тексту задачи;
- на установление соответствия между рисунками, схемами, графами и текстами задач.

На третьем этапе решаются более сложные задачи, и для их решения используется систематический перебор. В решении одной и той же задачи можно по-разному осуществить перебор всех возможных вариантов. На данном этапе можно познакомить учащихся с различными способами организации *перебора*.

С *приемом перебора* тесно связано действие самоконтроля, которое является необходимым компонентом учебной деятельности. Проверку правильности выполнения перебора при решении задачи можно выполнить двумя способами:

- 1) выполнение перебора различными способами;
- 2) выполнение вычислений с помощью формул комбинаторики. Вторым способом может воспользоваться только учитель.

Например, при решении задачи: «Даны числа 5, 3, 4, 8, 2. Составьте все возможные выражения на сложение из двух слагаемых и вычислите их значения. В выражениях нет одинаковых слагаемых. Сколько всего равенств на сложение можно составить?» возможны следующие способы перебора:

Первый способ. Фиксируем первое слагаемое 5, в качестве второго перебираем, числа, стоящие после 5, затем в качестве первого слагаемого фиксируем 3 и перебираем числа, записанные после 3 и т. д.

Получаем выражения: $5 + 3, 5 + 4, 5 + 8, 5 + 2, 3 + 4, 3 + 8, 3 + 2, 4 + 8, 4 + 2, 8 + 2.$

В полученных суммах меняем слагаемые: $3 + 5, 4 + 5, 8 + 5, 2 + 5, 4 + 3, 8 + 3, 2 + 3, 8 + 4, 2 + 4, 2 + 8.$

Второй способ. Фиксируем первое слагаемое 5, в качестве второго слагаемого перебираем числа, записанные после 5, затем в качестве первого слагаемого фиксируем 3 и в качестве второго слагаемого перебираем все оставшиеся числа, начиная с первого числа и т. д.

Получаем следующие выражения: $5 + 3, 5 + 4, 5 + 8, 5 + 2, 3 + 5, 3 + 4, 3 + 8, 3 + 2, 4 + 5, 4 + 3, 4 + 8, 4 + 2, 8 + 5, 8 + 3, 8 + 4, 8 + 2, 2 + 5, 2 + 3, 2 + 4, 2 + 5.$

Третий способ. Фиксируем второе слагаемое 5, в качестве первого слагаемого перебираем числа, записанные после 5, затем в качестве второго слагаемого фиксируем 3 и перебираем все оставшиеся числа в качестве первого слагаемого и т. д.

Получаем выражения: $3 + 5, 4 + 5, 8 + 5, 2 + 5, 5 + 3, 4 + 3, 8 + 3, 2 + 3, 5 + 4, 3 + 4, 8 + 4, 2 + 4, 5 + 8, 3 + 8, 4 + 8, 2 + 8, 5 + 2, 3 + 2, 4 + 2, 8 + 2.$

При трех различных способах перебора мы получили в каждом случае 20 выражений.

Учитель может проверить решение задачи с помощью вычислений по формуле числа размещений, предварительно выполнив переформулировку задачи.

Дано множество $\{5, 3, 4, 8, 2\}$, состоящее из 5 элементов. Требуется определить количество упорядоченных подмножеств, в каждом из которых 2 элемента. Одинаковых элементов в комбинации нет.

Следовательно, надо вычислить число размещений из 5 элементов по 2 элемента без повторений:

$$A^2_5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$$

Для закрепления навыка самоконтроля полезно использовать «задачи – эксперименты».

Например, после решения задачи: *«Составьте все возможные трехзначные числа из цифр 1, 5, 6, если каждая из них может быть использована только один раз»* учащимся предлагается вычислить значение суммы всех полученных трехзначных чисел и результат разделить на значение суммы чисел, обозначенных данными цифрами.

Если задание выполнено верно, то значение частного равно 222.

Действительно, $(156 + 165 + 516 + 561 + 651 + 615) : 12 = 222$. Можно доказать в общем виде, что значение частного равно 222, если в условии задачи будут даны любые цифры, кроме нуля.

С целью закрепления систематического перебора на третьем этапе обучения решению комбинаторных задач целесообразно предлагать учащимся следующие задачи: магические квадраты, лабиринты, головоломки о расстановки цифр, задачи с многовариантными решениями, логические задачи на раскрашивание, задания на преобразования и построения геометрических фигур, задания на логический перебор возможных вариантов.

Таким образом, для формирования у учащихся приема систематического перебора при решении задач целесообразно:

1. Показать необходимость данного умения. Задача учителя состоит в том, чтобы показать учащимся преимущества осуществления рационально организованного перебора. Для повышения активности мыслительной деятельности следует включать учащихся в разрешение проблемных ситуаций.

2. Для обеспечения мотивации использования данного приема предлагать учащимся задания в форме дидактической игры.

3. Обучать некоторым направлениям организации перебора:

- фиксированию элементов и определению порядка перебора;
- установлению закономерностей порядка с использованием действий с предметами, рисунками, таблицами, чертежами, графами;
- использованию контроля и самоконтроля для проверки полученных комбинаций (нет одинаковых случаев и не пропущен ни один случай).

Элементы теории вероятностей

В соответствии с программой по математике, разработанной на основе Государственного стандарта общего образования второго поколения, обучающиеся на опытно-наглядной основе должны познакомиться с основными понятиями теории вероятностей. Такими понятиями являются: *«опыт»*, *«события»*, *«вероятность»*.

Учителю необходимо четко разграничивать понятия **опыта (эксперимента)** и **события**.

Опытом, или **экспериментом**, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление.

Возможный *результат опыта* называют событием. Например, опытом является подбрасывание монеты, а событиями «герб», «цифра на верхней ее стороне» (когда монета упадет). Опытами являются подбрасывание игрального кубика, стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т.п.

Формирование представления о понятии «события» у учащихся начальных классов начинается с рассмотрения простейших вероятностных моделей: подбрасывание игральных кубиков и монет, извлечение шаров из урны – и формирование на интуитивном уровне понятия «опыта», «элементарного события».

Данный подход нашел отражение в образовательной системе «Школа 2100».

Например, при решении «вероятностной» задачи: *«Положи в мешочек из непрозрачного материала три одинаковых шарика: 2 черных и 1 белый. Достань, не глядя, один шарик. Запомни его цвет и положи обратно. Проведи этот опыт 8 раз. Сделай вывод о том, шарик какого цвета ты доставал чаще»*.

При этом были выделены следующие **условия**:

- шарики должны быть по размеру одинаковыми;
- выбирать нужно один шарик, не глядя, не заглядывая внутрь мешочка;
- мешочек должен быть из непрозрачного материала, так чтобы цвет вынимаемого шарика от экспериментатора был скрыт.

В процессе беседы дети приходят к выводу, что определить цвет шарика можно только после окончания опыта. После завершения опыта на основе полученных данных дети делают вывод о том, шарик какого цвета они доставали чаще. Такой опыт может подтвердить понимание смысла случайных событий.

Еще одним элементом, способствующим формированию представлений о понятии «события» является классификация событий по степени их «объективной возможности реализации».

В окружающем мире не существует иных событий, кроме достоверных, невозможных и случайных.

Сначала для формирования представления о видах событий учащимся предлагаются задания, в которых надо определить, при каких условиях данное событие может произойти, а при каких никогда не произойдет. Например:

Задача 4. Подбросили игральный кубик. Как ты думаешь, какое событие может произойти, а может и не произойти в результате данного опыта:

- а) выпадет четное число очков;
- б) выпадет число меньше 1;
- в) выпадет число не меньше 6?

Далее вводятся термины «*достоверное событие*», «*невозможное событие*», «*случайное событие*» и учитель формулирует определения данных понятий.

- Событие называется **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте. Например, если в ящике находятся только голубые шары, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является достоверным событием (в ящике нет шаров другого цвета).
- Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно не может произойти в этом опыте. Так, если в ящике находятся только красные шары, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является невозможным (таких шаров в ящике нет).
- Событие называется **случайным** в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти. Случайными событиями являются «герб» и «цифра на верхней стороне монеты при ее подбрасывании», «выигрыш по билету лотереи», «попадание или промах при стрельбе по мишени».

После введения определений видов случайных событий учащиеся смогут решить **задачу 5**:
Подбрасывают игральный кубик. Определи, какие из перечисленных событий являются достоверными, какие – невозможными, а какие случайными:

- а) кубик упадет на одну из граней;*
- б) кубик, упав, останется на ребре;*
- в) выпадет однозначное число;*
- г) выпадет двузначное число.*

Второе фундаментальное понятие теории вероятности – понятие «вероятности». Это понятие является основой построения всех схем вероятностного характера, описывающих широкий класс случайных явлений.

В настоящее время существует несколько определений понятия «вероятность события»: *философское, статистическое, геометрическое, аксиоматическое и классическое.*

Философский подход к определению вероятности как «меры (количественной оценки) степени возможности события» не является математическим. Здесь подчеркивается объективный, не зависящий от познающего объекта смысл количественной оценки вероятности. Неприемлемо это определение и для реализации целей обучения теории вероятностей в школьном курсе математики.

В начальном курсе математики используется *классическое определение понятия вероятности события*:

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих событию A , к общему числу исходов n :
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Это определение является конструктивным, дает способ вычисления вероятности события и формулируется для так называемых классических экспериментов.

Эксперимент называется классическим, если в результате его проведения реализуется множество событий, удовлетворяющих следующим условиям:

- *все события равновозможны;*
- *они попарно несовместны;*
- *образуют полную группу событий.*

В качестве примера определения вероятности события на основе классического определения вероятности можно рассмотреть задачи на вычисление вероятности выпадения «орла» или «решки» при бросании симметричной монеты.

Задача 6. Одновременно подброшены две монеты. Какова вероятность появления m «орлов» ($m = 0, 1, 2$)?

Решение этой задачи начинается с выявления общего числа исходов. Общее число исходов равно 4: ОО, ОР, РР, РО.

Число благоприятствующих исходов задано: $m = 0, 1, 2$.

$$\underline{\text{Ответ}}: \frac{1}{4} = 1 \quad P_1 = \frac{1}{2} \quad P_2 = \frac{1}{4} \quad .$$

Автор сборника задач по стохастике А.П. Тонких предлагает систему задач, которые помогут школьникам развить интуитивное представление о вероятностной природе реального мира в ходе решения задач, в которых:

- вводятся вероятностные понятия «чаще», «реже», «невозможно», «возможно», «случайно»;
- вводятся вероятностные понятия «достоверное событие», «невозможное событие», «случайное событие»;
- формируются умения находить вероятность какого-либо события.

И.Н. Власова условно выделила *четыре вида вероятностных задач*, знакомство с которыми возможно уже в младших классах.

- К первой группе относятся задачи на классификацию событий. Учащиеся при решении данных задач учатся различать возможные, невозможные и случайные события.
- Ко второй группе относятся задачи на определение исхода в испытаниях. При решении данных задач учащиеся приобретают навыки рационального перебора вариантов исходов при испытаниях, записи вариантов и подсчета их числа.
- К третьей группе относятся задачи на сравнение вероятностей событий. Процесс сравнения вероятностей событий следует рассматривать, как формирование умения у учащихся начальных классов использовать знания о классификации событий в новых условиях.
- К четвертой группе относятся задачи на определение вероятностей событий (относительной частоты). Для их решения требуется не формальное знание о возможных исходах и частоте появления случайного события, а необходимо понимание приемов статистических исследований. Задачи на определение вероятности события являются задачами повышенной трудности, необязательные для решения всеми учащимися.

Наглядная описательная статистика

В программе, разработанной на основе Концепции стандарта второго поколения, предлагается три варианта тематического планирования:

1. Направлен на усиление стохастической направленности курса математики. Этот вариант планирования отводит большее количество часов на раздел «Работа с данными».
2. Особое внимание уделяется переводу информации из текстовой формы в табличную, созданию разных таблиц для одного набора данных, фиксированию результатов сбора, представлению информации в таблице и диаграмме, построению диаграмм по табличным данным.
3. Третий вариант планирования в большей степени, чем первый, ориентирован на развитие у обучающихся умения работать с информацией. Школьники, обучающиеся по третьему варианту, учатся не только обнаруживать и интерпретировать информацию по заданному плану, но и участвуют в самостоятельном составлении различных схем, инструкций, алгоритмов по сбору, анализу и представлению информации.

Первая задача математической статистики - указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате поставленных экспериментов (наблюдений).

При изучении реальных предметов часто бывает невозможным обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выявить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, так как полная проверка приведет к уничтожению всей партии бумаги.

В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, которую называют *генеральной совокупностью*, обследуют ее значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют *выборкой*.

Учащиеся начальных классов с данным понятием знакомятся в неявном виде в процессе решения статистических задач. Например, учащимся предлагается выборка определенных объектов и ряд вопросов, на которые они должны ответить.

Задача 7. На двух книжных полках стоят книги: сказки, рассказы, повести.

1. Расскажи с помощью таблицы: а) на какой полке меньше всего книг с рассказами; б) на какой полке больше всего книг со сказками; в) на какой полке больше книг.
2. Сравни число книг со сказками и книг с повестями.

	Сказки	Рассказы	Повести
Первая полка	7	21	8
Вторая полка	9	12	13

Цель этого задания: научить младших школьников «читать» информацию, представленную в таблице, сравнивать между собой данные и делать определенные выводы.

Далее учащимся можно предложить задачу, в которой требуется результаты выборки представить в виде таблицы.

Задача 8. В секции женской обуви отдела «Обувь для взрослых» в течение дня производился учет размеров купленной обуви. Были получены следующие результаты: 37, 36, 41, 38, 38, 37, 37, 35, 37, 39, 37, 40, 36, 35, 37, 37, 35, 37, 38, 38, 37, 37, 35, 37, 39, 37, 36, 37, 37, 40, 37, 36, 38, 39.

Представьте эти результаты в виде таблицы. Какой размер обуви чаще пользовался спросом, а какой – реже?

Размер	Количество купленной обуви	Итого
35		
36		
37		
...		

В сборнике задач по стохастике имеются задания, требующие сбора, упорядочивания, кодирования и сохранения в удобной форме информации. Например:

Задача 9. Проведи опрос среди одноклассников, где они были в воскресенье, и заполни таблицу аналогичную той, что показана на рисунке. Сделай вывод о том, какое место отдыха было наиболее популярным.

Место отдыха	В парке	В театре	Дома	На даче	В лесу	В гостях
Число учащихся						

На основе анализа учебников и методических пособий мы выделили следующие виды упражнений, направленные на формирование умений переводу информации из текстовой формы в табличную:

- *продолжение заполнения частично составленной таблицы;*
- *чтение информации, представленной в таблице, по вопросам;*
- *продолжение заполнения частично составленной таблицы и чтение информации полученной таблицы по вопросам;*
- *составление разных таблиц для одного набора данных, анализ и интерпретация данных с помощью вопросов;*
- *перевод информации из текстовой формы в табличную;*
- *проведение опроса среди своих одноклассников, составление таблицы по образцу и выполнение анализа полученных результатов;*
- *составление таблиц по результатам проведения опытов с монетами и игральными кубиками, анализ и интерпретация результатов наблюдений.*

Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные можно упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде. *Таблица* является одним из способов представления информации, но более наглядным является *графическое представление данных*. Это различные диаграммы: линейные, столбчатые и круговые.

Круговые диаграммы используются при представлении долей, сумма которых обязательно равна 1. Чаще всего это доли выборки, обладающие некоторым (одним) значением признака из допустимых градаций. Если в столбчатой диаграмме вместо столбиков нарисовать отрезки, то получится линейная диаграмма.

Столбчатые диаграммы применяются для представления абсолютных и относительных значений одной или нескольких переменных величин.

Рассмотрим подходы ознакомления учащихся с диаграммами в образовательных программах *«Перспектива»* и *«Школа 2100»*.

В перечисленных выше образовательных программах, круговая, линейная и столбчатая диаграммы вводятся контекстуально, т. е. содержания понятий раскрываются через текст с помощью анализа конкретной ситуации и показом способа построения диаграмм.

Базовыми знаниями для введения понятия «круговая диаграмма» являются: *круг, часть круга, целое, центральный угол.*

- В образовательной программе «Перспектива» у учащихся формируется понятие центрального угла и умение измерять центральные углы с помощью транспортира.
- От работы с центральными углами учащиеся переходят к круговым диаграммам.
- Затем обращается внимание учащихся на то, что чертить окружность и вычислять значение углов иногда бывает затруднительным.

Есть более простой способ изображения наглядных величин – соотнесение их со шкалой.

- Учащихся знакомят с линейными и столбчатыми диаграммами, учат их читать и строить (в простейших случаях).
- Затем вводятся алгоритмы построения круговых, линейных и столбчатых диаграмм.
- Алгоритм построения круговых диаграмм включает построение центральных углов.

В пособии для учителей начальных классов (А.П. Тонких) представлены следующие **виды заданий по теме «диаграммы»:**

- чтение линейных диаграмм по вопросам;
- чтение столбчатых диаграмм по вопросам;
- чтение круговых диаграмм по вопросам;
- построение линейной и столбчатой диаграмм по информации, представленной в виде таблицы;
- построение линейной и столбчатой диаграмм по результатам опроса, проведенного учащимися;
- составление таблицы и построение линейчатой и столбчатой диаграмм по результатам опроса, представленного в виде текста.

Вероятностно-статистическую пропедевтику С. Е. Царева рекомендует осуществлять по двум направлениям:

- 1. Первое направление.** Формирование у обучающихся умения проводить мини - статистические наблюдения, делать на их основе выводы и оценивать вероятность тех или иных характеристик исследуемых процессов.
- 2. Второе направление.** Формирование у обучающихся базового уровня умения стохастической подготовки – умения упорядочивать и кодировать информацию.

Для реализации перечисленных выше направлений можно использовать следующие приемы:

- статистический анализ данных,
- составление мини статистического отчета о работе на уроке при подведении его итога,
- решение комбинаторных задач с последующим статистическим анализом и оценкой вероятности появления определенных комбинаций,
- описание характеристики вероятностных процессов при изучении величин,
- включение заданий вероятностного и статистического характера в устные упражнения.

Включение в проектную и исследовательскую деятельность учащихся начальных классов тем вероятностно-статистического характера, которые требуют от учащихся умения проводить мини-статистические наблюдения, делать на их основе выводы и оценивать вероятность тех или иных характеристик исследуемых процессов.

Таким образом, изучение статистических и связанных с ними информационных и комбинаторных понятий в начальной школе способствует:

- накоплению систематизированных представлений о явлениях стохастической природы;*
- ознакомлению с «неформальными» методами решения комбинаторных и вероятностных задач;*
- формированию базовых умений работать с информацией.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белокурова Е. Е. Методика обучения решению комбинаторных задач // Начальная школа. 1994. №12.
2. Белокурова Е. Е. Обучение решению комбинаторных задач с помощью таблиц и графов // Начальная школа. 1995. № 1.
3. Белокурова Е. Е. Характеристика комбинаторных задач // Начальная школа. 1994. № 1.
4. Виноградова Е.П. Комбинаторные задачи в системе развивающего обучения четырехлетней начальной школы : автореф. дис. ...канд. пед. наук :13.00.02 / Е.П. Виноградова Елизавета Павловна. – М., 2003.
5. Власова И. Н. Комбинаторно-вероятностные задачи в начальном обучении математике // Начальная школа. 2012. № 1.
6. Гальперин П. Я. Формирование умственных действий. Хрестоматия по общей психологии: психология мышления– М. – 2001.
7. Демидова Т. Е., Козлова С. А., А. Г. Рубин, А. П. Тонких Элементы стохастики в начальной школе // Начальная школа плюс до и после. 2005. № 5.
8. Истомина Н.Б., Виноградова Е.П. Математика. Учимся решать комбинаторные задачи. Тетрадь для 1-4 кл. – М.: Ассоциация 21 века.-2004.