

## Упругие волны

Упругой волной называют процесс распространения возмущения в упругой среде

Различают волны продольные и поперечные, в зависимости от того, движутся ли частицы около своих положений равновесия вдоль или поперек направления распространения волны.

### Уравнение волны

Уравнение волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $X$ .

$$\xi(x, t) = f(t - x/v). \quad (1)$$

Волна, распространяющаяся в отрицательном направлении  $X$ , описывается уравнением

$$\xi(x, t) = f(t + x/v). \quad (2)$$

Уравнение гармонической волны имеет вид

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - x/v),$$

$a$  — амплитуда волны ,  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды ( $\text{с}^{-1}$ ).

$$T = 2\pi/\omega. \text{ — период колебаний}$$

Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний - длина волны

$$\lambda = vT.$$

Уравнение гармонической волны принято записывать в симметричном более удобном и простом виде.

$$\xi = a \cos(\omega t - kx).$$

$k$  - волновое число,  $k = 2\pi/\lambda$ .

С учетом поглощения уравнение волны имеет вид:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx).$$

## Уравнение плоской волны

В плоской волне волновые поверхности (где точки среды колеблются в одинаковой фазе) имеют вид плоскостей. Если плоская волна распространяется вдоль оси  $X$ , то ее волновые поверхности (плоскости) перпендикулярные этой оси.

Если же плоская волна распространяется в произвольном направлении, характеризуемом единичным вектором  $\mathbf{n}$ , то

$$\xi = f(t - l/v) = f(t - \mathbf{r}\mathbf{n}/v),$$

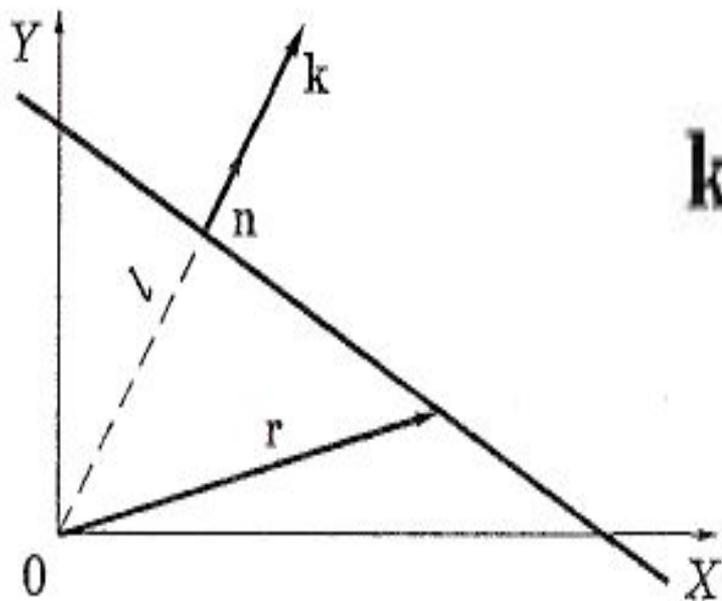
$$\mathbf{r}\mathbf{n} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  — углы между вектором  $\mathbf{n}$  и осями координат.

Для плоской гармонической волны

$$\cos \omega(t - \mathbf{n}\mathbf{r}/v) = \cos (\omega t - \mathbf{r}\mathbf{n}\omega/v)$$

и  $\xi = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}),$



$$\mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{n} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n}.$$

## Сферическая волна.

В однородной изотропной среде продольная волна от точечного источника представляет собой сферически расходящееся возмущение вида

$$\xi = \frac{1}{r} f(t - r/v),$$

Волновые поверхности являются сферическими.

Если источник возбуждает продольные монохроматические колебания, то это уравнение принимает вид

$$\xi = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr), \quad r \text{ — расстояние от точечного источника.}$$

## *Цилиндрическая волна*

Цилиндрическая волна расходится от источников, равномерно распределенных вдоль оси в однородной среде.

Структура цилиндрической волны значительно сложнее сферической, и ее форма не повторяет временного поведения функции источника, как в случае сферической, — волна тянет за собой длинный «шлейф».

Монохроматическая расходящаяся волна на расстояниях  $R$ , значительно превышающих ее длину волны, имеет вид

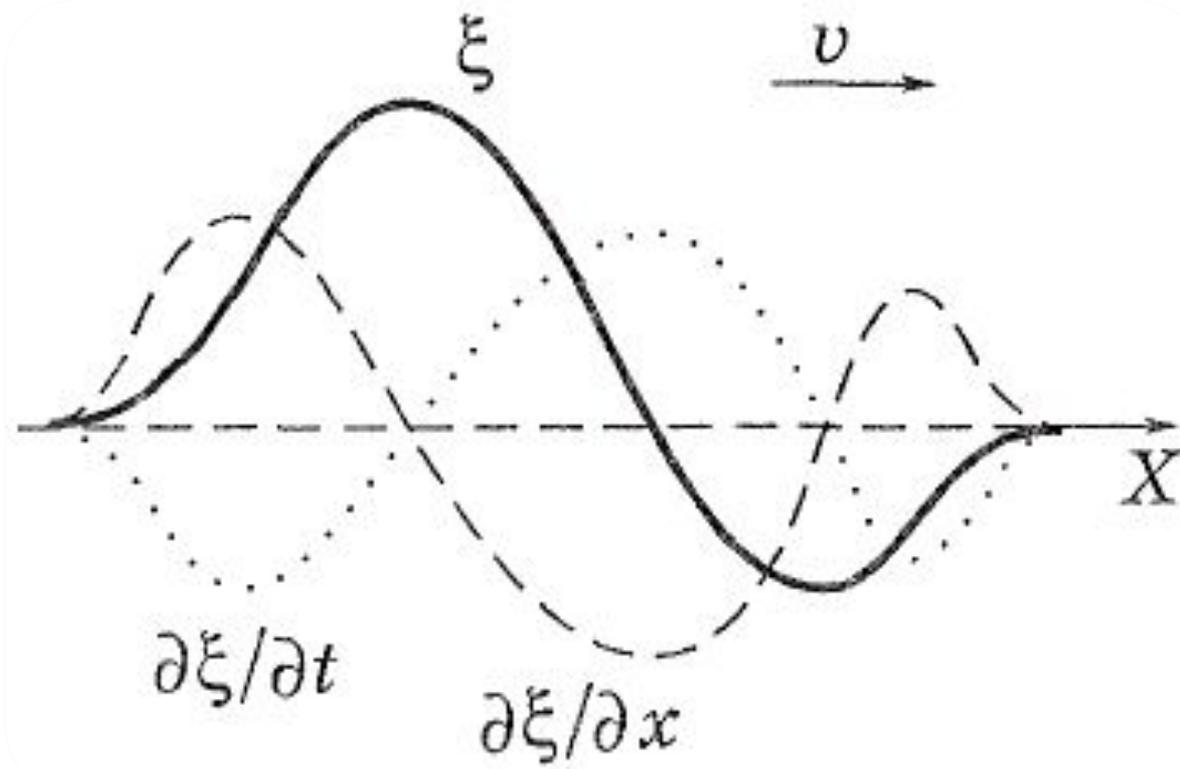
$$\xi = \frac{a}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR),$$

## *Волновые уравнения*

Для волновых процессов, существуют уравнения, являющиеся обобщенным выражением волн, независимо от их конкретного вида.

Для волн типа  $\xi = f(t - x/v)$ .

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = - \frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t} ,$$



$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u_x$  — проекция скорости частицы среды, движущейся около своего положения равновесия

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \epsilon$  — относительная деформация среды.

## *Общее волновое уравнение*

Это уравнение справедливо для волны любого направления, а также и для суперпозиции таких волн.

После дифференцирования выражения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

по  $t$  и по  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Это одномерное волновое уравнение 2-го порядка в частных производных. Ему удовлетворяют как возмущения вида

$$\xi(x,t) = f(t - x/v) \text{ и } \xi(x,t) = f(t + x/v),$$

так и более общее решение

$$\xi = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v),$$

$f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположных направлениях оси  $X$ .

Для трехмерного случая волновое уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Одномерное волновое уравнение при наличии затухания

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

$\gamma$  - коэффициент затухания волны.

## *Скорость упругих волн*

### 1. Скорость волны в тонком стержне

При малых продольных деформациях стержня в стержне будет распространяться продольная волна, описываемая волновым уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} .$$

Сопоставляя полученное выражение с  $\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ ,

определяем скорость распространения волны  $U$

$$v = \sqrt{E/\rho} .$$

Скорость поперечных упругих волн в неограниченной изотропной твердой среде

$$v = \sqrt{G/\rho},$$

$G$  — модуль сдвига среды,  $\rho$  -плотность среды

2. Скорость звука в жидкостях и газах

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

скорость звуковой волны в газе —  $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$

или  $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

$$\gamma = C_p/C_V$$

# Энергия упругой волны

Плотность потенциальной энергии упругой волны

$$w_{\Pi} = E\varepsilon^2/2.$$

Плотность полной энергии

$$w = w_{\kappa} + w_{\Pi} = \rho \dot{\xi}^2/2 + E\varepsilon^2/2.$$

Для тонкого стержня  $E = \rho v^2$ ,

и выражение для полной энергии

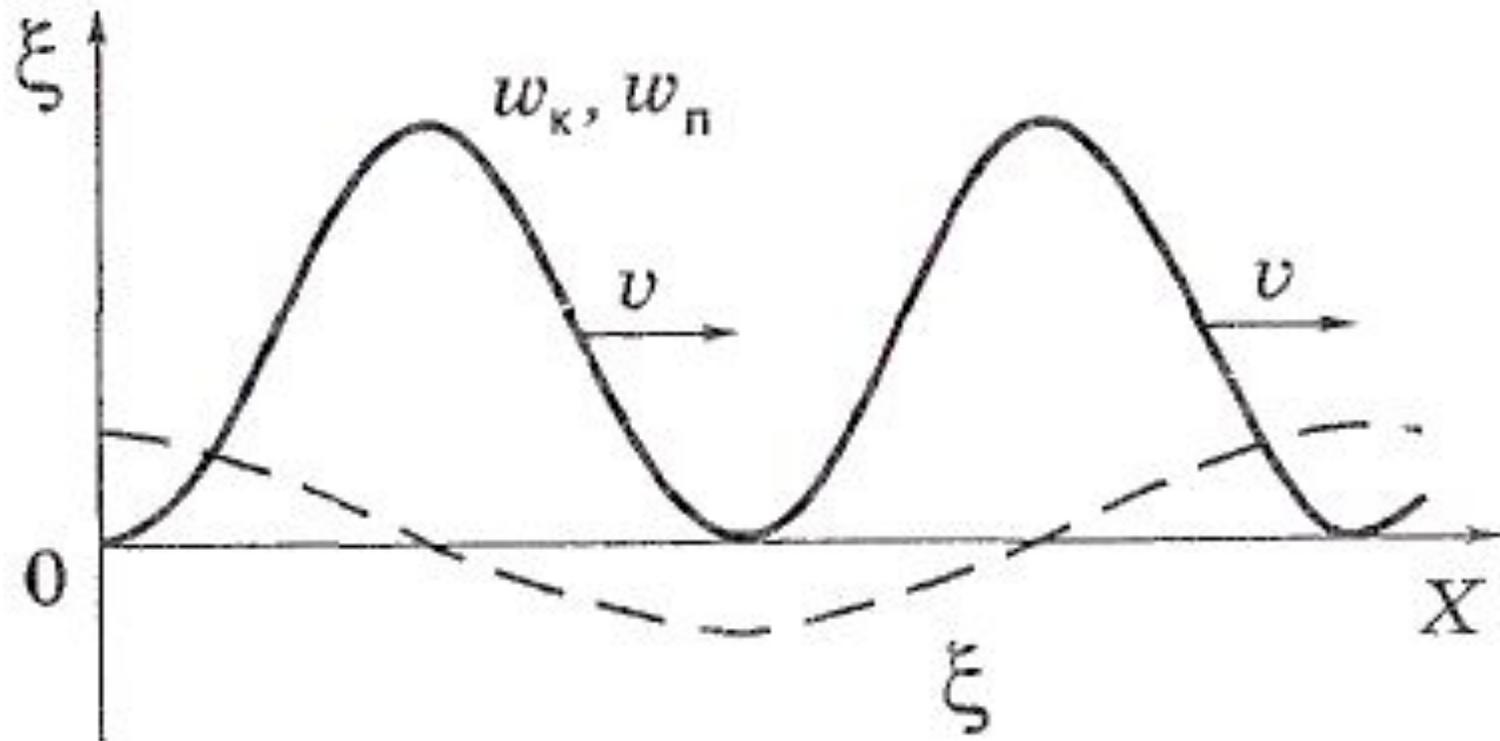
$$w = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

или

$$w = \rho \dot{\xi}^2.$$

Для гармонической волны  $\xi = a \cos(\omega t - kx)$

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$



Поток энергии – количество энергии, переносимое волной через поверхность  $S$  в единицу времени:

$$\Phi = dW/dt,$$

Плотность потока энергии - это поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную к направлению переноса энергии:

$$j = d\Phi/dS_{\perp},$$

$dW$  — энергия, заключенная внутри косого цилиндра с основанием площадью  $dS$  и образующей длиной  $v dt$ ,  
 $v$  — скорость переноса энергии (возмущения).

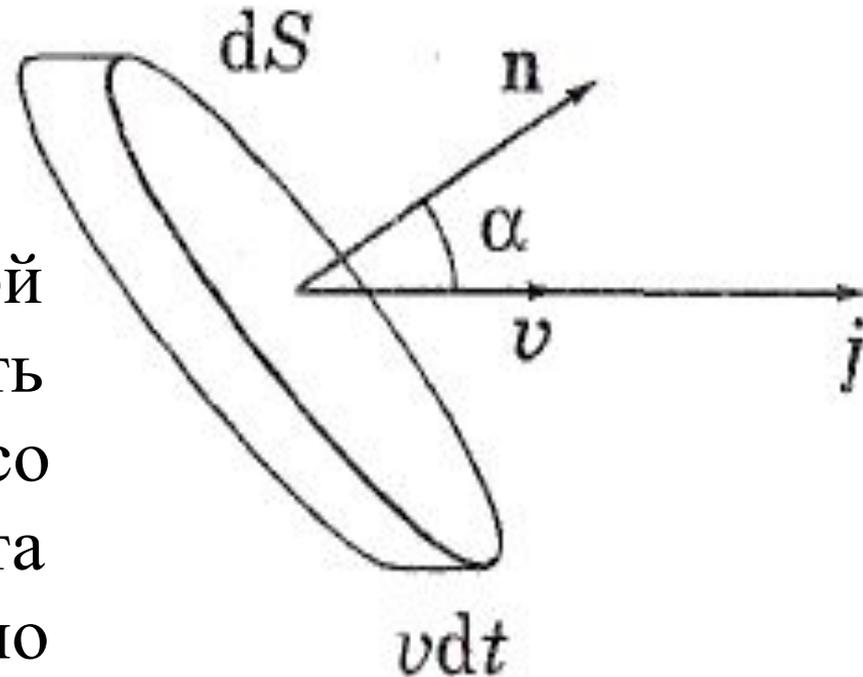
$$dW = wv dt dS \cos \alpha = wv dt dS_{\perp}.$$

Для определения плотности потока энергии волны и его направления вводят вектор Умова  $\vec{j}$ .

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v},$$

В случае монохроматической волны вектор  $\mathbf{j}$ , как и плотность энергии, изменяется со временем по закону квадрата синуса. Поэтому среднее по времени значение вектора Умова

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}.$$



формула  $\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}.$

справедлива для волн любого вида — плоской, сферической, цилиндрической, затухающих и др.

Среднее по времени значение плотности потока энергии называется интенсивностью волны:

$$I = \langle j \rangle.$$

Зная вектор Умова, во всех точках поверхности  $S$  можно найти поток энергии сквозь эту поверхность.

$$\Phi = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_S j_n dS, \quad \text{— поток энергии равен потоку вектора } \mathbf{j} \text{ сквозь эту поверхность } S.$$

Для суперпозиции нескольких продольных волн вектор Умова имеет вид:

$$\mathbf{j} = -\sigma \mathbf{u},$$

$\sigma$  — напряжение (или избыточное давление),

$\mathbf{u}$  — скорость частиц среды (не скорость волны!).

# Стоячие волны

При распространении в упругой среде одновременно нескольких волн возникает их наложение.

Колебания частиц среды оказываются векторной суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

Это называют *принципом суперпозиции (наложения) волн.*

Волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющиеся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами, называются **стоячими**.

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx); \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Суперпозиция этих волн дает уравнение стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos kx \cdot \cos \omega t,$$

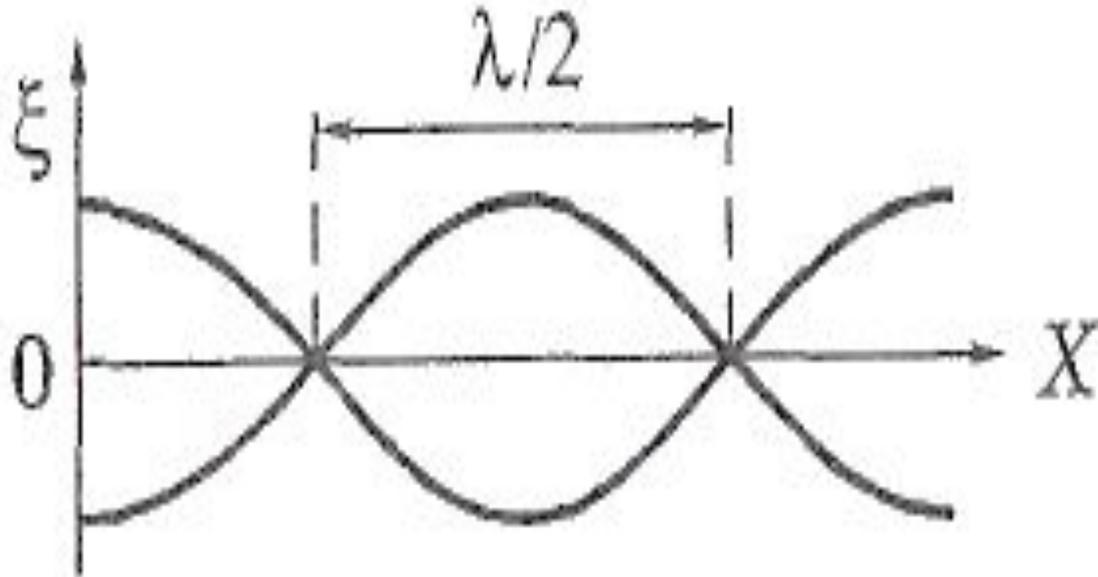
$$A = 2a.$$

Амплитуда равна  $|A \cos kx|$  и зависит от  $x$ .

В точках, для которых  $|\cos kx| = 1$ ,  
это максимумы амплитуды — *пучности*,  
а где  $\cos kx = 0$ , — минимумы — *узлы*.

Интервалы между соседними пучностями или узлами  
равны половине длины волны

$$\Delta x = \pi/k = \lambda/2.$$



## *Энергия стоячей волны*

Передачи движения из одной области к другой, а значит и перетекания энергии через узлы в стоячей волне не происходит.

Нет распространения возмущения среды вдоль оси  $X$ . Поэтому возмущения, описываемые формулой,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos kx \cdot \cos \omega t,$$

называют *стоячей волной*.

$$\dot{\xi} = -A\omega \cos kx \cdot \sin \omega t, \quad \text{— скорости частиц} \quad \dot{\xi}$$

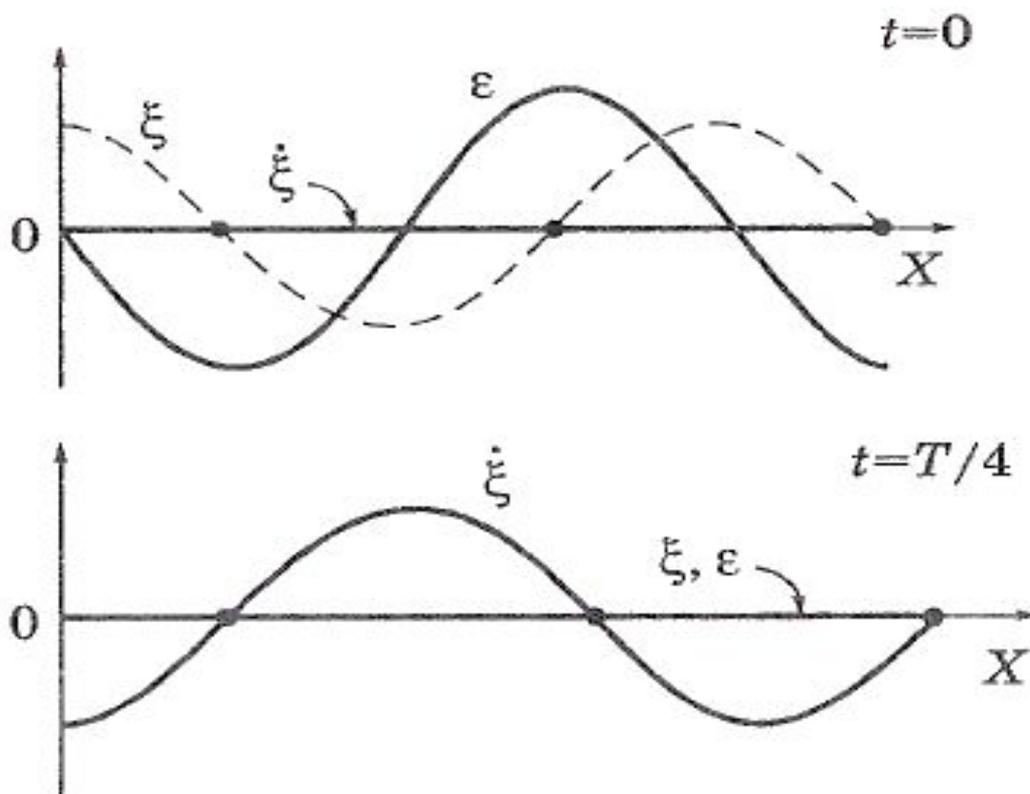
$$\varepsilon = -Ak \sin kx \cdot \cos \omega t. \quad \text{— относительные деформации}$$

$$\varepsilon = \partial \xi / \partial x:$$

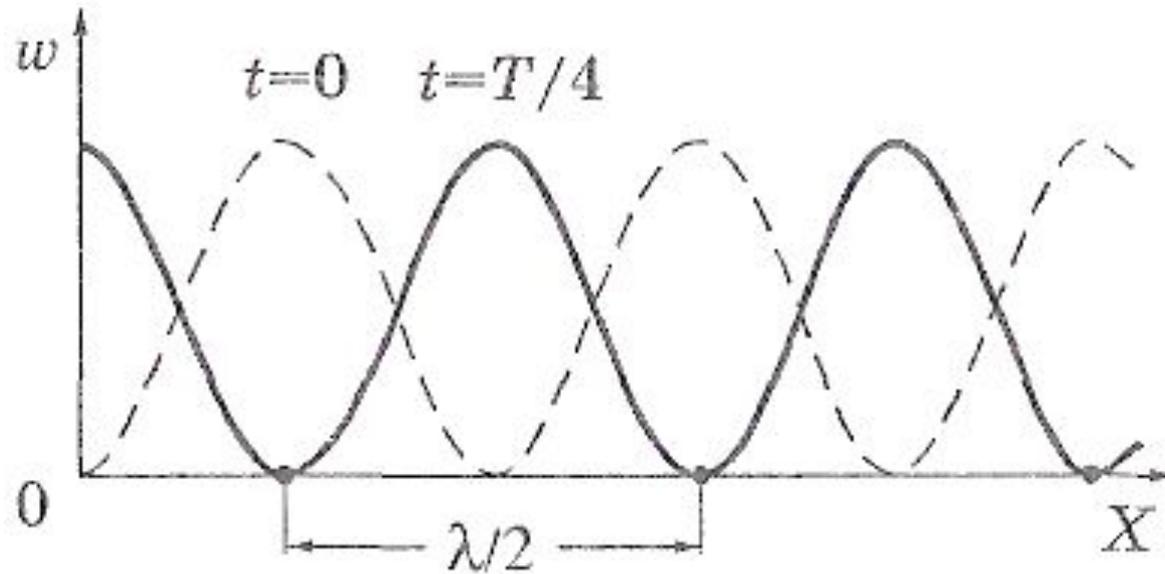
$\xi$  и  $\varepsilon$ , - стоячие волны, причем они сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $\pi/2$

Узлы и пучности скорости  $\dot{\xi}$  частиц среды совпадают с узлами и пучностями их смещения  $\xi$ .

Узлы и пучности  $\varepsilon$  деформации совпадают соответственно с пучностями и узлами смещения



В стоячей волне происходят превращения энергии: то полностью в потенциальную (упругую), то полностью в кинетическую (аналогичное происходит при колебаниях маятника).



В процессе колебаний происходит перетекание энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении стоячей волны равен нулю.