Исследование операций

Лекция 2

Симплексный метод

- переход от одного опорного плана к другому

- при этом значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план)

Простейшая задача

Найти максимальное значение функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

при условиях:

$$b_i > 0, \;\; x_j \geq 0 \;\; (i = 1, \ldots, m; \;\; j = 1, \ldots, n)$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + a_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \,, \\ x_2 + a_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

В векторной форме

Найти максимальное значение функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

при условиях:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m + \\ + x_{m+1} A_{m+1} + \ldots + x_n A_n = A_0 \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \quad (3)$$

В векторной форме

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \; A_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \dots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}; \dots; \; A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}; \; A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Продолжение

$$b_1A_1 + b_2A_2 + \ldots + b_mA_m = A_0$$

Опорный план: $X = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ - базис m-мерного пространства

$A_1, \ldots, A_n, A_0$ - линейно выражаются через векторы базиса

Пусть $$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i \quad (j = 0, \ldots, n)$$

Продолжение

Пусть $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}\ ; \quad \Delta_j = z_j - c_j \quad (j = 1,\ldots,n)$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ - единичные

$$\Rightarrow \quad x_{ij} = a_{ij}\ ; \ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$$

Теоремы

Теорема 1 (признак оптимальности):
Опорный план X* = (x_1, x_2, …, x_m, 0, …, 0) задачи (1)-(3) является оптимальным, если $\forall j \ (j = 1,\ldots,n) \quad \Delta_j \geq 0$

Теорема 2: Если $\Delta_k < 0$ для некоторого j=k и среди чисел $a_{ik} < 0 \quad (i = 1,\ldots,m)$, то целевая функция (1) задачи (1)-(3) не ограничена на множестве ее планов

Теоремы

Теорема 3: Если опорный план X задачи (1)-(3) не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди a_{ik} есть положительные, то существует опорный план X* такой, что F(X)>F(X)

Теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным и нужно ли переходить к новому опорному плану

Этапы:

1) Находим опорный план

2) Составляем симплекс-таблицу

3) Выясняем, есть ли хотя бы одно $\Delta_j < 0$

Если нет, то найденный опорный план оптимален

Если есть, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану

Этапы:

4) Находим направляющие столбец и строку

5) Определяем положительные компоненты нового опорного

Все эти числа записываем в новой симплекс-таблице

6) Проверяем найденный опорный план на оптимальность

Если план не оптимален, то возвращаемся к этапу 4

Если план оптимален или установлена неразрешимость, процесс решения задачи заканчиваем

Проблемы

Если задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю, т.е. при переходе от одного опорного плана к другому значение функции может остаться прежним

Возможен случай, когда функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций

Возможен возврат к первоначальному базису (зацикливание)