ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

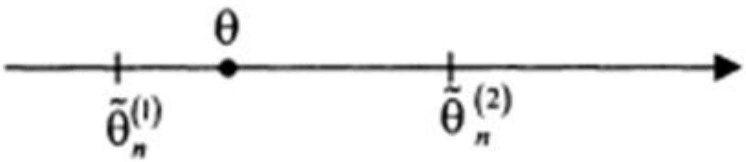
Точечные оценки неизвестных параметров распределения исследуемой случайной величины хороши в качестве первоначальных результатов обработки статистических данных. Их недостаток в том, что неизвестно, с какой точностью и надежностью они дают значение оцениваемого параметра. Особенно существенен вопрос о точности оценки при малых (менее 20) объемах выборки, так как при этом между истинным значением параметра и его оценкой может быть большое расхождение. Это обусловлено тем, что дисперсия состоятельной оценки обратно пропорциональна объему выборки.

Существует другой подход к оцениванию, при котором указывается интервал, накрывающий оцениваемый параметр с заданной наперед вероятностью. Такой подход называется интервальным оцениванием. Сразу отметим, что чем больше уверенность в том, что параметр лежит в интервале, тем шире будет интервал. Так что мечтать найти диапазон, в котором оцениваемый параметр лежит с вероятностью 1, бессмысленно – это вся область возможных значений параметра.

Определение. **Оценка** неизвестного параметра **называется интервальной**, если она определена двумя числами – концами интервалов.

Интервальная оценка позволяет судить о точности и надежности оценки параметра.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал (θ_1, θ_2), относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное (истинное) значение оцениваемого параметра.



Доверительные интервалы и доверительная вероятность

Определение. **Интервал** (θ_1, θ_2), **накрывающий** с вероятностью γ истинное значение оцениваемого параметра θ, называется **доверительным интервалом**, а вероятность γ – **доверительной вероятностью** или надежностью оценки.

В общем случае концы интервала, как статистики выборки, являются случайными величинами. И так как случайной величиной является не оцениваемый параметр θ, а доверительный интервал, то правильно говорить не о вероятности попадания θ в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал накроет θ.

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещённой точечной оценки $\tilde{\theta}$, т.е. выбирается интервал вида $\left(\tilde{\theta}-\delta,\ \tilde{\theta}+\delta\right)$ такой, что

$$P\left\{\theta\in\left(\tilde{\theta}-\delta,\ \tilde{\theta}+\delta\right)\right\}=P\left\{\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta\right\}=\gamma.$$

Число $\delta>0$ характеризует точность оценки – чем оно меньше,тем меньше разность между истинным значением параметра и его оценкой, тем точнее оценка.

Надежность оценки (доверительная вероятность γ) выбирается заранее. Её выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Значение γ принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно, что доверительный интервал накроет значение θ. Вероятность непокрытия интервалом $\left(\tilde{\theta}-\delta,\ \tilde{\theta}+\delta\right)$ значения параметра θ, равна $\alpha=1-\gamma$, и называется уровнем значимости.

Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надежность γ указывает на то, что если произведено достаточно большое число выборок, то из них $\gamma\cdot 100\%$ определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен, и лишь в $(1-\gamma)\cdot 100\%$ случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Построим доверительные интервалы для параметров номального распределения, т.е. когда выборка производится из генеральной совокупности (случайной величины X), имеющей нормальное распределения с параметрами a и σ^2.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть СВ X имеет нормальное распределение $N\left(a, \sigma^2\right)$, где a – неизвестный параметр, а $\sigma>0$ известно. Требуется построить доверительный интервал для параметра a при заданной доверительной вероятности γ.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений СВ X. Чтобы подчеркнуть случайный характер величин $x_1, x_2, ..., x_n$ перепишем их в виде $X_1, X_2, ..., X_n$, т.е. под X_i будем понимать значение СВ X в i-том опыте. Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, закон распределения каждой из них совпадает с законом распределения СВ X, т.е. $X_i \sim N\left(a, \sigma^2\right)$. А это значит, что

$$M\left[X_1\right] = M\left[X_2\right] = ... = M\left[X_n\right] = a,\ D\left[X_1\right] = D\left[X_2\right] = ... = D\left[X_n\right] = \sigma^2.$$

Выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, являющееся несмещённой точечной оценкой параметра a, в силу устойчивости нормального распределения по суммированию также будет распределено по нормальному закону.

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Параметры нормального распределения выборочного среднего – математическое ожидание и дисперсия, таковы:

$$M\left[\bar{X}\right]=a,\ D\left[\bar{X}\right]=\sigma^2/n.$$

Действительно:

$$M\left[\bar{X}\right]=M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[X\right]=\frac{na}{n}=a;$$

$$D\left[\bar{X}\right]=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left[X_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left[X\right]=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P\left(\left|\bar{X}-a\right|<\delta\right)=\gamma,$$

где γ – заданная надежность. Пользуясь известной формулой для вероятности попадания нормально распределенной СВ в интервал, симметричный относительно её математического ожидания

$$P\left\{\left|X-a\right|<\delta\right\}=2\Phi_0\left(\delta/\sigma\right),$$

и, заменив в ней X на $\bar{X}$ и σ на $\sigma/\sqrt{n}$, получим:

$$P\left(\left|\bar{X}-a\right|<\delta\right)=2\Phi_0\left(\delta\sqrt{n}/\sigma\right)=2\Phi_0\left(t\right)=\gamma,\quad \text{где } t=\delta\sqrt{n}/\sigma.$$

Из равенства $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$ следует, что $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, поэтому

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma,$$

или

$$P\left(\bar{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной СВ X при известной дисперсии есть

$$\left(\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где t определяется из уравнения $\Phi_0(t) = \gamma/2$, т.е. как значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна $\gamma/2$.

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки равна $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.

Из формулы $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, определяющей точность оценки, можно сделать следующие выводы:

1) **при возрастании объема выборки** n число δ убывает и, следовательно, **точность оценки увеличивается**;

2) увеличение надежности оценки $\gamma = 2\Phi_0(t)$ приводит к увеличению значения t (функция Лапласа возрастающая функция), и, следовательно, к возрастанию δ, т.е. к снижению точности. Другими словами, **увеличение надежности оценки влечет за собой уменьшение ее точности**.

Если требуется оценить математическое ожидание с наперед заданной точностью δ и надежностью γ, то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по следующей из выражения $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ формуле:

$$n = t^2\sigma^2/\delta^2 .$$

Алгоритм построения доверительного интервала для математического ожидания при известной дисперсии σ^2 по выборке объема n:

1. Вычисляется выборочное среднее $\bar{x}$.
2. По заданной надежности γ определяется значение t, как значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна $\gamma/2$.
3. Вычисляется точность оценки $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.
4. Записывается доверительный интервал в виде $\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right)$.

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ=0,99 неизвестного математического ожидания a нормальной случайной величины X, если среднее квадратическое отклонение СВ X σ равно 4,4, выборочное среднее $\bar{x}$, определенное по выборке объема n=36, равно 10,2.

Решение. В нашем случае $\Phi_0(t) = \dfrac{0{,}99}{2} = 0{,}495$. По таблице для функции Лапласа находим $t = 2{,}58$. Следовательно, $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = \dfrac{2{,}58 \cdot 4{,}4}{\sqrt{36}} \approx 1{,}89$. В соответствии с выражением для доверительного интервала

$$\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right) = \left(\bar{x} - \delta,\ \bar{x} + \delta\right),$$

получаем: (10,2–1,89; 10,2+1,89)= (8,31; 12,09).

Таким образом, значения неизвестного математического ожидания a случайной величины X, согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют с вероятностью 0,99 неравенству $(8{,}31 < a < 12{,}03)$.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть СВ X имеет нормальное распределение $N\left(a,\sigma^2\right)$, где a и $\sigma>0$ неизвестны. Требуется построить доверительный интервал для параметра a при заданной доверительной вероятности γ.

Можно показать, что доверительный интервал для математического ожидания a в этом случае имеет вид:

$$\left(\bar{x}-t_\gamma S\big/\sqrt{n},\ \bar{x}+t_\gamma S\big/\sqrt{n}\right),$$

где n – объем выборки, S – исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ – квантиль уровня $(1-\gamma)$ распределения Стьюдента при числе степеней свободы $n-1$.

При неограниченном возрастании объема выборки распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при $n>30$ можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения при неизвестных a и σ^2

Пусть СВ X имеет нормальное распределение $N\left(a,\sigma^2\right)$, где a и $\sigma>0$ неизвестны. Требуется построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ при заданной доверительной вероятности γ.

Можно показать, что доверительный интервал для неизвестного σ имеет вид:

$$\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2}, \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1}\right),$$

где n – объем выборки, S – исправленное среднее квадратическое отклонение. Квантили

$$\chi_1^2=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}, \quad \chi_2^2=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};\, n-1}$$

определяются по таблице критических точек распределения $\chi^2_{\alpha;k}$ («хи-квадрат») при числе степеней свободы $k=n-1$ и значениях уровня значимости $\alpha=\left(1+\gamma\right)/2$ и $\alpha=\left(1-\gamma\right)/2$.

Таблица значений $\chi^2_{\alpha;k}$ составлена при числе степеней свободы k от 1 до 30. При расчете доверительного интервала при $k>30$ надо полагать

$$\chi_1^2=0{,}5\left(\sqrt{2k-1}-t\right), \quad \chi_2^2=0{,}5\left(\sqrt{2k-1}+t\right),$$

где t определяется как корень уравнения уравнения $\Phi_0\left(t\right)=\gamma$.