

## Тема: **Вынужденные колебания**

### Содержание лекции:

- 27.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение
- 27.2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных). Резонанс;
- 27.3. Переменный ток;
- 27.4. Резонанс токов;
- 27.5. Резонанс напряжений;
- 27.6. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора  $X(t)$ , изменяющегося по гармоническому закону:  
 $X(t) = X_0 \cos \omega t.$

Если рассматривать механические колебания, то роль  $X(t)$  играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (27.1)$$

С учетом силы (27.1) закон движения для пружинного маятника запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t,$$

$r$  - коэффициент сопротивления,  $\dot{x}$  - скорость движения.

$kx$  - возвращающая сила,  $r\dot{x}$  - сила трения.

Используя  $r/2m = \beta$   $k/m = \omega_0^2$ , придем к уравнению

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = (F_0 / m) \cos \omega t \quad (27.2)$$

Если рассматривать электрический колебательный контур, то роль  $x(t)$  играет подводимая к контуру внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону э. д. с. или переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (27.3)$$

Тогда уравнение (27.2) с учетом (27.3) можно записать в виде

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

Используя  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  и  $\beta = R/2L$ , приходим к уравнению

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (27.4)$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся э. д. с, называются соответственно *вынужденными механическими* или *электромагнитными колебаниями*.

Уравнения (27.2) и (27.4) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t \quad (27.5)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы ( $x_0$  в случае механических колебаний равно  $F_0/m$ , в случае электромагнитных -  $U_m/L$ ).

Решение уравнения (27.5) равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение найдем в комплексной форме. Заменим правую часть уравнения (27.5) на комплексную величину  $x_0 e^{i\omega t}$ :

$$\square + 2\beta\square + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t} \quad (27.6)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде  $s = s_0 e^{i\eta t}$ .

Подставляя выражения для  $s$  и его производных  $\dot{s} = i\eta s_0 e^{i\eta t}$ ,  $\ddot{s} = -\eta^2 e^{i\eta t}$  в уравнение (27.6), получим

$$s_0 e^{i\eta t} (-\eta^2 + 2i\beta\eta + \omega_0^2) = x_0 e^{i\eta t} \quad (27.7)$$

Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время  $t$  из него должно исключаться. Отсюда следует, что  $\eta = \omega$ . Учитывая это, из уравнения (27.7) найдем величину  $s_0$  и умножим ее числитель и знаменатель на

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega) :$$

$$s_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega} = x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме:

$$s_0 = A e^{i\varphi} ,$$

где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (27.8)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (27.9)$$

Следовательно, решение уравнения (27.6) в комплексной форме примет вид

$$s_0 = Ae^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Его вещественная часть, являющаяся решением уравнения (27.5), равна

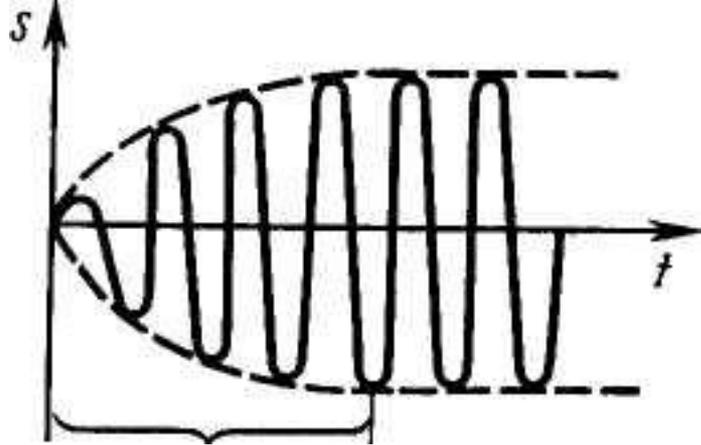
$$s = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (27.10)$$

где  $A$  и  $\varphi$  задаются соответственно формулами (27.8) и (27.9).

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (27.5):

$$s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (27.11)$$

Решение уравнения (27.7) равно сумме общего решения однородного уравнения



$$s_0 = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (27.12)$$

Рис. 27.1

Установление колебаний

и частного решения (27.11). Слагаемое (27.12) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (27.8). Графически вынужденные колебания представлены на рис. 27.1. Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой  $\omega$  и являются гармоническими, амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (27.8) и (27.9), также зависят от  $\omega$ .

Запишем формулы (27.10), (27.8) и (27.9) для электромагнитных колебаний, учитывая, что  $\omega_0^2 = 1/(LC)$  и  $\beta = R/(2L)$ :

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \quad (27.13)$$

Продифференцировав  $Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$  по  $t$ , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t - \alpha + \pi/2) \quad (27.14)$$

где

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (27.15)$$

Выражение (27.14) может быть записано в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $\varphi = \alpha - \pi/2$  — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (27.3)). В соответствии с выражением (27.13)

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (27.16)$$

Из формулы (27.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ), если  $\omega L > 1/(\omega C)$ , и опережает напряжение ( $\varphi < 0$ ), если  $\omega L < 1/(\omega C)$ .

Формулы (27.15) и (27.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано ниже для переменных токов.

