Понятия и высказывания

1. Логика и понятия
2. Объем и содержание понятий
3. Определение понятий и его виды
4. Высказывания и высказывательные формы
5. Конъюнкция и дизъюнкция
6. Высказывания с квантором
7. Отрицание высказываний
8. Отношение логического следования
9. Отношение равносильности

Слово «логика» происходит от греческого logos, что означает «слово», «разум», «мысль», «закономерность».

- Логика - наука, которая изучает процесс мышления человека с точки зрения структуры мыслей, правильности и неправильности рассуждений, отвлекаясь от конкретного содержания мыслей.
- Предметом логики являются такие формы мышления, как понятия, суждения, умозаключения, операции с ними и законы мышления.

Понятие

- Понятие - форма мышления, отражающая объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах.
- Языковой формой понятия является слово или группа слов.
- Иметь понятие об объекте – это значит уметь выделить его существенные признаки и отличить от всех других объектов.

Виды понятий

- Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде четырех групп.

1) понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, цифра, сложение, слагаемое и др.
2) алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и др.
3) геометрические понятия: прямая, отрезок, треугольник и т. д.
4) понятия, связанные с величинами и их измерением.

- Среди свойств объекта различают существенные и несущественные. Свойство считают существенным для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать.

- ***Объем понятия*** **– это множество всех объектов, которые обобщаются в понятии и обозначаются одним термином.**
- ***Содержание понятия*** **– это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.**
- **Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот.**

- Понятия обозначают строчными буквами латинского алфавита: *a, b, c, ..., z*.
- *А их объемы соответственно A, B, C, ..., Z*
- Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие *a* – *видовое по отношению к понятию b*, а понятие *b* – *родовое по отношению к понятию a*.
- Если $A = B$, то говорят, что *понятия a* и *b тождественны*.
- Если множества *A* и *B* не связаны отношением включения, то говорят, что понятия *a* и *b* не находятся в отношении рода и вида и не тождественны.

Отношение рода и вида между понятиями.

- *понятия рода и вида относительны*: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому.
- для *данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий*.
- *видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия*.

Виды определений

- **Явные:**

- *через род и видовое отличие;*

- *генетические;*

- *номинальные.*

- **Неявные:**

- *контекстуальные;*

- *остенсивные;*

- *аксиоматические.*

Структура определения через род и видовое отличие

Определяемое понятие ⇔ Родовое понятие + Видовое отличие

Определяющее понятие

Генетические определения

- ***видовое отличие указывает способ образования определяемого понятия.***
- ***Например, с***имметрией относительно точки называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', построенной следующим образом: на продолжении отрезка OX за точку O откладывается отрезок OX', равный OX.

Контекстуальные определения

- Всякий отрывок текста, всякий контекст, в котором встречается интересующее нас понятие, можно назвать неявным его определением. Контекст ставит понятие в связь с другими понятиями и тем самым косвенно раскрывает его содержание. Почти все определения, с которыми мы встречаемся в обычной жизни, — это контекстуальные определения. Встретившись с неизвестным ранее словом, мы стараемся сами установить его значение на основе всего сказанного.

Остенсивные определения

или определение путем показа.

Определить путем показа можно не все понятия, а только простые, конкретные.

Например,

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6$

$78 - 9 < 78$

$37 + 6 > 37$

Это неравенства.

$9 \cdot 3 = 27$

$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$

$17 - 5 = 8 + 4$

Это равенства.

Аксиоматические определения

- Совокупность аксиом какой-то теории является одновременно и свернутой формулировкой этой теории, и тем контекстом, который неявно определяет все входящие в нее понятия.
- Аксиоматический контекст строго ограничен и фиксирован. Он содержит все, что необходимо для понимания входящих в него понятий. Он ограничен по своей длине, а также по своему составу. В нем есть все необходимое и нет ничего лишнего.
- Аксиоматические определения — одна из высших форм научного определения понятий.

Правила формулировки определений

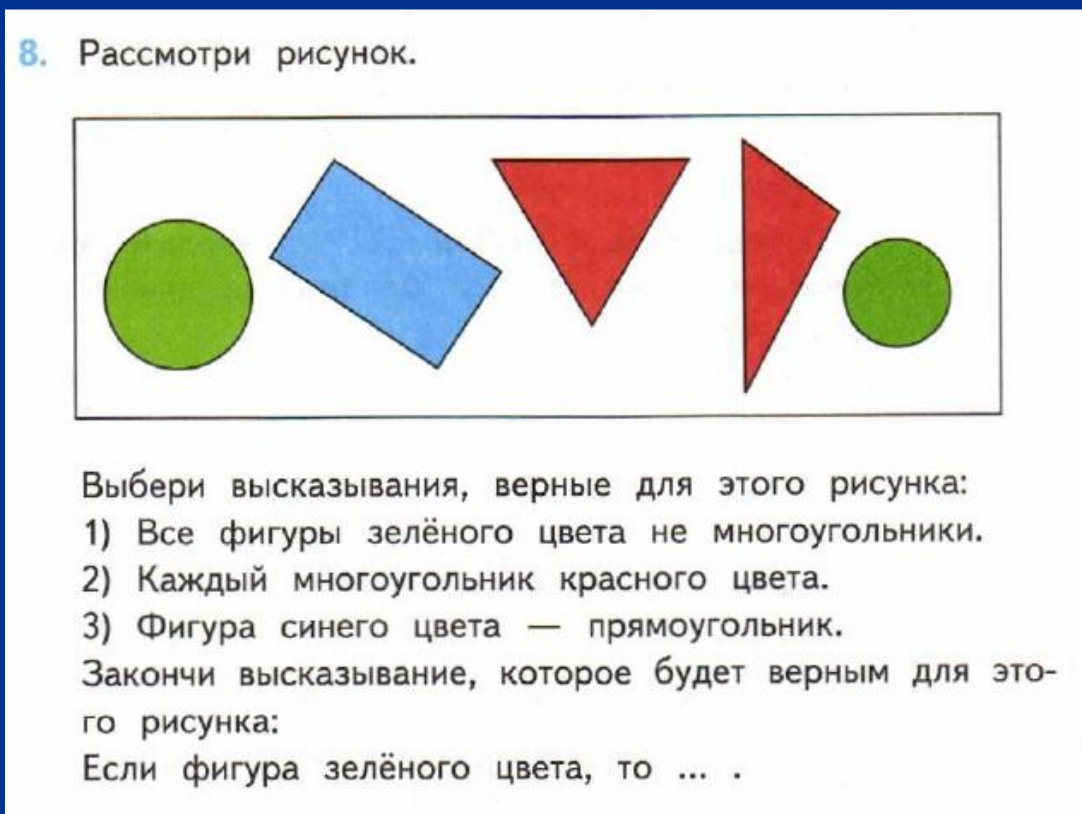
1. ***Определение должно быть соразмерным.***
2. ***В определении (или их системе) не должно быть порочного круга.***
3. ***Определение должно быть ясным.***
4. ***Одно и то же понятие определить через род и видовое отличие можно по-разному.***

Правила построения нового определения

1. Назвать определяемое понятие (термин).
2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.
3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т.е. сформулировать видовое отличие.
4. Проверить, выполнены ли правила определения понятия (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т.д.).

Высказывание

- Высказыванием называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно
- Высказывания бывают простые и составные



8. Рассмотри рисунок.

Выбери высказывания, верные для этого рисунка:
1) Все фигуры зелёного цвета не многоугольники.
2) Каждый многоугольник красного цвета.
3) Фигура синего цвета — прямоугольник.

Закончи высказывание, которое будет верным для этого рисунка:
Если фигура зелёного цвета, то ... .

Составные
- Конъюнкция и дизъюнкция высказываний
- Высказывания с кванторами
- Отрицание высказываний
- Отношение логического следования
- Отношение равносильности

Истинность и ложность

- Высказывания принято обозначать A,B,C..
- Если A является истинным, то говорят что значение высказывания A истинно и символически это записывается так A=И
- Если B является ложным, то говорят что значение высказывания B ложно и символически это записывается так B=Л
- Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно одним и другим оно не может.

Высказывательная форма

- О:. Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X, называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X.

- Задание высказывательной формы предполагает и задание того множества, из которого выбираются значения переменной (переменных), входящей в высказывательную форму. Это множество называют областью определения высказывательной формы.
- Множество значений переменных, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. называют множеством истинности высказывательной формы.

Конъюнкция и дизъюнкция

- Предложение (высказывание или высказывательная форма), построенное с помощью союза «и» из элементарных предложений, называют конъюнкцией.
- Слово конъюнкция произошло от лат. Conjunctio - единение
- Конъюнкцию предложений А и В обозначают: А/\В (читают: «А и В»).
- О:. Если А и В — высказывания, то предложение А/\В истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно в остальных случаях.

- Предложение (высказывание или высказывательная форма), построенное с помощью союза «или» из элементарных предложений, называют дизъюнкцией.
- Дизъюнкция произошло от лат. Disjunctio- разделение
- Дизъюнкцию предложений А и В обозначают: А\/В (читают: «Л или В»).
- Определение. Если А и В — высказывания, то предложение А\/В истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания

Кванторы

- В математике слова «все», «некоторые» и их синонимы называются кванторами. Слово «квантор» латинского происхождения и означает «сколько», т. е. квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином высказывании.
- Высказывания с кванторами —это такие высказывания, в которых присутствуют слова: «любой», «всякий», «все», «существует», «найдутся», «для некоторых».

Кванторы общности

- Слова «любой», «всякий», «все»,«каждый», называются кванторами общности. Обозначается символом $\forall$.

$(\forall x \in X)\ A(x)$ можно читать:

а) для всякого x из множества X истинно $A(x)$;

б) всякий элемент из множества X обладает свойством A.

Квантор существования

- Слова «существует», «найдется», «для некоторых», «некоторые», «найдется», «существует», «хотя бы один» и др. называются кванторами существования.

Обозначается символом $\exists$.

- В математике слово «некоторые» означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

$(\exists x \in X)\ A(x)$ можно читать:

а) существует такое x из множества X, что истинно $A(x)$;

б) хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством A.

- Если высказывательная форма содержит несколько переменных, то перевести ее в высказывание можно, если связать квантором каждую переменную.
- Например, для получения высказывания из высказывательной формы «$x > y$», надо связать квантором обе переменные: например, $(\forall x)(\exists y)\ x > y$ или $(\exists x)(\exists y)\ x > y$.

Установление значения истинности высказываний, содержащих квантор общности

- Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства.
- Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.

Установление значения истинности высказываний, содержащих квантор существования

- ***Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера.***
- ***Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.***

Отрицание высказывания

- Отрицанием высказывания А называется высказывание , которое ложно, если высказывание А истинно, и истинно, если высказывание А – ложно.
- Для того чтобы построить отрицание элементарного высказывания, достаточно поставить слова «неверно, что» перед данным высказыванием либо перед сказуемым поставить частицу «не»

Отрицание конъюнкции

- ***Чтобы построить отрицание конъюнкции , достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания, а союз «и» заменить союзом «или».***

Отрицание *дизъюнкции*

- ***Чтобы построить отрицание дизъюнкции, достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания, а союз «или» заменить союзом «и».***

Отрицание высказываний с кванторами

- *Для того, чтобы построить отрицание высказывания, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и построить отрицание предложения, стоящего после квантора.*

- ***Высказывательная форма B(x) следует из высказывательной формы A(x), если B(x) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых A(x) истинна.***

- Пусть *A* и *B* – высказывания, тогда говорят, что из *A* следует *B*, если всякий раз, когда *A* истинно, истинно и *B*.

- Предложение $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть сформулировано в виде «всякое $A(x)$ есть $B(x)$».
- Его истинность устанавливается путем доказательства, а с помощью контрпримера – что оно ложно.
- С теоретико-множественной точки зрения высказывание $A(x) \Rightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то

$T_A \subset T_B$. Справедливо и обратное утверждение.

$A(x) \Rightarrow B(x)$

- 1) ***Из A(x) следует B(x).***
- 2) ***Всякое A(x) есть B(x).***
- 3) ***Если A(x), то B(x).***
- 4) ***B(x) есть следствие A(x).***
- 5) ***A(x) есть достаточное условие для B(x).***
- 6) ***B(x) есть необходимое условие для A(x).***

- ***Предложения A(x) и B(x) равносильны, если из предложения A(x) следует предложение B(x), а из предложения B(x) следует предложение A(x).***
- ***С теоретико-множественной точки зрения высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности высказывательной формы A(x), а T_B – множество истинности высказывательной формы B(x), то $T_A = T_B$.***

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$

- предложения равносильны, если они одновременно истинны, либо одновременно ложны, т.е. если их значения истинности совпадают при одинаковых наборах значений высказываний A и B.

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$

- 1) *A(x) равносильно B(x).*
- 2) *A(x) тогда и только тогда, когда B(x).*
- 3) *A(x) – необходимое и достаточное условие для B(x).*
- 4) *B(x) – необходимое и достаточное условие для A(x).*

Таблица истинности

A	B	A /\ B	A\/B	A→B	A↔B	неА
И	И	И	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	
Л	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	И	И	