Теория вероятностей и математическая статистика

Криковцева Татьяна Георгиевна

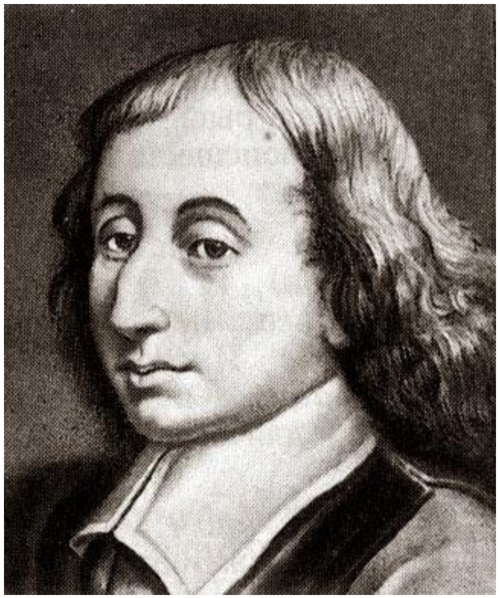
Схема курса

Введение. Определение вероятности.

Классическая теория вероятностей: теоремы сложения, умножения, полная вероятность. Схема Бернулли.

Случайные величины и их числовые характеристики. Статистическое изучение одномерной выборки

Ранние работы - XVII век. Блез Паскаль и Пьер Ферма. Вероятностные закономерности возникающие при бросании костей.



Основные понятия.

Наблюдение явления, опыт, эксперимент, которые можно провести многократно, в теории вероятностей принято называть ***испытанием***. Результат, исход испытания называется ***событием***.

Примеры. Сдача экзамена - это испытание; получение определенной отметки - событие. Выстрел - это испытание; попадание в определенную область мишени - событие. Бросание игрального кубика - это испытание; появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости - событие.

Attention!

Закономерное событие – событие, которое всегда осуществляется, как только создаются определенные условия.

Случайные - события, которые *при одних и тех же условиях* иногда происходят, а иногда - нет.

Статистическая устойчивость.

Пусть эксперимент провели N раз, случайное событие A осуществилось N(A) раз.

Определения: N(A) - частота события. Отношение N(A) / N – относительная частота события

Жорж Бюссон (1707-1788) бросал монету 4040 раз, и "орел" выпал в 2048 случаях.

Карл Пирсон (1857-1936) 12000 раз: орёл выпал 6019 раз. повторил эксперимент *24000* раз, орёл выпал 12012 раз.

N1(A) / N1 = 2048 / 4040 ≈ 0, 5069

N2(A) / N2 = 6019 / 12000 ≈ 0, 5016

N3(A) / N3 = 12012 / 24000 ≈ 0, 5005

$$\frac{N_1(A)}{N_1} \approx \frac{N_2(A)}{N_2} \approx \ldots \approx \frac{N_s(A)}{N_s}$$

При достаточно больших N относительная частота обнаруживает свойством устойчивости

Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла	Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла
Бюффон	4040	0,507	Романовский	80640	0,4923
Де Морган	4092	0,5005	Пирсон К.	24000	0,5005
Джевонс	20480	0,5068	Феллер	10000	0,4979

(Выпадение орла во всех случаях близко к ½.)

Статистическое определение вероятности: если вероятность события A равна p, то

$$p = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}$$

При достаточно большом количестве испытаний в качестве ***статистической вероятности события*** принимают ***относительную частоту*** или число, близкое к ней.

Впервые такую устойчивость обнаружили в демографии.

Например, установлено, что вероятность рождения мальчика, 0,51 равна а, 0,49 девочки −

Формализация эксперимента

1. описание множества элементарных исходов
2. задание событий на этом множестве
3. расчет вероятности событий

Основные понятия

Одним из основных понятий теории вероятностей являются множество элементарных исходов Ω и события как некоторые подмножества этого множества.

Выбирается из практических соображений

<u>Примеры.</u>

Вытаскиваем карту из колоды карт – 36 элементарных исходов

Бросаем монетку – два элементарных исхода

Стреляем в мишень :

Событие – попал/не попал – два элементарных исхода

Событие – Число очков (0-10) – 11 элементарных исходов

Введем в мишени систему координат – событие = координата точки попадания –бесконечно много исходов (следует заметить что в последних примерах исходы не равновероятны.)

Все события могут быть описаны как подмножества множества элементарных событий

Задача. Подбросили игральную кость. Пусть X – число выпавших очков. Описать мн-во элем. исходов и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$\omega_k = \{X = k\}, k = 1,..,6$ - элементарный исход(событие)- кол-во выпавших очков

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

A = {X кратно трем} $A = \{\omega_3, \omega_6\}$

B = {X нечетно} $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

C = {X > 3} $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

D = {X < 7} $D = \{\omega_1, .., \omega_6\}$

E = {X дробно} $E = \varnothing$ Е – невозможное событие

F = {0,5 < X < 1,5} $F = \{\omega_1\}$

<u>Определение1.</u> Два события совместны, если соответствующие мн-ва имеют общие элементы, иначе – несовместны.

<u>Определение2.</u> События А и В несовместны, если наступление одного из них исключает наступление другого.

A = {X кратно трем} $A = \{\omega_3, \omega_6\}$

B = {X нечетно} $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

C = {X > 3} $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

D = {X < 7} $D = \{\omega_1, .., \omega_6\}$

E = {X дробно} $E = \varnothing$ E – невозможное событие

F = {0,5 < X < 1,5} $F = \{\omega_1\}$

Совместны: А и В, А и С, А и D, В и С Несовместны: А и F, С и F

<u>Определение.</u> Событие совпадающее с мн-вом всех элементарных исходов (включает все элементарные события) называется достоверным

<u>Определение</u>. $\overline{A} = \Omega - A$ событие противоположное А

Определение вероятности

p(A) – числовая ф-ция, определенная для любого события A, удовлетворяющая трем аксиомам:

1) $p(A) \ge 0$ (вероятность любого события неотрицательна)

2) $p(\Omega) = 1$ (*вер – ть достоверного события равна* 1; *условие нормировки*)

3) $p(A+B) = p(B) + p(B)$ (*вер – ть суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*)

Свойства :

1) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

2) $p(\varnothing) = 0$

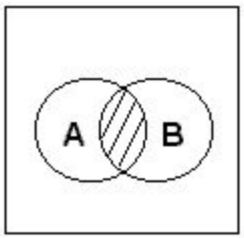
3) $p(A) \le 1$

Алгебраические операции над событиями

Операция сложения, произведения, взятие противоположного

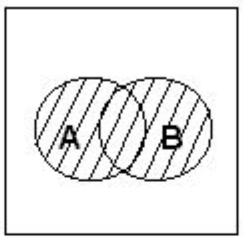
Пример. Из колоды в 36 карт достают карту.

События: A = {выпала дама} ; B = {выпала пиковая карта}



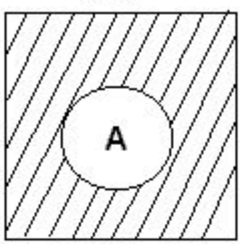
A B

AB = {пиковая дама}



A+B

A+B = {вынутая карта либо дама, либо пиковой масти}



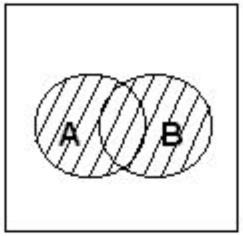
$\overline{A}$

$\overline{A}$ = {вынутая карта не является дамой}

$A\overline{A} = \varnothing$

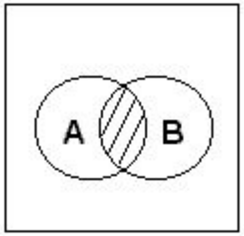
$A + \overline{A} = \Omega$

(прим. сам прямоугольник – мн-во элем. исходов Ω)



A+B

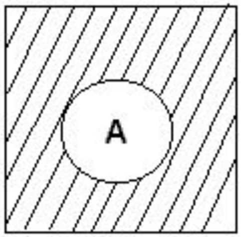
$p(A + B) = p(A) + p(B)$ для несовместных событий
$p(A + B) = p(A) + p(B) – p(AB)$ для совместных(!) событий



A B

$p(AB) = p(A)\cdot p(B)$ для независимых событий

(чуть забегая $p(AB) \neq p(A)\cdot p(B)$ для зависимых событий)



$\bar{A}$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

<u>Сложные события.</u>

<u>Задача</u>. Два стрелка произвели по одному выстрелу по одной и той же мишени в одинаковых и независимых условиях. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго - 0,8.

Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

H= {при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков}

p(H) -?

(!) Событие H – сложное, т.е. наблюдаемое в эксперименте событие может быть сконструировано через другие (более простые) наблюдаемые в эксперименте события.

Пусть A = {попал только первый} p(A) = 0,7

B = {попал только второй} p(B) = 0,8

$$H = A\overline{B} + \overline{A}B$$

$$p(H) = p(A\overline{B}) + p(\overline{A}B) = p(A)\cdot p(\overline{B}) + p(\overline{A})\cdot p(B) =$$

$$= p(A)\cdot(1 - p(B)) + (1 - p(A))\cdot p(B) = 0,7\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,8 = 0,38$$

1). Формулировки «хотя бы один (или n)» - ≥

H = {при одном залпе в мишень попадет хотя бы один из стрелков}

p(H) -?

$$H = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$$p(H) = p(A\overline{B}) + p(\overline{A}B) + p(AB) = p(A)\cdot p(\overline{B}) + p(\overline{A})\cdot p(B) + p(A)p(B) =$$

$$= 0,7\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,8 + 0,7\cdot 0,8 = 0,94$$

2). Формулировки «не более одного (или n)» ≤

H = {в мишени не более одного попадания}

p(H) -?

$$H = A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}$$

$$p(H) = p(A\overline{B}) + p(\overline{A}B) + p(\overline{A}\overline{B}) =$$

$$= 0,7\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,8 + 0,3\cdot 0,2 = 0,44$$

3). p(H) -? H = {мишень поражена} $H = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$

$\overline{H}$ = {мишень непоражена = оба стрелка промахнулись}

$$H = \Omega - \overline{H} = \Omega - \overline{A}\overline{B} \quad (\text{удобно}!)$$

$$p(H) = 1 - p(\overline{A}\overline{B}) = 1 - 0,3\cdot 0,2 = 0,94$$

Классическое определение вероятности

Если число исходов конечно и любой исход равновозможен, то вероятность события А может быть определена как отношение числа исходов, благоприятствующих событию А, к общему числу элементарных исходов:

$$p(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Пример 1. Вероятность выпадения орла 1/2

Для сравнения. Для статистического определения проводили N испытаний и тоже получили колебания отн.частоты около значения 1/2

Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла	Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла
Бюффон	4040	0,507	Романовский	80640	0,4923
Де Морган	4092	0,5005	Пирсон К.	24000	0,5005
Джевонс	20480	0,5068	Феллер	10000	0,4979

$$p = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{2}$$

Пример 2. Вероятность из колоды в 36 карт вынуть даму. p(A)=4/36=1/9

Пример 3. Вероятность из колоды в 36 карт вынуть пиковую карту. p(A)=9/36=1/4

Элементы комбинаторики

Неупорядоченный выбор без повторений (число сочетаний из n по m) $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ $\quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n,\ \ 0! = 1$

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{1\cdot ..\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot ..\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\cancel{1\cdot ..\cdot 7}\cdot \cancel{8}^{4}\cdot \cancel{9}^{3}\cdot 10}{\cancel{1\cdot ..\cdot 7}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120$$

__Задача1__.В лотерее разыгрываются 10 билетов, из которых 5 выигрышных. Найти вероятность того, что среди 3 наудачу взятых билетов все оказались выигрышными.

$$p(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$$N(\Omega) = C_{10}^3 = 120$$

$$N(A) = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10 \qquad p(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

Задача 2. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта на удачу извлекается 10 фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

$$N(\Omega) = C_{100}^{10}$$

$$N(A) = C_1^1 \cdot C_{99}^9 = 1 \cdot C_{99}^9$$

$$p(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{\frac{99!}{90! \cdot 9!}}{\frac{100!}{90! \cdot 10!}} = \frac{99! \cdot 10!}{9! \cdot 100!} =$$

$$= \frac{1 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100} = \frac{\cancel{1 \cdot \ldots \cdot 99} \cdot \cancel{1 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot 10}{\cancel{1 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot \cancel{1 \cdot \ldots \cdot 99} \cdot 100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Вероятность выиграть в лотерею «6 из 36»
A ={отгадать все 6 цифр}; B={отгадать 5 цифр} и тд

$$N(\Omega) = C_{36}^{6} = 1947792$$

$$p(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^6}{C_{36}^6} = 0{,}0000005$$

$$p(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^5 C_{30}^1}{C_{36}^6} = 0{,}00009$$

$$p(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^4 C_{30}^2}{C_{36}^6} = 0{,}003$$

$$p(D) = \frac{N(D)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^3 C_{30}^3}{C_{36}^6} = 0{,}002$$

$$p(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^2 C_{30}^4}{C_{36}^6} = 0{,}2$$

$$p(F) = \frac{N(F)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^1 C_{30}^5}{C_{36}^6} = 0{,}44$$

$$p(G) = \frac{N(G)}{N(\Omega)} = \frac{C_{30}^6}{C_{36}^6} = 0{,}3$$

Задача 4.В коробке 5 изделий, из которых 3 бракованные. Наудачу извлекаются 2 изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одно бракованное изделие.

A = {хотя бы одно бракованное изделие}   p(A) -?

H1 = {одно бракованное изделие}

H2 = {два бракованных изделия}

A = H1 + H2

$$p(A) = p(\text{H}1) + p(\text{H}2) = \frac{N(\text{H}1)}{N(\Omega)} + \frac{N(\text{H}2)}{N(\Omega)} = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$N(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$N(H1) = C_3^1 \cdot C_2^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 6$$

$$N(\text{H}2) = C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

Задача 3 (Классическая схема Бернулли предполагает независимость испытаний!

Студент знает ответы на 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент, взявший экзаменационный билет ответит: а)на все три вопроса; б) на два вопроса из трёх; в) только на один вопрос экзаменационного билета.

$$N(\Omega) = C_{60}^{3} = 34220$$

A = {на все три вопроса}; $N(A) = C_{45}^{3} = 14190$

B = {на два вопроса из трёх} $N(B) = C_{45}^{2} \cdot C_{15}^{1} = 14850$

C = {только на один вопрос экзаменационного билета}

$$N(C) = C_{45}^{1} \cdot C_{15}^{2} = 4725$$

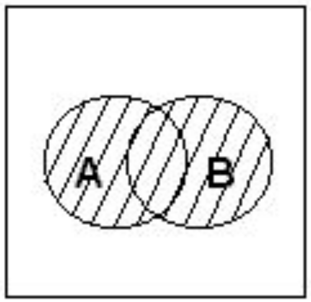
$$p(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_{45}^{3}}{C_{60}^{3}} \approx 0,4147$$

$$p(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_{45}^{2} C_{15}^{1}}{C_{60}^{3}} \approx 0,433396$$

$$p(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{C_{45}^{1} C_{15}^{2}}{C_{60}^{3}} \approx 0,13808$$

Задача 5. Из колоды достали 5 карт. Какова вероятность, что в получившемся наборе будет 2 короля или 4 бубновые карты. Н = {2 короля или 4 бубновые карты}

р



A+B

А = {2 короля } В = {4 бубновые карты}

Н = А + В

р(А + В) = р(А) + р(В) – р(АВ) для совместных событий

$$N(\Omega) = C_{36}^{5} = 376992$$

$$N(A) = C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{3} = 6 \cdot 4960 = 29760$$

$$N(B) = C_{9}^{4} \cdot C_{27}^{1} = 126 \cdot 27 = 3402$$

$$N(AB) = C_{1}^{1} \cdot C_{3}^{1} \cdot C_{8}^{3} = 168$$

р(А + В) = р(А) + р(В) – р(АВ) =32994/376992 ≈ 0,0875

Условные вероятности. Независимость событий

Определение 1. Условная вероятность события A при условии B равна

$$p(A/B)=\frac{p(AB)}{p(B)},\ p(B)>0$$

Определение 2. Событие A не зависит от события B, если $p(A/B)=p(A)$

p(AB) = p(A)·p(B) для независимых событий

p(AB) ≠ p(A)·p(B) для зависимых событий

Задача. Из колоды в 36 карт на удачу извлекается одна карта A={вынутая карта туз}; B={вынутая черной масти}; C={вынутая карта картинка}. Установить (не)зависимость

A и C, A и B

Для проверки независимости: $p(AC) = p(A)\cdot p(C)$ для независимых A и C

1) AC = {туз} ; $p(A)=4/36=1/9$; $p(C)=16/36=4/9$;

$p(AC)=1/9 \neq p(A)\cdot p(C)=4/81$ - зависимы

$p(A/C)= p(AC)/p(C)= 1/9:4/9=1/4$

(вер-ть вынуть туз из картинок =1/4, из всей колоды 1/9)

$p(C/A)=p(AC)/p(A)=1/9:1/9=1$
(если туз, то картинка. Событие стало достоверным)

2) AB = {туз черной масти}; $p(A)=1/9$; $p(B)= 18/36=1/2$

$p(AB) = 2/36=1/18 = p(A)\cdot p(B)=1/9*1/2=1/18$ - независимы

Уральский федеральный университет

Формула полной вероятности.

Пусть для событий $\{H_1, H_2 ... H_n\}$ *, наблюдаемых в эксперименте, выполнено:*

$$H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$$

и $H_i H_j = \varnothing, i \neq j,$

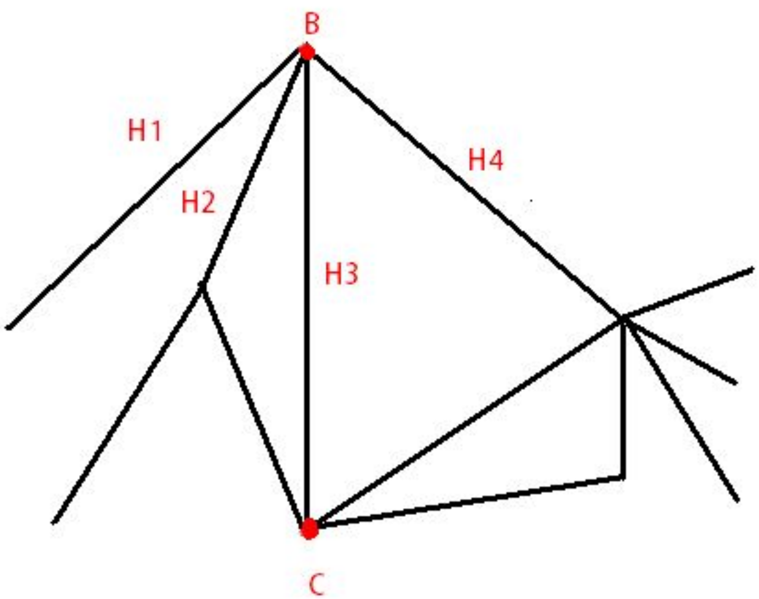
тогда $\forall$ *наблюдаемого в эксперименте события* A *имеет*

место формула полной вероятности $p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(H_k) p(A / H_k)$

примечание: $\{H_1, H_2 ... H_n\}$ *называют гипотезами по отношению к событию* A

Задача. Схема дорог.

Туристы выбирают путь наудачу. Найти вероятность события А={туристы попадут из пункта В в пункт С}



p(H1)= p(H2)= p(H3) = p(H4) =1/4;

p(A/H1)=0;
p(A/H2)=1/2;
p(A/H3)= 1;
p(A/H4)=2/5

$$p(A)=\sum_{k=1}^{n} p(H_k)p(A/H_k)$$ =p(H1)p(A/H1) +p(H2)p(A/H2) +
+ p(H3)p(A/H3) + p(H4)p(A/H4)=

= ¼(0+1+1/2+2/5) = 19/40 = 0,475

Задача 1. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых. Во второй 20 – из них 4 белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, затем из этих двух шаров на удачу взяли один. Какова вероятность, что этот шар белый.

p(H1)=p(H2)= 1/2

p(A/H1) = 8/10 = 4/5;
p(A/H2) = 4/20 = 1/5;

p(A) = p(H1)p(A/H1) + p(H2)p(A/H2) = 1/2

Задача 2. В прудике обитают окуни, карпы и язи. Причем их число соответственно составляет 0,6; 0,3 и 0,1 общего числа рыб соответственно. Вероятность поймать окуня составляет 0,6; карпа 0,4 и язя – 0,1 соответственно. Найти вероятность того, что рыбак вернется с уловом.

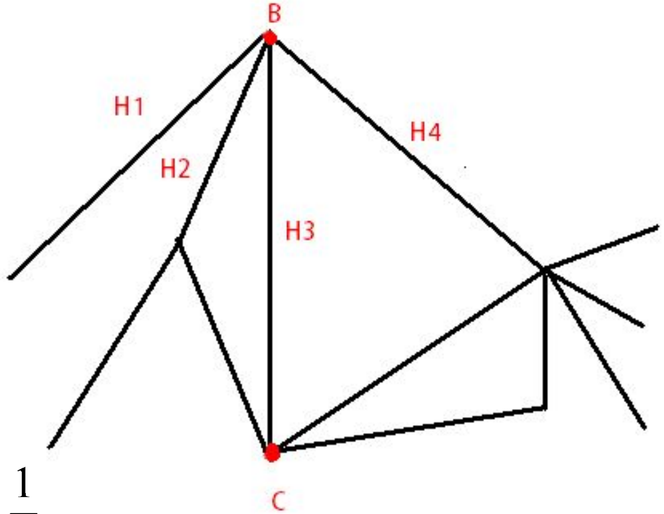
p(A) = 0,6 · 0,6 + 0,3 · 0,4 + 0,1 · 0,1 = 0,49

Формула Байеса

Формула Байеса позволяет расчитать вероятность гипотезы H_k *при условии, что событие* A *произошло*

$$p(H_k/A) = \frac{p(H_k)\cdot p(A/H_k)}{p(A)}, \qquad (\quad) = \sum_{k=1}^{n} (\quad_k)\ (\quad/\quad_k)$$

Задача 1. Туристы выбирают путь наудачу. Найти вероятность, что был выбран второй путь, если известно , что им удалось попасть из пункта В в пункт С.



p(H1) = p(H2) = p(H3) = p(H4) = 1/4
p(A/H1)=0; p(A/H2) =1/2;
p(A/H3) = 1; p(A/H4)=2/5
p(A) = 19/40 = 0,475

$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{19}{40}} = \frac{5}{19} \approx 0,263$$

$$p(H_3/A) = \frac{p(H_3)\cdot p(A/H_3)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{19}{40}} = \frac{10}{19} \approx 0,526$$

Задача 2. При разрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие, причем их число составляет 0,1; 0,3 и 0,6 общего числа осколков соответственно. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью 0,9, средний с вероятностью 0,4 и мелкий - с вероятностью 0,1. В результате подрыва снарядав броню попал один осколок и пробил ее. Найти вероятность того, что пробоина причинена крупным осколком.

$$p(H_1/A)=\frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(A)}=\frac{0,1\cdot 0,9}{0,1\cdot 0,9+0,3\cdot 0,4+0,6\cdot 0,1}=\frac{0,09}{0,27}=\frac{1}{3}$$

Задача 3. Литье в болванках поступает из двух заготовленных цехов: 70% из первого цеха, 30% из второго цеха. Литье первого цеха имеет 10% брака, второго - 20 % брака. Взятая наудачу болванка оказалась без дефекта. Какова вероятность её изготовления первым цехом.

$$p(H_1/A)=\frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(A)}=\frac{0,7\cdot 0,9}{0,7\cdot 0,9+0,3\cdot 0,8}=\frac{0,63}{0,87}\approx 0,362$$

Задача 3. В кармане лежат батарейки трех типов. Вероятность того, что батарейка разряжена соответственно равна 0,6; 0,2; 0,8. После установки наудачу выбранной батарейки часы пошли в ход. Найти вероятность того, что была выбрана батарейка 1) третьего типа, 2) второго типа.

$$p(H_3/A)=\frac{p(H_3)\cdot p(A/H_3)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}(0,6+0,8+0,2)}=\frac{4}{8}\approx 0,5$$

$$p(H_2/A)=\frac{p(H_2)\cdot p(A/H_2)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}(0,6+0,8+0,2)}=\frac{1}{8}\approx 0,125$$

Схема независимых последовательных испытаний

Имеется серия из n независимых экспериментов, каждый из которых может закончится «успехом» с вероятностью p и «неудачей» с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность $P_n(k)$ того, что в этой серии будет ровно k «успешных» экспериментов может быть вычислена по трем формулам:

- точной формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
- приближённой формуле Муавра–Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2};$$

- приближённой формуле Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

Приближённые формулы применяются при больших значениях n. Формуле Пуассона стоит отдавать предпочтение, когда p мало и $np \leq 10$, иначе лучше использовать формулу Муавра–Лапласа.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Для оценки вероятности $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что число успехов будет заключено в пределах от k_1 до k_2, можно использовать интегральную формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

Задача. Вероятность отказа каждого прибора не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. испытано 9 приборов . Найти вероятности следующих событий:

A ={откажет ровно один прибор}

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k};$$

B ={откажет хотя бы один прибор}

C ={откажет не более одного прибора}

D ={все приборы}

n = 9, p= 0,2, q = 1- q = 0,8

P(A)= $P_9(1) = C_9^1 \cdot 0,2 \cdot 0,8^8 \approx 0,302$

$P(\overline{B}) = P_9(0) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 = 0,8^9 \approx 0,134$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0,866$

P(C)= $P_9(0) + P_9(1) \approx 0,436$

P(D)= $P_9(9) = 0,2^9 \approx 0,0000005$

Формула Пуассона

n ->∞ p ->0 npq ≤ 10

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Задача. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью p=0,0005

A = {за время T откажет ровно 3 элемента}

B = {хотя бы один}

C = {не более трех элементов}

n = 1000, p=0,0005, q = 1 – p = 0,9995, λ = np = 0,5

P(A)= $P_{1000}(3) \approx \frac{e^{-0,5}}{3!} \cdot 0,5^3 \approx 0,0126$

$P(\overline{B}) = P_{1000}(0) \approx \frac{e^{-0,5}}{0!} \cdot 0,5^0 \approx 0,606$ $\quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0,394$

P(C)= $P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) =$

$$\frac{e^{-0,5}}{0!} \cdot 0,5^0 + \frac{e^{-0,5}}{1!} \cdot 0,5^1 + \frac{e^{-0,5}}{2!} \cdot 0,5^2 + \frac{e^{-0,5}}{3!} \cdot 0,5^3 = e^{-0,5}(1 + 0,5 + 1/8 + 1/48) \approx 0,998$$

Локальная и интегральная теоремы Лапласа-Муавра npq > 10

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2};$$

Задача. Вероятность рождения мальчика p=0,512. Считая приемлемой локальную и интегральную теорему Лапласа-Муавра (npq = 100*0,512=24,98 >10) вычислить вер-ти событий

A= {среди 100 новорожденных будет 51 мальчик}

B = {среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек}

$$k = 51$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{51-51,2}{\sqrt{24,99}} \approx -0,04$$

P(A)= $P_{100}(51) \approx \frac{1}{\sqrt{24,99}}\varphi(-0,04) = \frac{0,3986}{\sqrt{24,99}} = 0,079$

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$

Плотность вероятности нормального распределения

Значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	[illegible]	1692	[illegible]	[illegible]	1626	[illegible]	1582	1561	1540	[illegible]

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

P(B)= $P_{100}(51 \le m \le 100) = \Phi\left(\frac{100 - 51,2}{\sqrt{24,99}}\right) - \Phi\left(\frac{51 - 51,2}{\sqrt{24,99}}\right) = \Phi(9,76) - \Phi(-0,04) =$

$$= \Phi(9,76) + \Phi(0,04) = 0,5 + 0,0160 = 0,5160$$

Функция Лапласа

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left\{-\dfrac{z^2}{2}\right\} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1103	1064	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2224
1,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4115	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4686	4692	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4846	[illegible]	4854	[illegible]
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	0,4986		3,1	4990	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	4998		3,6	4998	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									

Уральский федеральный университет

Задача. Вероятность наступления события *A* в каждом из независимых испытаний равна *p*. Найти вероятность того, что событие *A* наступит *k* раз в *n* испытаниях. а) $p=0,8;\ k=3;\ n=5;$

б) $p=0,01,\ k=10,\ n=200.$

Уральский федеральный университет

Литература

– Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011. – 404 с.
– Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – 7-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2015. – 287 с.
– Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 5-е изд., стер. – М. : КНОРУС, 2010. – 480 с
– Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: учеб. пособие для втузов / Под общ. Ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.:Издательство Физико-математической литературы, Физматлит, 2004 – 432 с.
– Андрухаев, Х.М. Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие / Х. М. Андрухаев; Под ред.А.С.Солодовникова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. Шк., 2005. – 174 с.
– Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский; Под ред. В. А. Колемаева. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.