ЗДРАВСТВУЙТЕ !

8.2. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

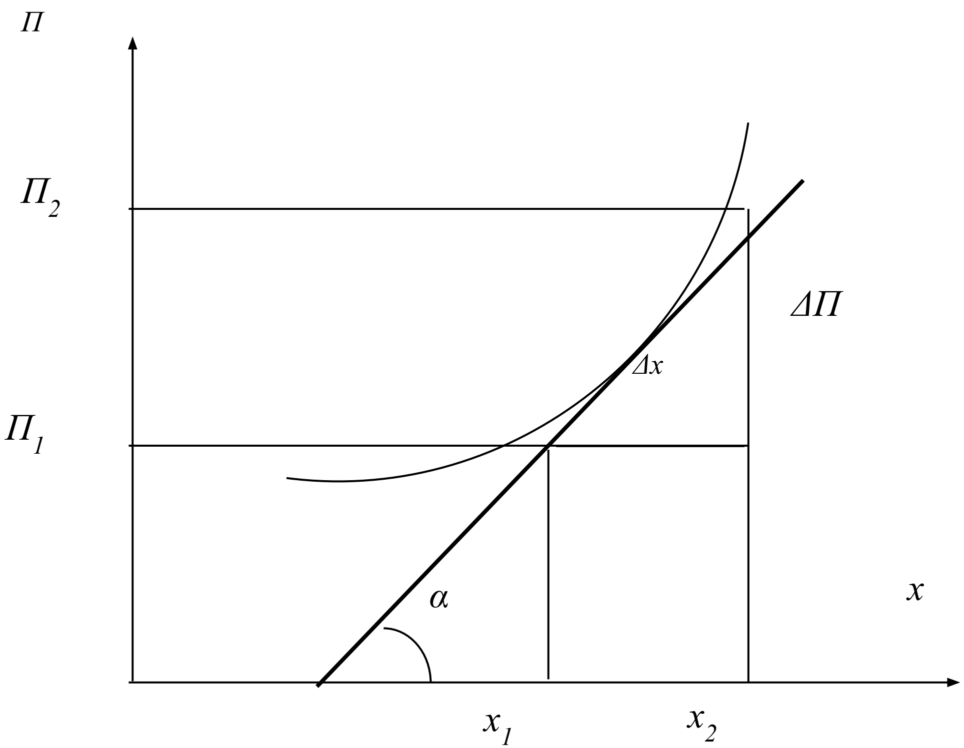


Рис.8.6

Часто материальная точка может двигаться только по некоторой заданной кривой, например вдоль оси абсцисс. В этом случае ее потенциальная энергия зависит только от одной переменной, т.е.

$$U = f(x).$$

График, изображающий зависимость потенциальной энергии от расстояния, называется потенциальной кривой. Оказывается, что анализ формы этого графика дает очень много сведений о характере движения точки.

В качестве примера рассмотрим движение частицы под действием упругой силы (рис. 8.5). При $x=x_0$ пружина не деформирована и силы, действующие на частицу, равны нулю. При отклонении частицы от положения равновесия на нее действует сила $F = -k(x - x_0)$

Заметим, что при $x>x_0$ сила отрицательна (притяжение), а при $x<x_0$ – положительна (отталкивание).

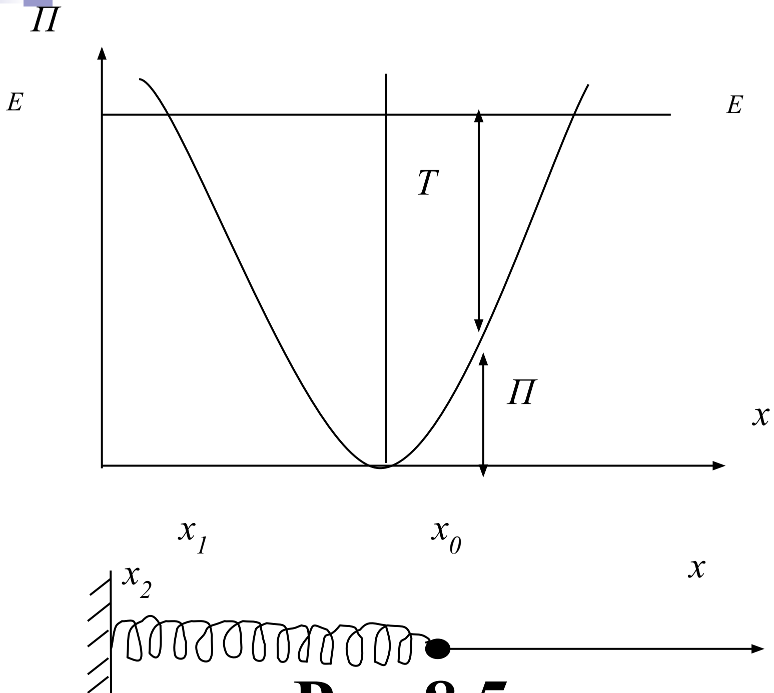


Рис.8.5

Она изображена на рис. 8.5 в виде параболы с вершиной в точке $x=x_0$. Механическая же энергия частицы $F=T+П$ является постоянной величиной и она изображается на графике прямой, параллельной оси абсцисс.

Из графика, прежде всего, видно, что кинетическую энергию в любой точке можно найти сразу как длину отрезка от прямой *EE* до параболы, ибо $T=E-П$. Максимальное значение кинетической энергии частица имеет при $x=x_0$; здесь $П=0$, и $T_{макс}=E$. В точках же $x=x_1$ и $x=x_2$, кинетическая энергия частицы равна нулю, ибо здесь $П_{макс}=E$.

Далее из графика видно, что частица не может сместиться правее точки x_2 и левее точки x_1. Действительно, кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной. В этом случае говорят, что частица находится в потенциальной яме с координатами x_1 и x_2.

Анализ наклона потенциальной кривой позволяет сразу же определить знак силы и тем самым – характер её действия (притяжения или отталкивания). В самом деле, элементарная работа $\Delta A = F\Delta x$; с другой стороны,

$F\Delta x = -\Delta \Pi$.

Следовательно, если сила – функция только одной координаты, например абсциссы x, то $F = -\Delta П / \Delta x$,

или $\Delta A = П_1 - П_2 = -\Delta П$.

Но на графике 8.6 $\Delta U / \Delta x = tg\alpha$, где α - угол наклона потенциальной кривой к оси абсцисс. Соответственно, точное значение силы получается лишь в пределе, когда перемещение Δx стремится к нулю:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta П}{\Delta x} = -\frac{dП}{dx} = -П'(x) \qquad (8.19)$$

Итак, в консервативных системах сила равна производной от потенциальной энергии по координате, взятой с противоположным знаком.

В случае, когда потенциальная энергия возрастает, потенциальная кривая образует с осью абсцисс острый угол. Тангенс острого угла – положительное число, а сила имеет противоположный знак, т.е. отрицательный; следовательно, она является силой притяжения.

Если же потенциальная энергия убывает, то потенциальная кривая образует с осью абсцисс тупой угол, тангенс которого является отрицательным числом.

В этом случае сила положительна, т.е. является силой отталкивания. Наконец, в точках минимума или максимума энергии, сила, очевидно, равна нулю, ибо в окрестностях этих точек она меняет знак. На границах касательная к потенциальной кривой в этих точках параллельна оси абсцисс. В соответствии с (8.19) в точках M и N сила равна нулю, следовательно $\frac{d\Pi}{dx} = 0$ - условие равновесия. Зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы. Поясним это, воспользовавшись графиком на рис.8.8.

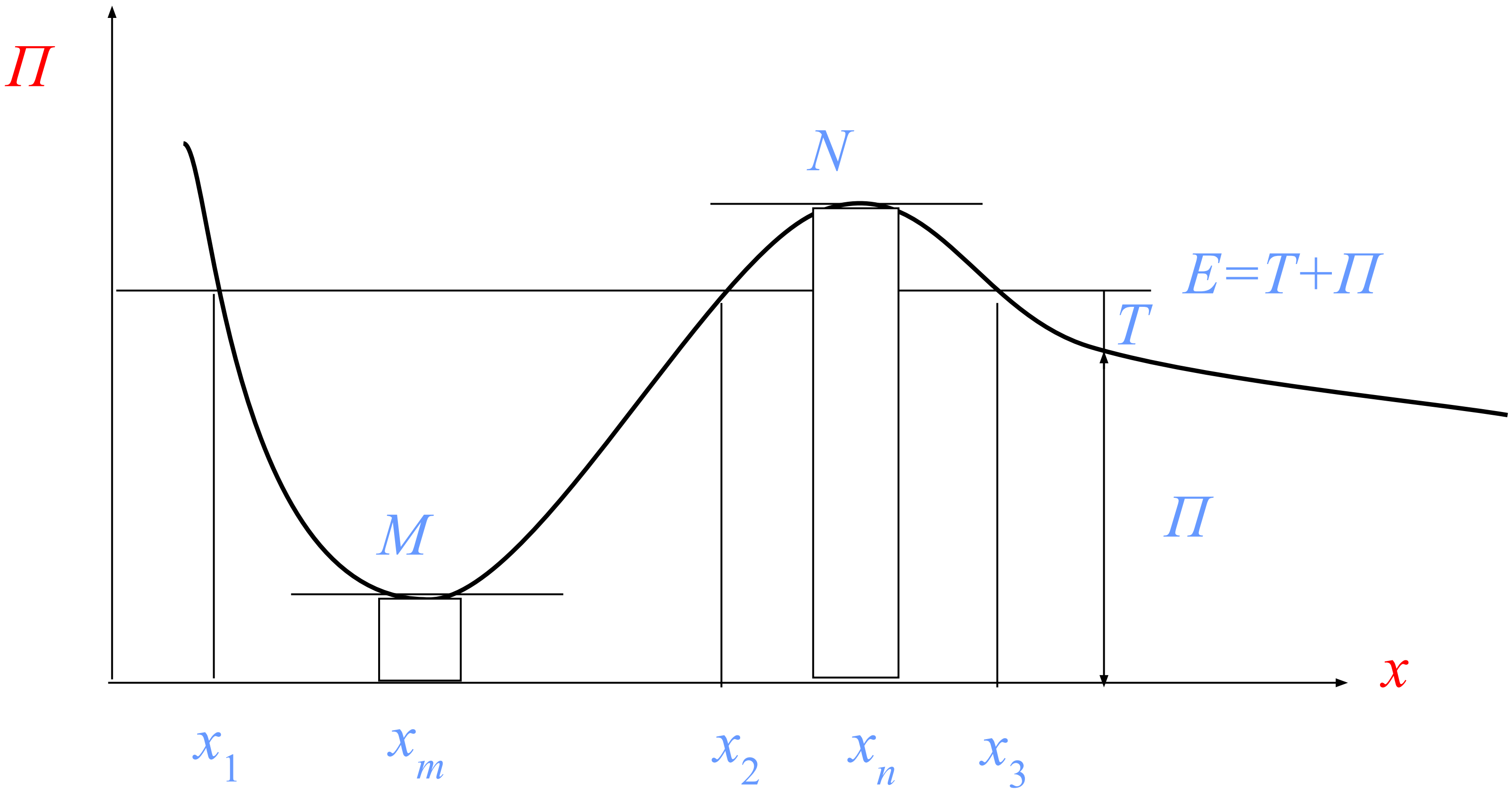


Рис.8.8

Если полная энергия имеет значение, указанное на рис.8.8, то частица может совершать движение либо в пределе от x_1 до x_2, либо в пределах от x_3 до бесконечности.

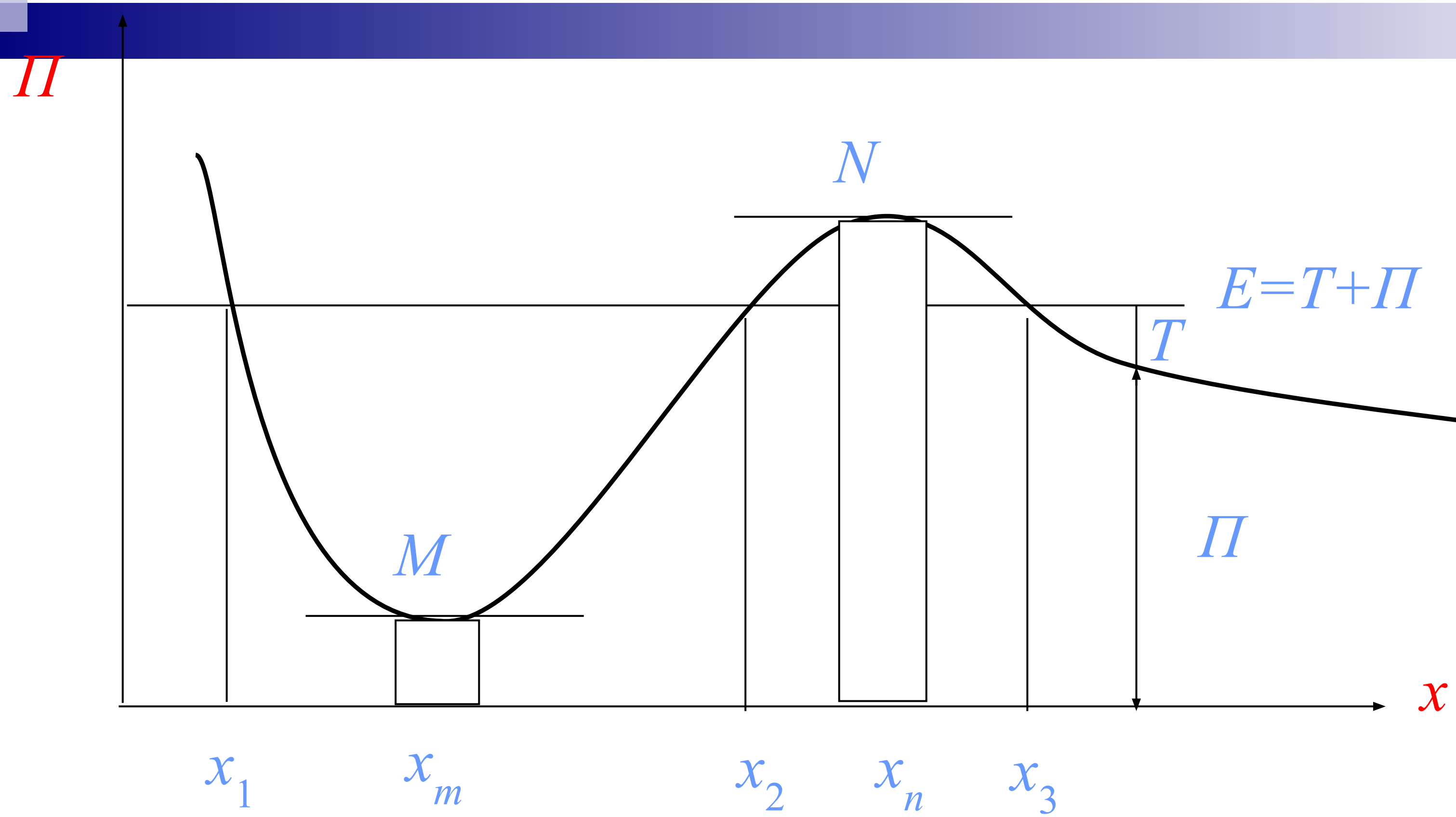


Рис.8.8

В области $x<x_1$ и $x_2<x<x_3$ частица проникнуть не может, так как потенциальная энергия не может стать больше полной энергии (если бы это случилось, то кинетическая энергия стала бы отрицательной). Таким образом, область $x_2<x<x_3$ представляет собой потенциальный барьер, через который классическая частица не может проникнуть, имея должный запас полной энергии. Область $x_1<x<x_2$ называется потенциальной ямой.

Если частица при своем движении не может удаляться на бесконечность, движение называется финитным. Если же частица может уходить сколь угодно далеко, движение называется инфинитным. Частица в потенциальной яме совершает финитное движение. Финитным будет также движение частицы с отрицательной полной энергией в центральном поле сил притяжения (предполагается, что потенциальная энергия обращается в нуль на бесконечности).

Точка M – точка устойчивого равновесия. Условием устойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии $\frac{d^2\Pi}{dx^2} > 0$.

Точка N – точка неустойчивого равновесия. Условием неустойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии $\frac{d^2\Pi}{dx^2} < 0$.

Лекция 9. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

9.1. Импульс силы

9.2. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

9.3. Уравнение движения системы с переменной массой

9.1. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар (или соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновение атомов или бильярдных шаров), сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжках с балкона в известных анекдотах и т.д.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (ударные или мгновенные силы) столь велики, что внешними силами, действующими на них можно пренебречь.

Это позволяет систему тел, в процессе их соударения, приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Когда происходит столкновение между телами, сила взаимодействия за очень короткое время обычно нарастает от нулевого значения в момент контакта до очень большой величины, а затем вновь резко спадает до нулевого значения.

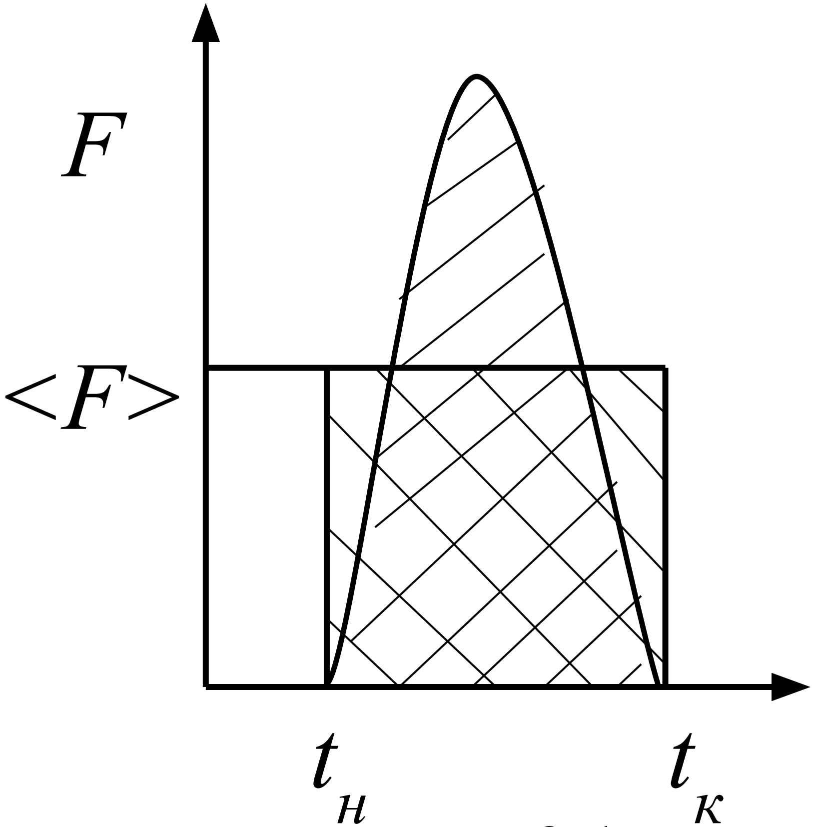


Рис. 9.1

На рисунке 9.1. приведена типичная зависимость величины силы, с которой одно тело действует на другое при столкновении, от времени. Интервал времени $\Delta t = t_к - t_н$, где $t_н$ - "начальный" момент времени (когда начала действовать сила) и $t_к$ – "конечный" момент времени (когда сила перестала действовать), обычно можно определить с большой точностью (как правило, он очень короткий).

Из второго закона следует, что результирующая сила, действующая на тело, равна скорости изменения его импульса:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

(эта формула применима к каждому из участвующих в столкновении тел). В течение бесконечно малого временного интервала dt импульс изменяется на величину $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Проинтегрировав это равенство по времени в течение которого проходит столкновение, получим:

$$\vec{p}_к - \vec{p}_н = \int_{t_H}^{t_K} \vec{F}dt$$

где $\vec{p}_н$ и $\vec{p}_к$ – импульсы тела соответственно перед столкновением и после него.

Интеграл от силы по времени в течение которого она действует, называется импульсом силы:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Таким образом, **изменение импульса тела равно импульсу силы, действующей на него:**

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_к - \vec{p}_н = \int_{t_Н}^{t_К} \vec{F} dt \qquad (9.1)$$

Единицы измерения импульса силы и импульса тела совпадают, т.е. в системе СИ мы имеем единицы кг·м/с (или Н·с).

Поскольку импульс силы

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

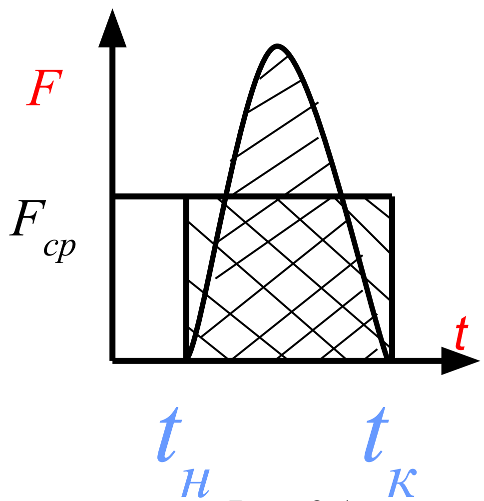


Рис. 9.1

равен площади под кривой, описывающей зависимость величины силы $\vec{F}$ от t (рис. 9.1), формула (9.1) справедлива, только, если сила есть равнодействующая всех сил, действующих на тело. Она справедлива для любой равнодействующей силы $\vec{F}$, причем импульсы $p_н$ и $p_к$ точно соответствуют моментам времени $t_н$ и $t_к$. В некоторых случаях удобно использовать среднюю силу $F_{ср}$, действующую во время столкновения. Она определяется как такая постоянная сила, которая действует в течение того же промежутка времени $\Delta t = t_к - t_н$, что и реальная сила, создает тот же импульс силы и, следовательно, тоже изменение импульса.

Таким образом

$$\bar{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \mathbf{d}t$$

На рисунке 9.1 указали величину средней силы, соответствующей импульсной силе. Площадь прямоугольника $F_{ср}\Delta t$ равна площади под кривой, описывающей зависимость импульса силы от времени.

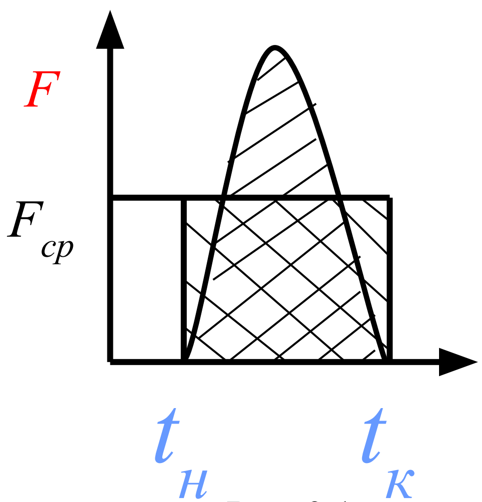


Рис. 9.1

9.2. УДАР АБСОЛЮТНО УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ТЕЛ

Применим теперь законы сохранения энергии и импульса к лобовому **упругому** и **неупругому** удару. Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей.

Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется *коэффициентом восстановления k*:

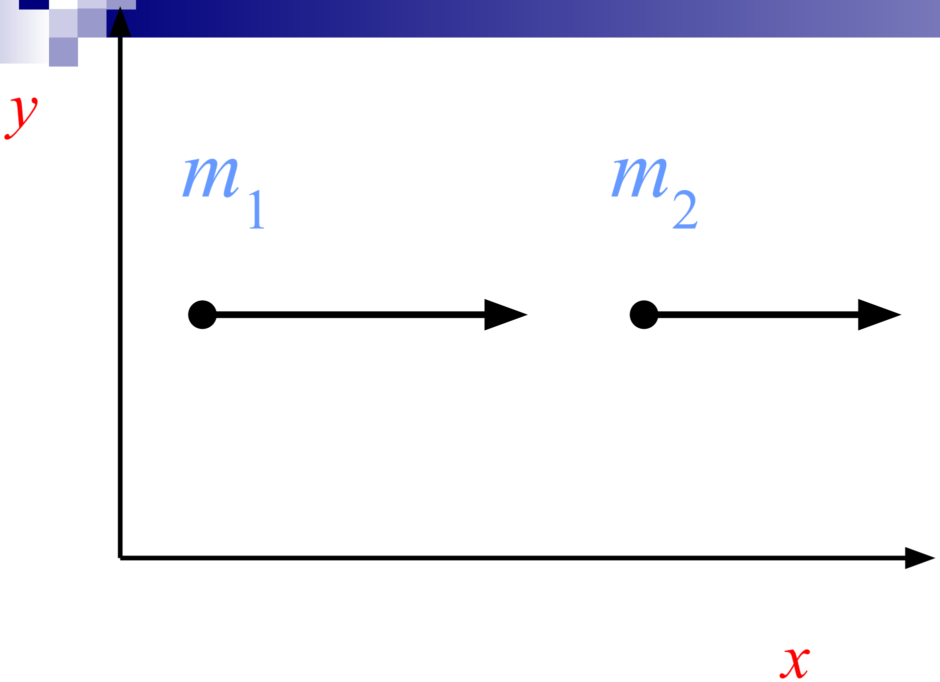
$$k = V_n^{'} / V_n$$

Если для сталкивающихся тел $k = 0$, то такие тела называются абсолютно неупругими, если $k = 1$ – абсолютно упругими. На практике для тел $0<k<1$ (например, для стальных шаров $k \approx 0{,}56$, для шаров из слоновой кости $k \approx 0{,}99$, для свинца $k \approx 0$). Однако в некоторых случаях тела можно рассматривать с большой степенью точности как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется линией удара. Удар называется центральным, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центр масс. Мы будем рассматривать только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

9.2.а. Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (это идеальный случай). Для абсолютно упругого удара выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости частиц до удара через V_1 и V_2, а после удара $V_1^{'}$ и $V_2^{'}$. При любом значении $V > 0$ частица движется вправо (координата x возрастает), в то время как при $V < 0$ частица движется влево и координата x уменьшается. Напоминаю, мы рассматриваем центральный удар.



При указанных допущениях законы сохранения имеют вид:

З.С.И.:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \quad (9.2)$$

З.С.К.Э.:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1'^2}{2} + \frac{m_2V_2'^2}{2} \quad (9.3)$$

Или

$$m_1(V_1 - V_1') = m_2(V_2' - V_2) \quad (9.4)$$

$$m_1(V_1^2 - V_1'^2) = m_2(V_2'^2 - V_2^2) \quad (9.5)$$

$$m_1(V_1 - V_1')(V_1 + V_1') = m_2(V_2' - V_2)(V_2' + V_2) \quad (9.6)$$

Разделив (9.6) на (9.4), получим

$$V_1 + V_1^{|} = V_2^{|} + V_2 \quad \text{или} \quad V_1 - V_2 = V_2^{|} - V_1^{|} \quad (9.7)$$

Итак, мы получили, что относительная скорость двух частиц после столкновения в точности равна их относительной скорости до столкновения; это верно для любого лобового удара, независимо от того, какие массы имеют частицы.

Разберем несколько примеров

1.Частицы с одинаковыми массами. Из закона сохранения импульса имеем:

а). $v_1 + v_2 = v_1^| + v_2^|$. Поскольку неизвестных величин две, необходимо еще одно уравнение. Можно использовать закон сохранения кинетической энергии, но проще применить уравнение (9.7), согласно которому, относительные скорости до и после столкновения одинаковы.

б). $V_1 - V_2 = V_2' - V_1'$. Сумма а) и б) дает $V_1' = V_2$, а разность а) и б) дает $V_1 = V_2'$, таким образом, в результате столкновения частицы “обмениваются” скоростями; частица 2 приобретает скорость частицы 1, и наоборот. Если частица 2 первоначально покоилась (V_2=0), то мы имеем, $V_2' = V_1$, $V_1' = 0$.

2. Частица 2 первоначально покоилась (V_2=0). Объединяя уравнение сохранения импульсов с полученными выше соотношениями для V_2' и V_1', получаем:

$$V_2' = V_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right), \qquad V_1' = V_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (9.9)$$

Представляют интерес некоторые частные случаи:

а) $V_2=0$, $m_1=m_2$. Здесь мы имеем $V_2^{\prime}=V_2$ и $V_1^{\prime}=0$. Этот случай мы уже рассматривали.

б) $V_2=0$, $m_1>>m_2$. Это случай, когда очень массивная частица налетает на легкую покоящуюся частицу. Используя (9.9) имеем, $V_2^{\prime}\approx 2V_1$, $V_1^{\prime}=V_1$. Таким образом, скорость массивной частицы практически не меняется, а скорость легкой становится равной удвоенной скорости налетающей частицы.

в) $V_2=0$, $m_1<<m_2$. Движущееся легкое тело сталкивается с очень массивным покоящимся телом. Из (9.9) имеем:

$m_1<<m_2$, $V_1^{\prime}=-V_1$.

Массивное тело практически остается в покое, тогда как очень легкое тело отскакивает практически с той же по величине (но противоположно направленной) скоростью.

г) $V_2=0$, $m_1>m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью $\left(V_1' < V_1\right)$. Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара $V_2' > V_1'$.

д) $V_2=0$, $m_1<m_2$. Направление удара первого шара изменяется – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т. е. $V_2' < V_1'$

9.2.б). Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости до удара $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, то используя закон сохранения импульса, можно записать $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$, где $\vec{V}$ - скорость движения шаров после удара. Тогда:

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2} \qquad (9.9)$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы шаров равны ($m_1 = m_2$), то $\vec{V} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)/2$.

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться.

Вследствие деформации происходит "потеря" кинетической энергии , перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту "потерю" можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 V_1^{\ 2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{\ 2}}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2}$$

Используя (9.9), получаем $\Delta T = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(V_1 - V_2)^2$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно (V_2=0), то

$$V = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} \quad , \qquad \Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 V_1^{\ 2}}{2}$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $V << V_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.

Когда $m_1 >> m_2$, тогда $V \approx V_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (пример, молоток - гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит "потеря" механической энергии под действием диссипативных сил.

Содержание

9.3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае проще всего обратиться к формуле из пятой лекции:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{ц.м.} \qquad (9.10)$$

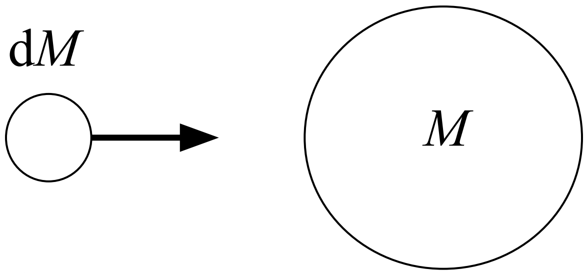
полный импульс системы частицы равен произведению полной массы системы M и скорости Ц.М. системы.

Если продифференцировав обе части равенства (9.10) по времени, то при условии, что М постоянна, получим:

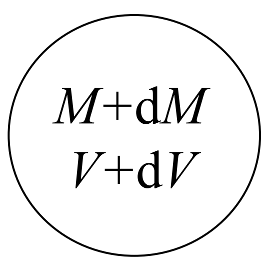
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{ц.м.}}{dt} = M\vec{a}_{ц.м.} = \vec{F}_{внешн.} \qquad (9.11)$$

где $\vec{F}_{внешн.}$ - внешняя результирующая сила, приложенная к системе. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса. Важным примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса *M* ракеты все время уменьшается, т.е. $dM/dt<0$.

Другим примером систем с переменной массой представляет собой погрузка сыпучих или иных материалов на транспортную ленту конвейера; при этом масса M нагруженного конвейера возрастает, т.е. $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t>0$.



а) в момент времени t



б) в момент времени $t+\mathrm{d}t$

Рис. 9.2.

Общий случай системы с переменной массой можно исследовать на примере системы, изображенной на рис. 9.2.

В некоторый момент времени t система имеет массу M и импульс $\vec{p}$, по направлению к ней движется со скоростью $\vec{\upsilon}$ небольшое (бесконечно малое) тело массой dM, которое находится в состоянии, близком к тому, чтобы войти в рассматриваемую систему. Для простоты будем называть этот процесс “столкновением”. За бесконечно малый промежуток времени dt к массе системы M добавляется масса dM. Таким образом, через время dt масса системы изменится от M до M+dM. (заметим, что масса dM может быть отрицательной величиной, например для ракеты, летящей вперед за счет выброшенных газов).

Для того, чтобы применить формулу (9.11), необходимо рассмотреть определенную фиксированную систему частиц. Иными словами, изменение импульса мы должны рассматривать у одних и тех же частиц как до столкновения так и после него. Полную систему мы определим как включающую в себя массы M и dM. Тогда в исходном состоянии, т.е. в момент времени t, ее полный импульс равен $M\vec{V} + \vec{U}dM$. В момент времени t+dt (после того как масса dM присоединилась к массе M) скорость системы в целом становится равной $\vec{V} + d\vec{V}$, а ее полный импульс равен $d\vec{P}$.

Таким образом изменение импульса $d\vec{P}$ запишется в виде:

$$d\vec{P} = (M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) - (M\vec{V} + \vec{U}dM) =$$

$$= Md\vec{V} + \vec{V}dM + dMd\vec{V} - \vec{U}dM$$

При этом в соответствии с формулой (9.11) имеем

$$\vec{F}_{внешн.} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{Md\vec{V} + \vec{V}dM - \vec{U}dM}{dt}$$

Или

$$\vec{F}_{внешн} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - (\vec{U} - \vec{V})\frac{dM}{dt} \qquad (9.12,a)$$

При написании этой формулы мы опустили слагаемое $\frac{dM d\vec{V}}{dt}$, поскольку в пределе бесконечно малых величин оно равно нулю. Заметим, что разность $\vec{U} - \vec{V}$ есть не что иное, как скорость $\vec{V}_{отн}$ тела массой dM относительно скорости тела массой M. Таким образом, $\vec{V}_{отн} = \vec{U} - \vec{V}$ - это скорость с которой масса dM входит в систему с точки зрения наблюдателя, связанного с массой M.

Уравнение (9.12,*а*) можно записать теперь в виде:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{внешн} + \vec{V}_{отн.}\frac{dM}{dt} \qquad (9.12,б)$$

Первое слагаемое в правой части $\vec{F}_{внеш}$ описывает внешнюю силу, действующую на систему в целом (в случае ракеты в нее следует включать силу тяжести и силу сопротивления воздуха). В нее не входит сила, с которой тело массой d*M* действует на тело массой *M* в результате их столкновения, поскольку для системы в целом (полной системы), эта сила является внутренней.

Второе слагаемое в правой части $\vec{V}_{отн}(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)$ описывает скорость, с которой импульс передается системе (или уносится от нее), благодаря добавлению или выносу из нее массы. Поэтому это слагаемое можно рассматривать как своего рода силу, которая обусловлена добавлением (или выбрасыванием) массы и действует на систему массой *M*. Для ракеты это слагаемое называют силой реактивной тяги, т.к. оно описывает силу, возникающую в результате выбрасывания продуктов сгорания и действующую на ракету.

Уравнение (9.12,б) – уравнение движения тела переменной массы, которое впервые было выведено И.В. Мещерским. Из уравнения (9.12,б) можно получить уравнение Э.К. Циолковского (при условии что на ракету не действуют внешние силы):

$$V = U \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Оно показывает:

1) чем больше конечная масса ракеты m, тем больше должна быть стартовая масса ракеты m_0;

2) чем больше скорость истечения газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражения (9.12) получены для нерелятивистского случая.

Лекция окончена!