

Лекция 4. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

4. Вычисление электростатических полей с помощью теоремы Остроградского - Гаусса

4.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости

4.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

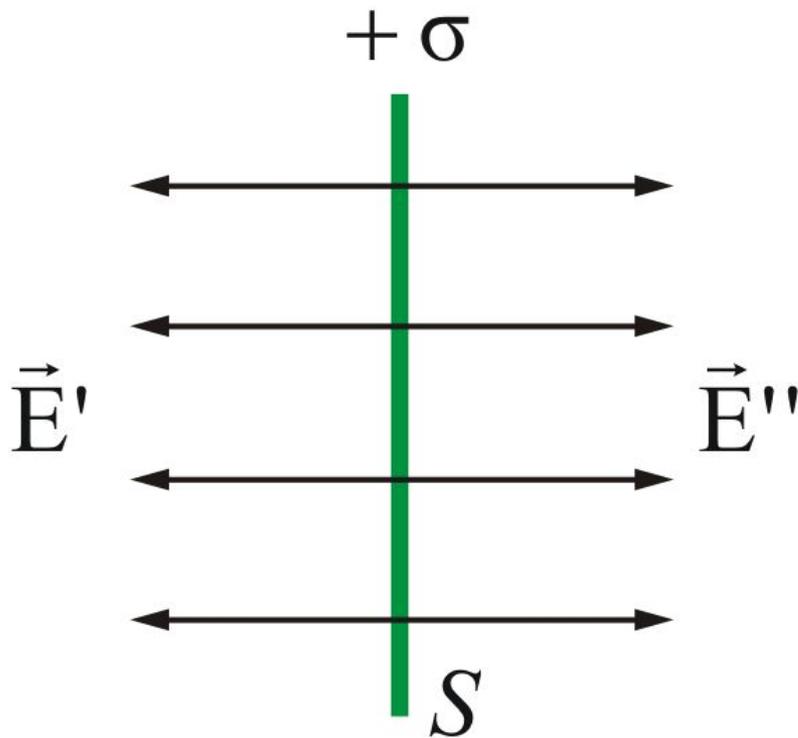
4.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

4.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью заряда, но разным знаком

4.5. Поле заряженного пустотелого шара

4.6. Поле объемного заряженного шара

4.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости



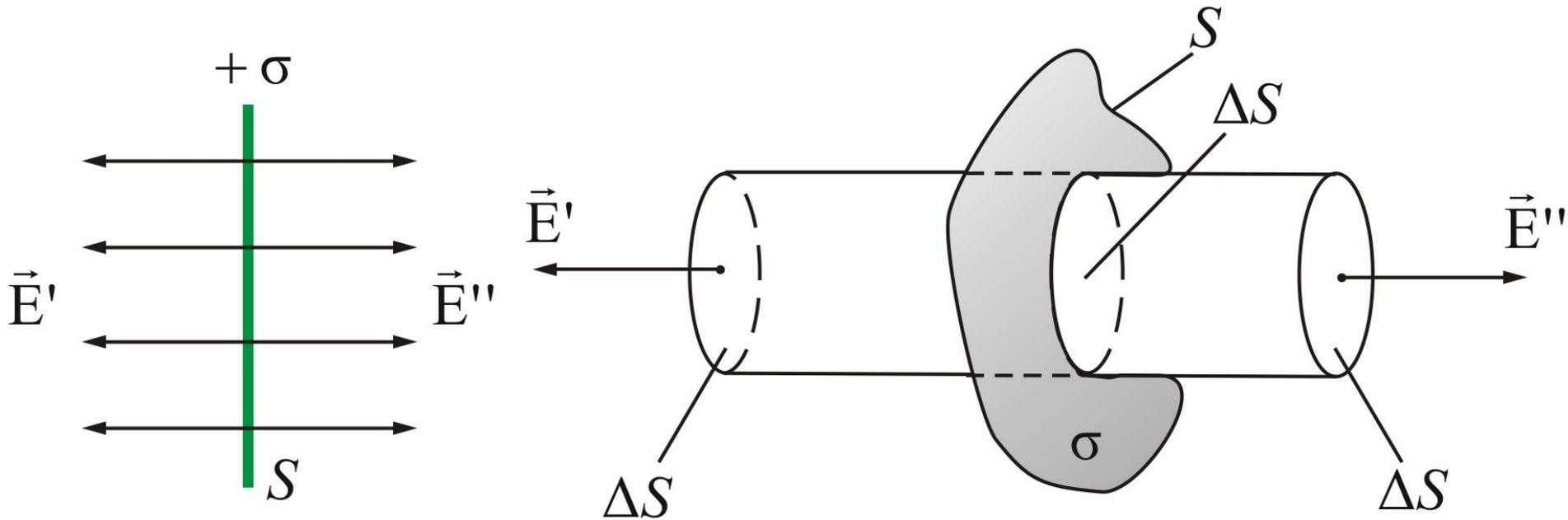
Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

dq – заряд, сосредоточенный на площади dS ;

dS – физически бесконечно малый участок поверхности.

Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS , расположенными симметрично относительно плоскости



тогда $E' = E'' = E$.

Применим теорему Гаусса. Поток Φ_E через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, т.к. $E_n = 0$. Для основания цилиндра $E_n = E$.

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

Внутри поверхности заключен заряд .

Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

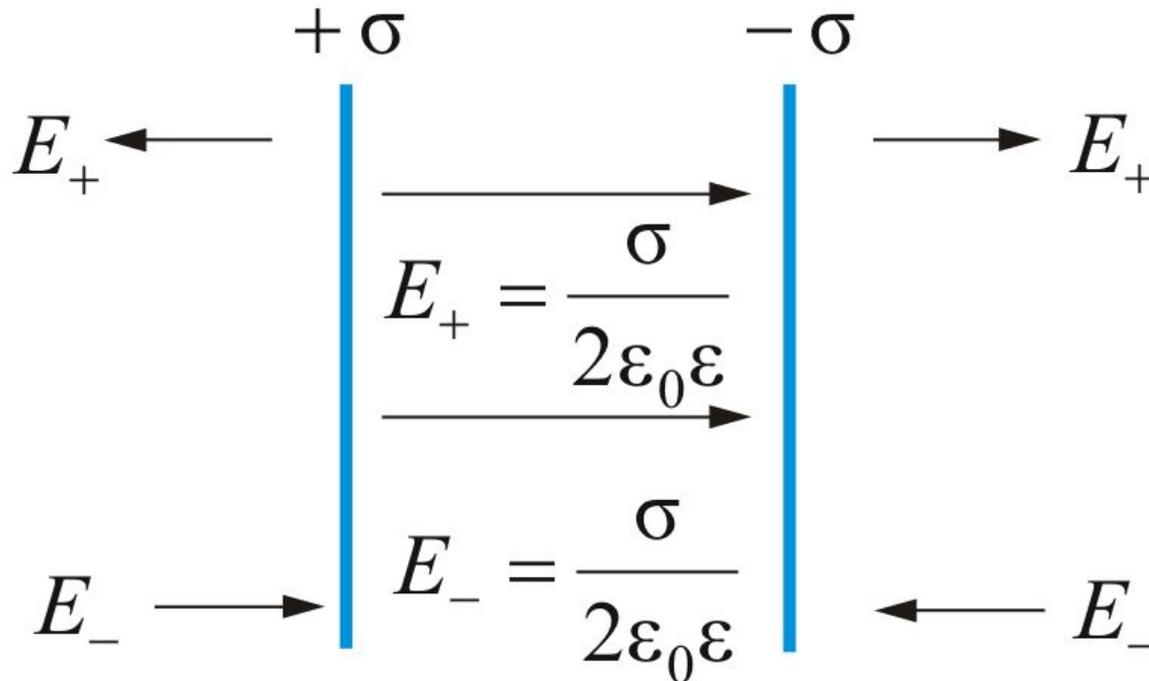
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad \text{тогда} \quad 2\Delta SE = \sigma\Delta S \frac{1}{\varepsilon_0}$$

откуда видно, что напряженность поля плоскости S равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (4.1)$$

4.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью $|\sigma|$



Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

$$E = E_+ + E_- \quad \text{отсюда} \quad E = \sigma / \varepsilon_0 \quad (4.2)$$

Вне плоскостей напряженность поля

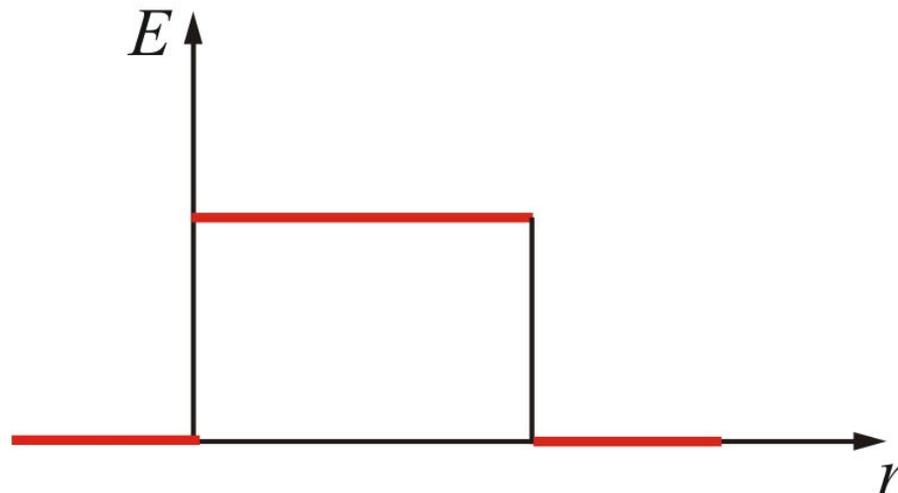
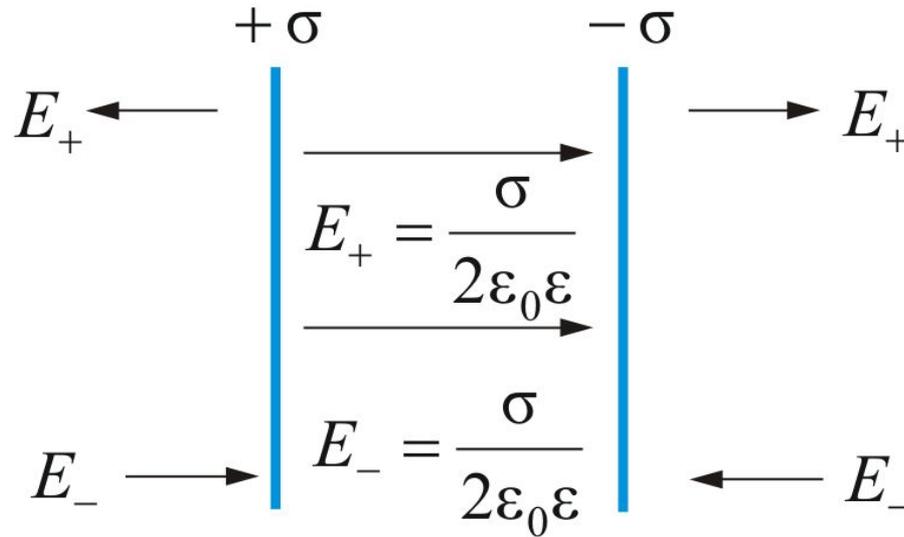
$$E = 0.$$

Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

Распределение

напряженности

электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S} \quad \text{т.е.}$$

$$F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

*Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными.***

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

Сила притяжения между пластинами конденсатора:

где S – площадь обкладок конденсатора.

Т.к.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0\varepsilon$$

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}$$

(4.3)

Это формула для расчета **пондермоторной силы**

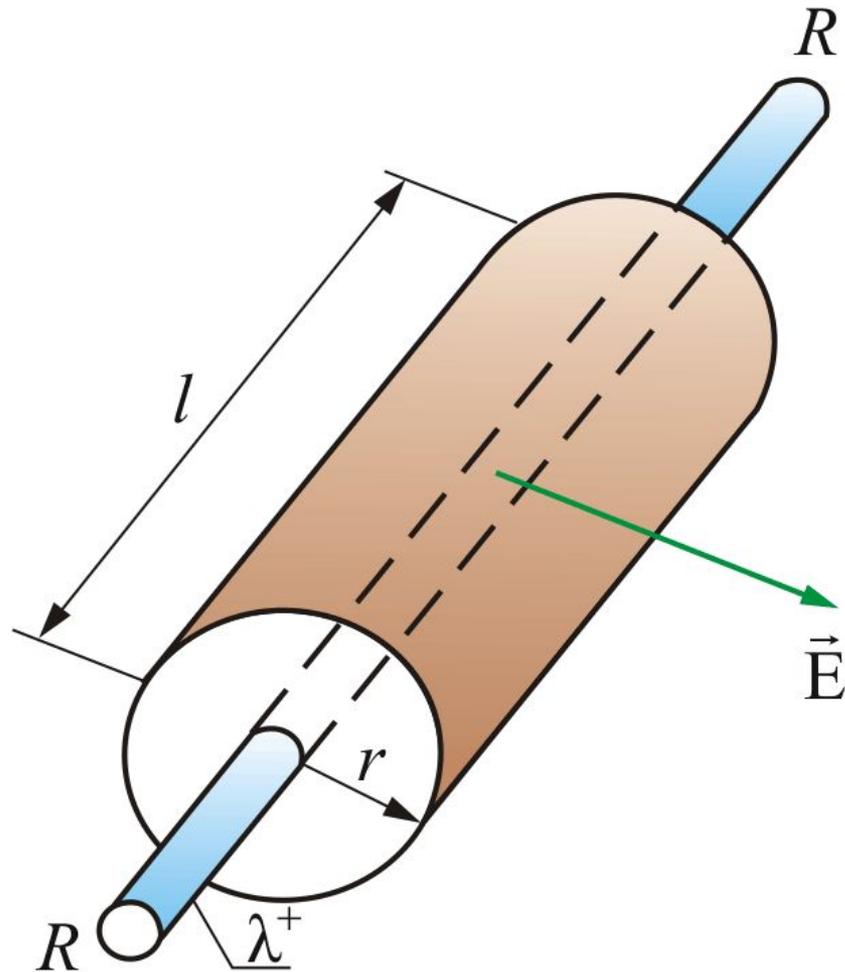
4.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса R* , заряженной с постоянной линейной ПЛОТНОСТЬЮ

$$\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$$

где dq – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную* замкнутую поверхность (*цилиндр в цилиндре*) радиуса r и длиной l (основания цилиндров перпендикулярно оси).



Для оснований цилиндров
для боковой поверхности

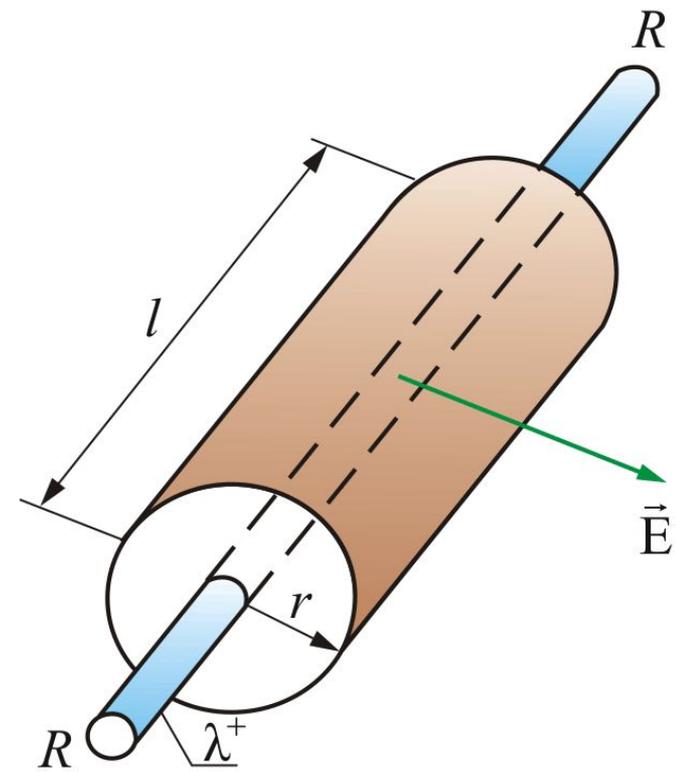
$$E_n = 0,$$

$$E_n = E(r),$$

т.е. зависит от расстояния r .

Следовательно, поток вектора через
рассматриваемую поверхность, равен

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl.$$



При $r \geq R$, на поверхности будет заряд

$$q = \lambda l.$$

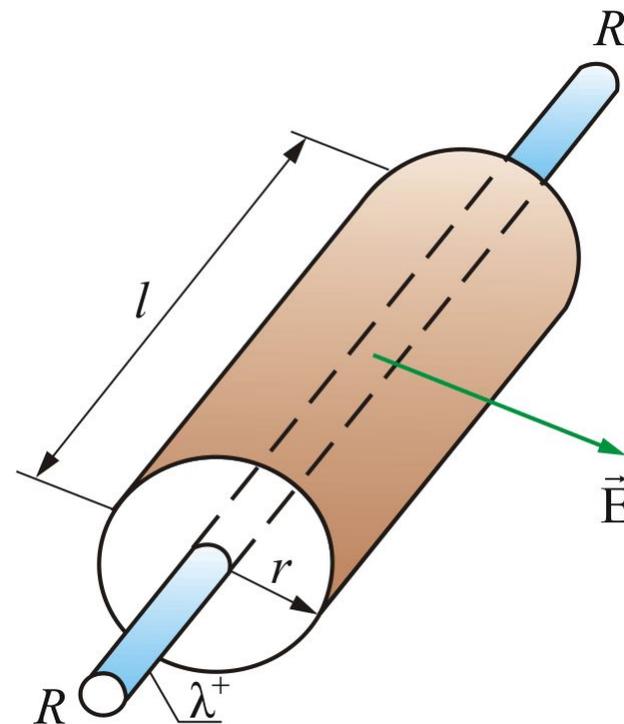
По теореме Остроградского-Гаусса
Тогда

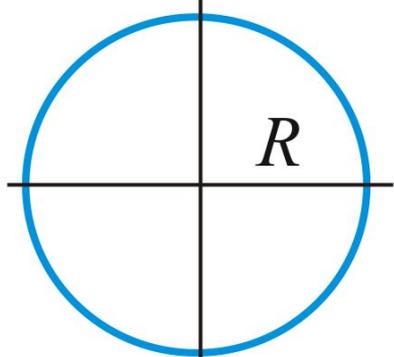
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ при } r \geq R$$

Если $r < R$, то $E(r) = 0$, т.к.
внутри замкнутой поверхности зарядов нет.

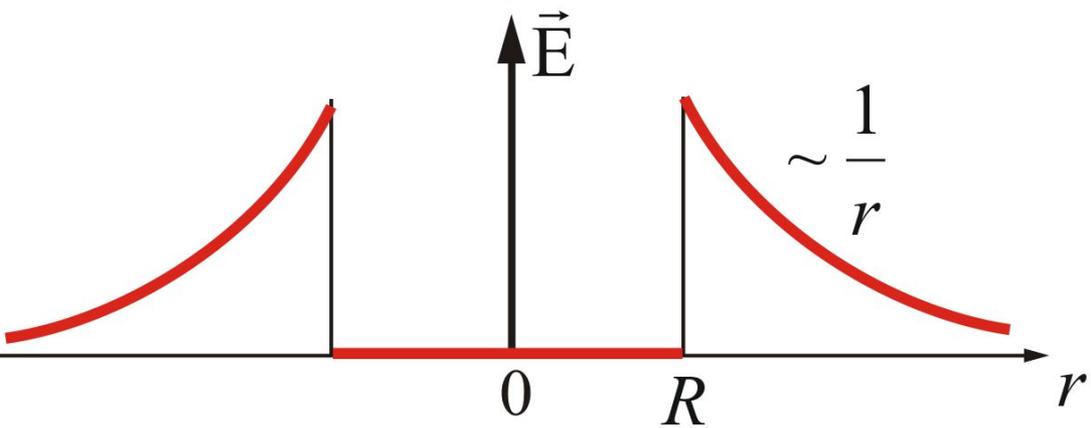
$$E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

(4.4)



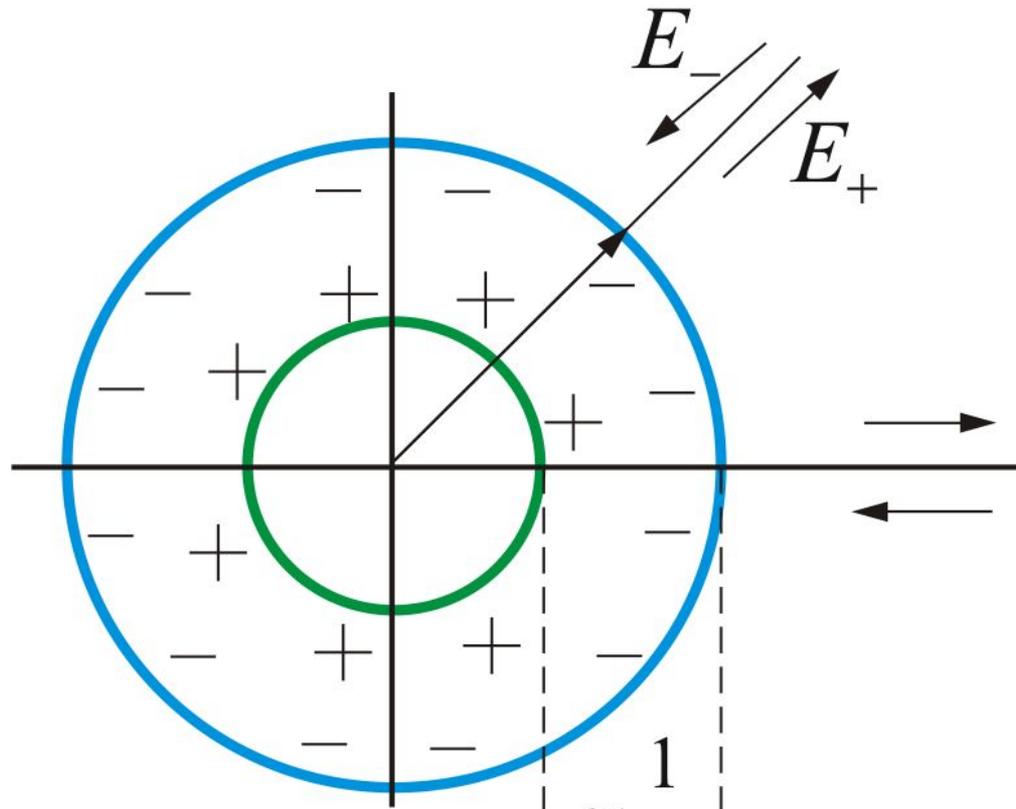


Графически
распределение
напряженности
электростатического
поля цилиндра
показано на рисунке



$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри цилиндра, т.к. нет зарядов} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра} \end{cases}$$

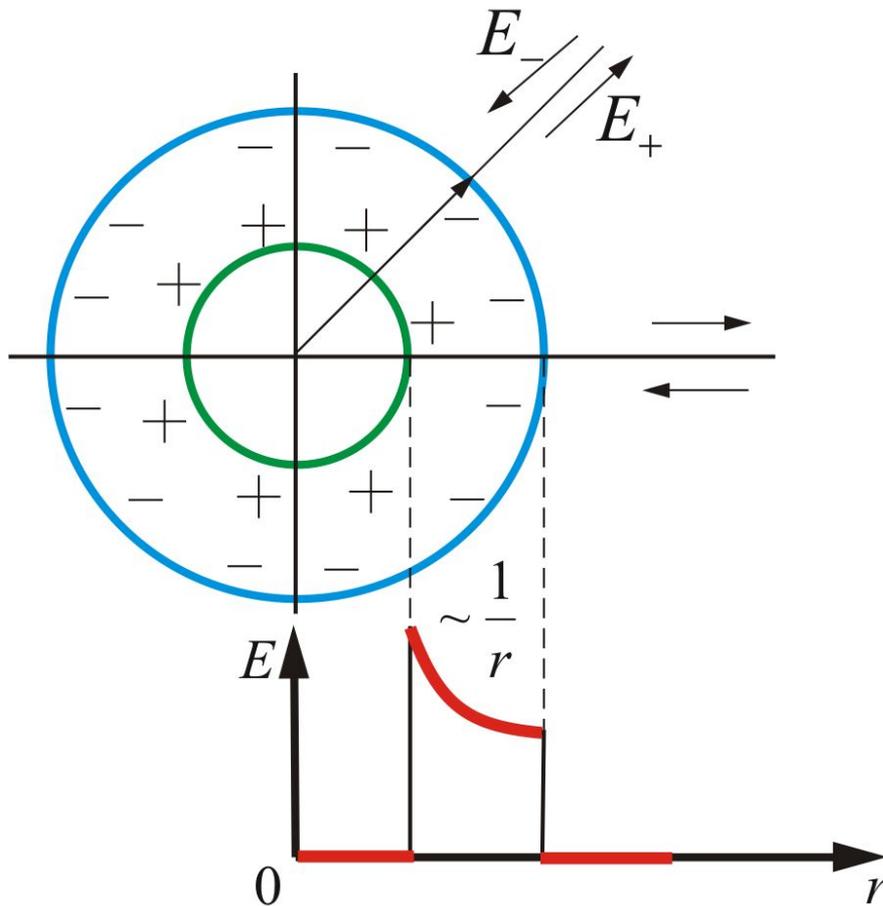
4.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью λ , но разным знаком



Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать

$$E = 0$$

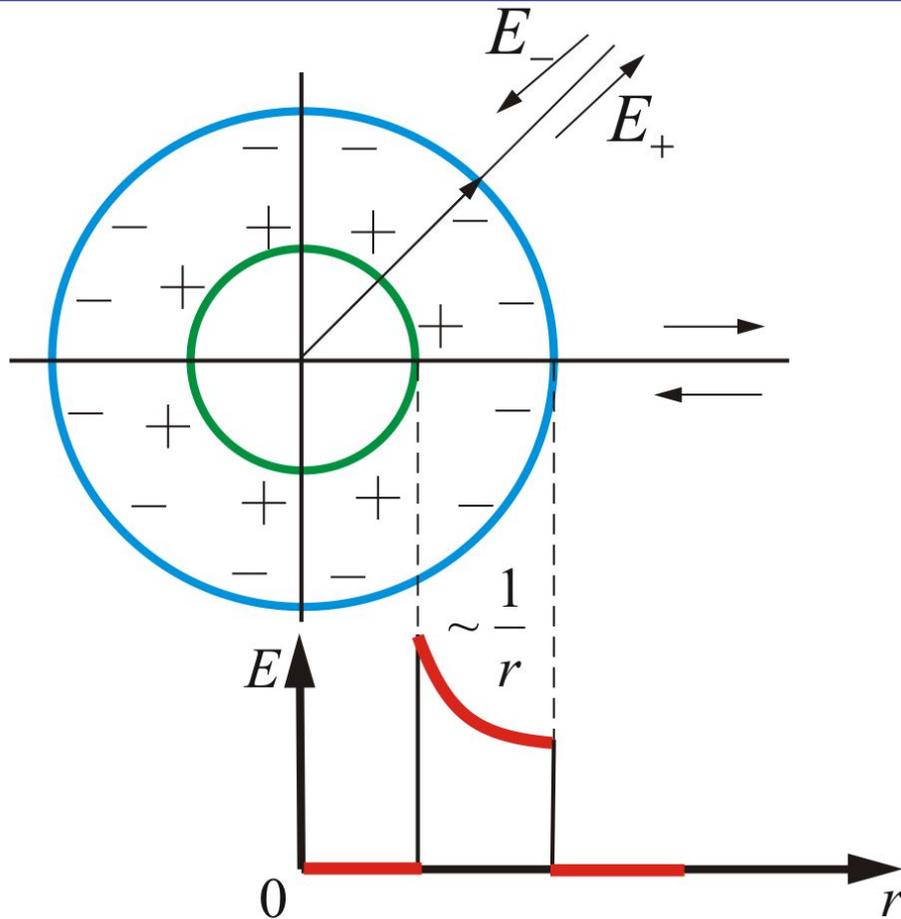
В зазоре между цилиндрами поле определяется так же, как в п. 4.3:



$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.5)$$

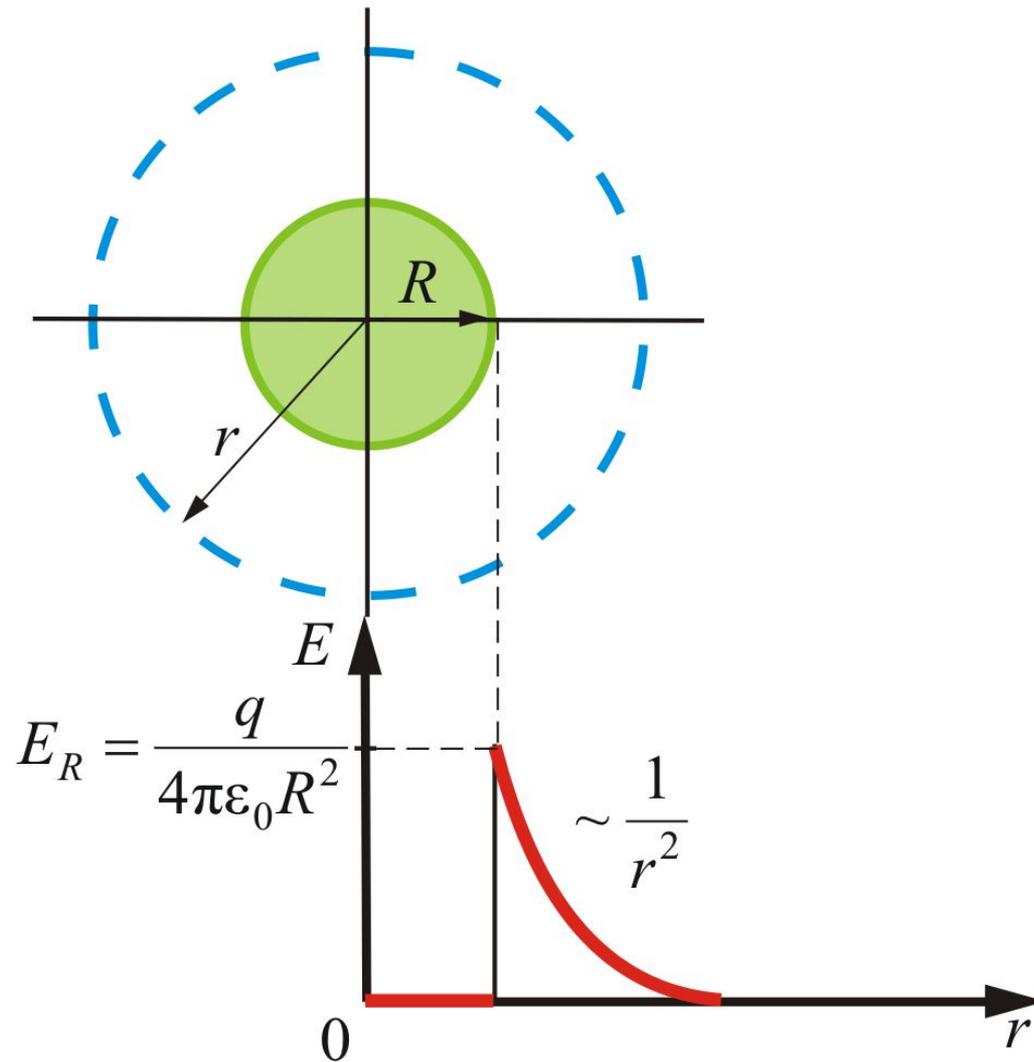
Таким образом для коаксиальных цилиндров имеем:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{– между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

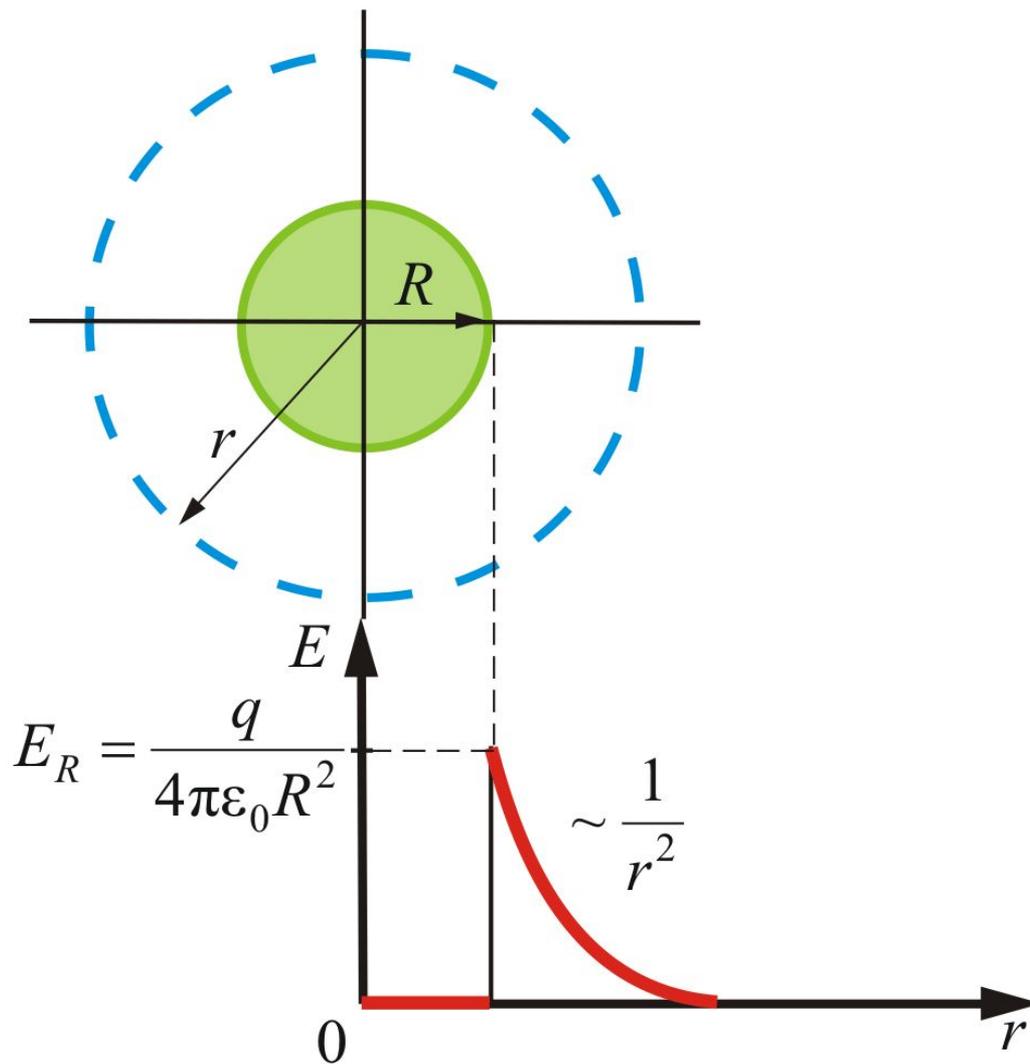


Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

4.5. Поле заряженного пустотелого шара



Вообразим вокруг шара – сферу радиуса r
(рис).



Если $r \geq R$, то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд q , распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

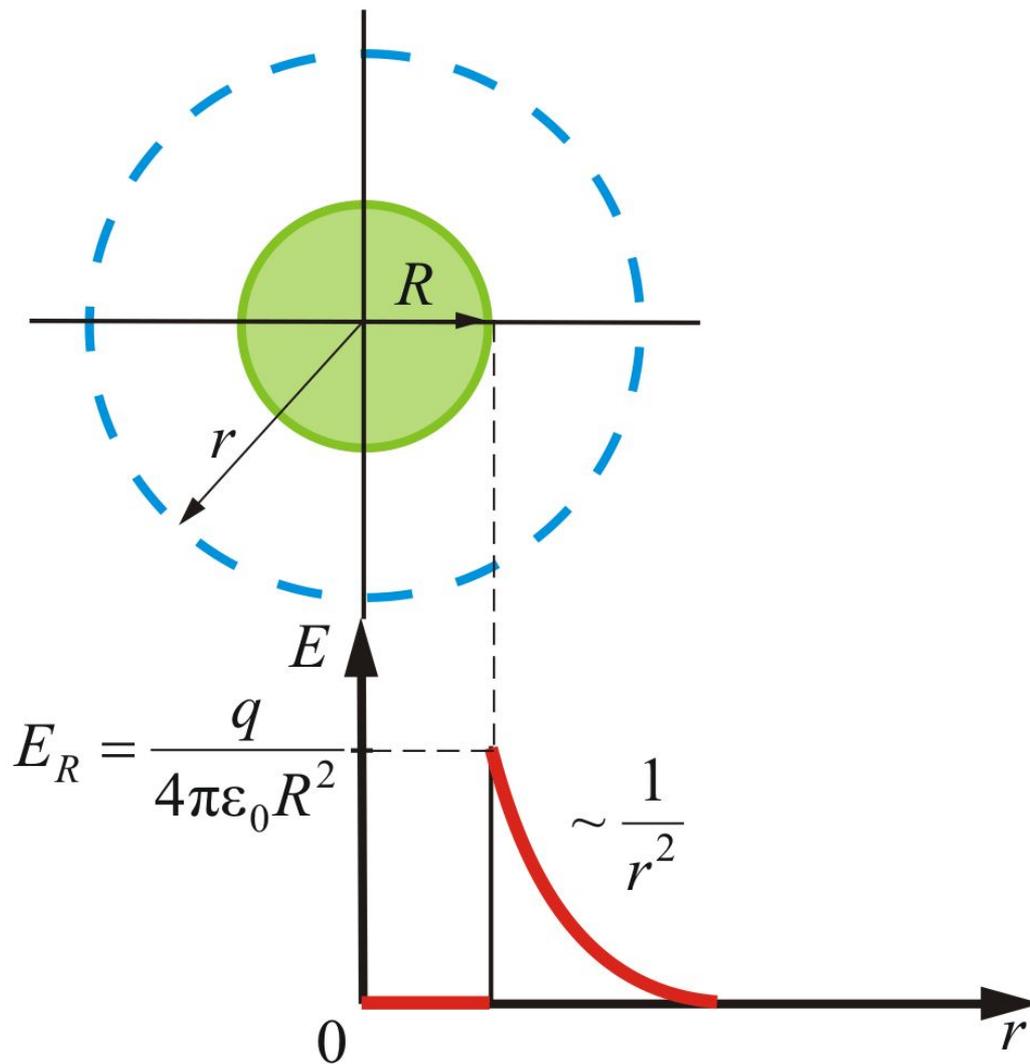
откуда *поле вне сферы*:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (4.6)$$

Внутри сферы, при $r < R$, поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

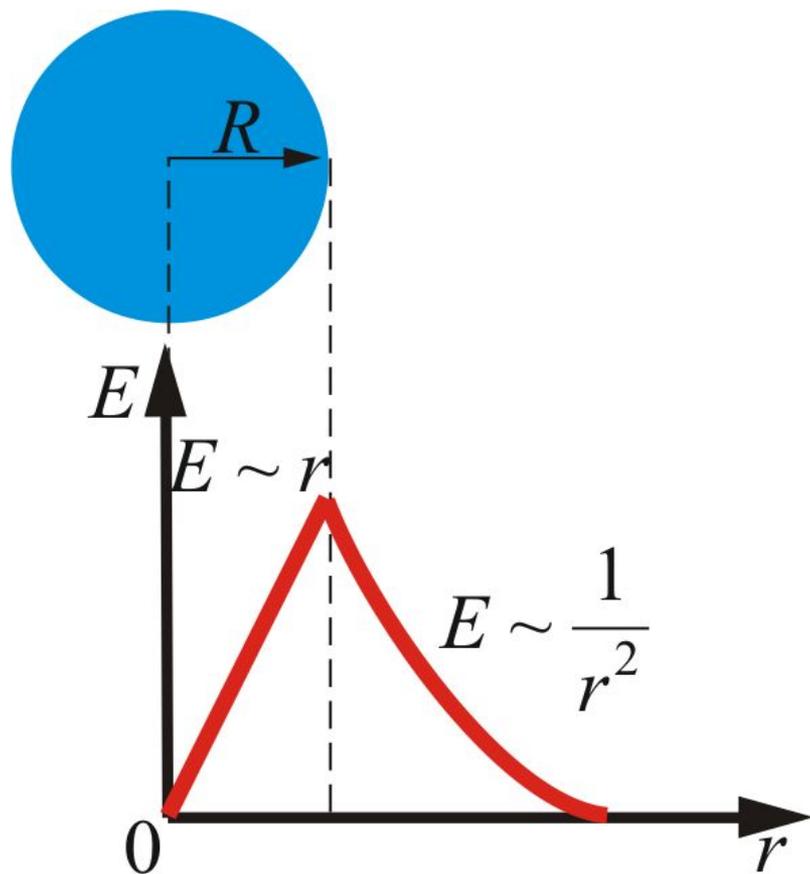
$$E(r) = 0.$$

Как видно, вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



4.6. Поле объемного заряженного шара

Для поля *вне шара* радиусом R получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Внутри шара при $r < R$, сферическая поверхность
будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где ρ – объемная плотность заряда, $\rho = \frac{q}{V}$,

объем шара - $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

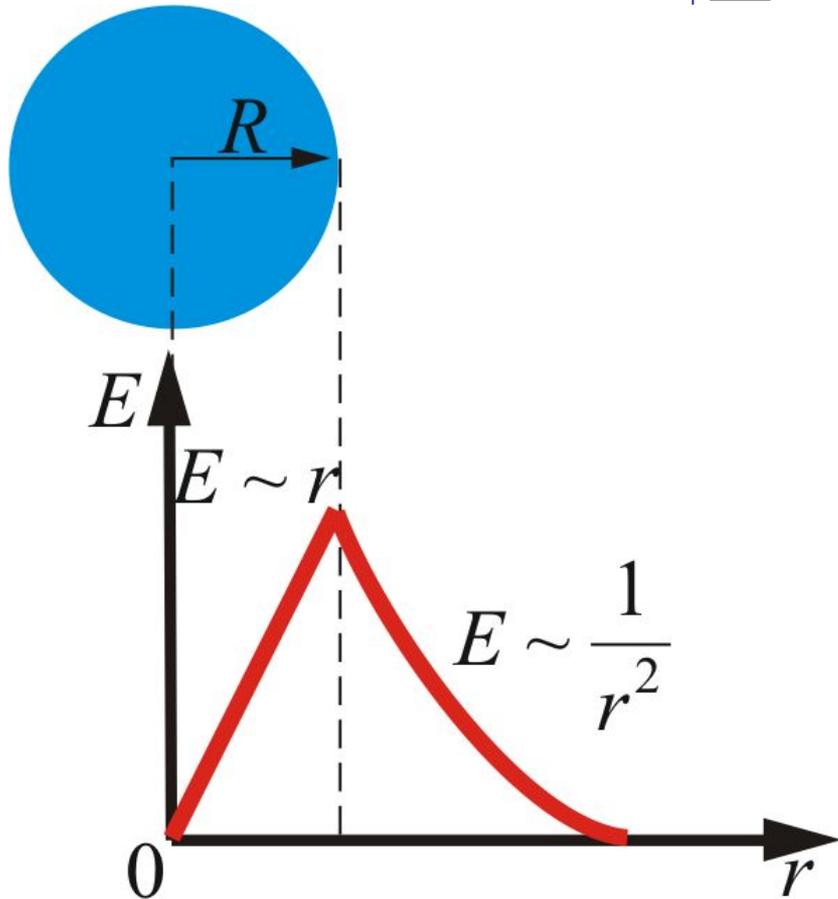
Тогда по теореме Остроградского-Гаусса запишем

$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Т.о., *внутри шара*

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad (4.7)$$

внутри шара имеем $E \sim r$.



Таким образом, имеем:

поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара} (r > R) \end{cases}$$

