



ЗДРАВСТВУЙТЕ!

3. Температура. Единицы изменения температуры

Приведём в соприкосновение два тела: горячее и холодное, через некоторое время их температуры сравняются. Что перешло от одного тела к другому. Раньше, во времена Ломоносова и Лавуазье считали, что носителем тепла является некоторая жидкость – теплород. На самом деле – ничего не происходит, только изменяется средняя кинетическая энергия – энергия движения молекул, из которых состоят эти тела. **Именно средняя кинетическая энергия атомов и молекул есть температура!** И следовало бы температуру измерять в джоулях. Но мы по привычке измеряем температуру в градусах.

Модель: [Изменение температуры](#)

Чтобы связать единицу энергии с градусом, Больцман ввел коэффициент пропорциональности k который впоследствии был назван его именем: k – постоянная Больцмана равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К⁻¹

$$\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (15.10)$$

Формула (15.10) – для расчета на одну молекулу идеального газа.

$$kN_A = R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{мольК}} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмольК}} \quad (15.11)$$

где R – универсальная газовая постоянная. Тогда

$$\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} N_A = k \frac{3}{2} T N_A, \quad (15.15)$$

Следовательно

$$\frac{\mu \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} RT \quad (15.13)$$

это уже для молярной массы и газа.

Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, является **статистической** величиной, то есть параметром, проявляющимся в результате совокупного действия огромного числа молекул. Поэтому не говорят: «температура одной молекулы», лучше сказать: «**энергия одной молекулы, но температура газа**».

С учетом сказанного о температуре, основное уравнение молекулярно кинетической теории можно записать по другому:

$$p = \frac{2}{3} n W_{k_1}, \quad (15.14)$$

где $W_{k_1} = \frac{3}{2} kT$. Тогда

$$p = nkT \quad (15.15)$$

В таком виде основное уравнение молекулярно – кинетической теории употребляется чаще.

Единицы измерения температуры

Так как $\frac{mv^2}{2} > 0$ всегда, то и T не может быть отрицательной величиной. Поэтому в физике была введена **абсолютная шкала температур**. В настоящее время используются следующие шкалы:

1. Шкала Кельвина. 1К – одна из основных единиц системы СИ.

2. Шкала Фаренгейта (немецкий физик 1724 г.) – точка таяния льда 32°F , точка кипения 212°F .

3. Шкала Цельсия (шведский физик 1742г.) – точка таяния льда 0°C , точка кипения 100°C .

$$0^{\circ}\text{C} = 273,15 \text{ K.}$$

Своеобразие температуры заключается в том, что она не аддитивна (аддитивный – получаемый сложением).

Если мысленно разбить тело на части, то температура всего тела не равна сумме температур его частей (длина, объём, масса, сопротивление, и так далее – аддитивные величины). Поэтому температуру нельзя измерять, сравнивая её с эталоном. Для измерения температуры издавна пользуются тем, что при изменении температуры, тела изменяют свои свойства. Поэтому для измерения температуры выбирают какое-то термометрическое вещество (ртуть, спирт и так далее) и определяют величину, характеризующую свойство вещества – **термометрическую величину** (длина столба ртути).

Интервал изменения длины столбика ртути от температуры таяния льда до температуры кипения разбили на 100 частей и $1/100$ называли градусом.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа, где в качестве термометрической величины используют давление. Шкала газового термометра – является абсолютной ($T = 0; p = 0$).

4. Изопрцессы идеальных газов

Изопрцессы идеального газа – прцессы, при которых один из параметров остаётся неизменным.

1. Изохорический прцесс. Закон Шарля. $V = \text{const}$.

Изохорическим прцессом называется прцесс, протекающий при постоянном объёме. Поведение газа при изохорическом прцессе подчиняется закону Шарля: $P/T = \text{const}$, который формулируется так: При постоянном объёме и неизменных значениях массы газа и его молярной массы, отношение давления газа к его абсолютной температуре остаётся постоянным.

График изохорического прцесса на pT диаграмме называется **изохорой** (рис. `5.2). Полезно знать график изохорического прцесса на pT и VT диаграммах.

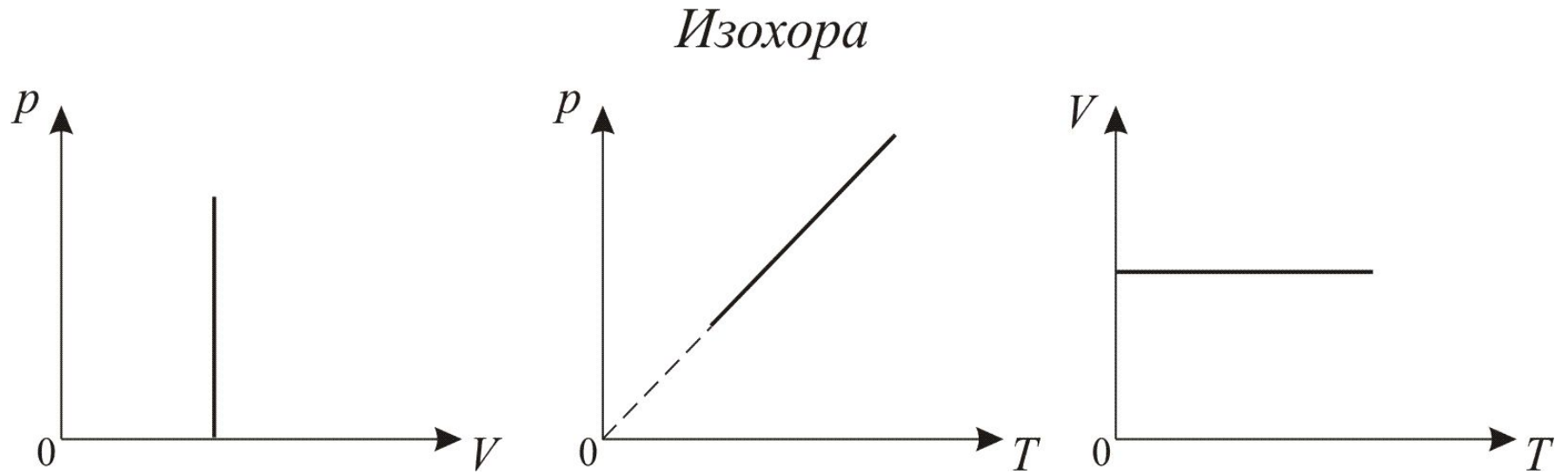


Рис. `5.2

Уравнение изохоры

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (16.16)$$

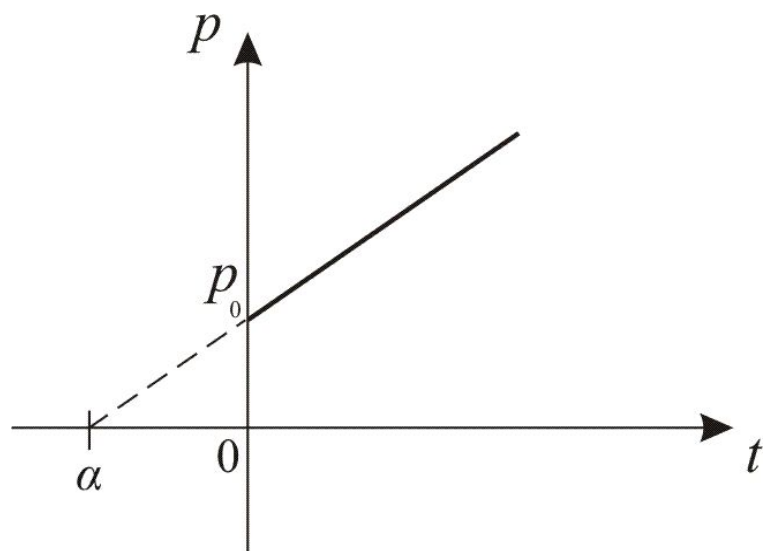


Рис. `5.3

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изохорического процесса записывается в виде

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (5.17)$$

где V_0 – давление при $0\text{ }^\circ\text{C}$ по Цельсию; α – температурный коэффициент давления газа равен $1/273\text{ град}^{-1}$. График такой зависимости на V - t диаграмме имеет вид, указанный на рис. `5.3.

2. Изобарический процесс. Закон Гей – Люссака.
 $p = \text{const}$. Изобарическим процессом называется процесс, протекающий при постоянном давлении. Поведение газа при изобарическом процессе подчиняется закону Гей – Люссака: $V/T = \text{const}$, который формулируется так: при постоянном давлении и неизменных значениях массы и газа и его молярной массы, отношение объёма газа к его абсолютной температуре остаётся постоянным.

График изобарического процесса на V/T диаграмме называется **изобарой** (рис. 5.4). Полезно знать графики изобарического процесса на pV и pT диаграммах.

Модель: Закон Гей-

Изобара

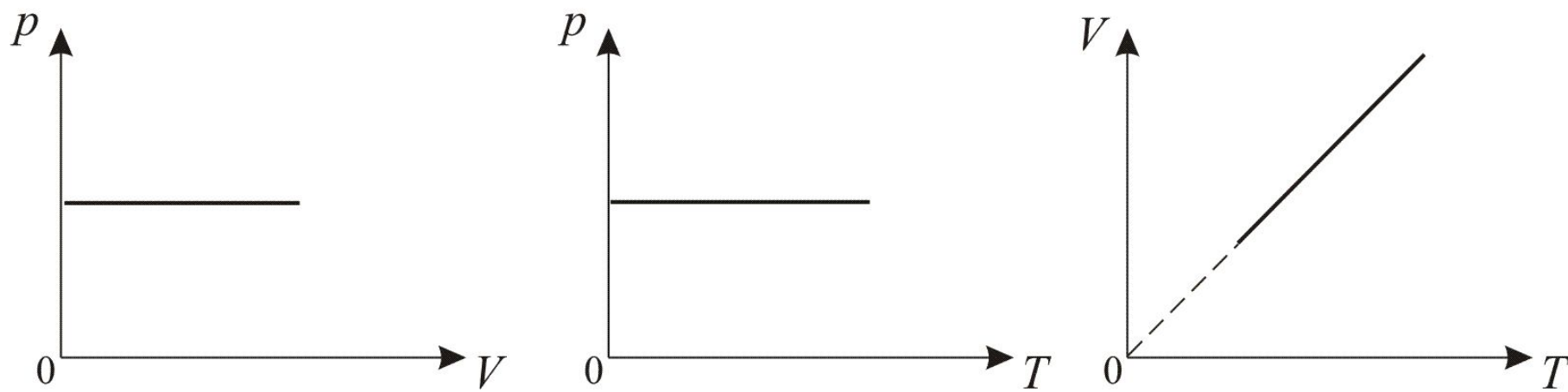


Рис. `5.4

Уравнение изобары

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

(16.18)

Модель: Тепловое расширение

ТОП

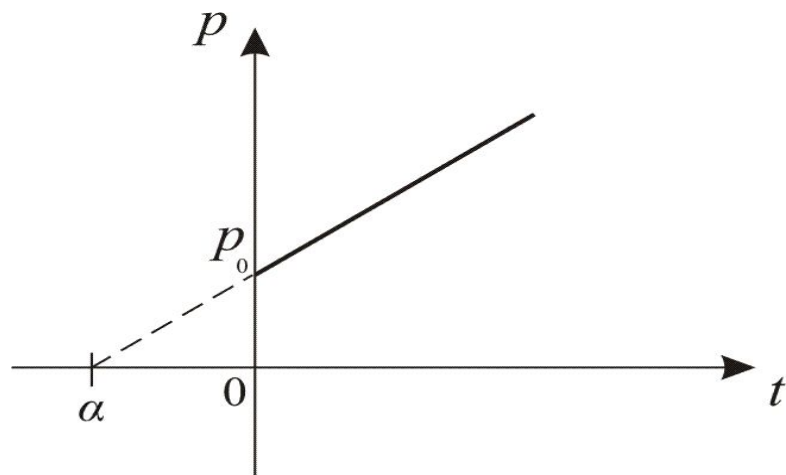


Рис. 5.5

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изобарического процесса записывается в виде

$$p = p_0(1 + \alpha t), \quad (5.19)$$

где p_0 – давление при $0\text{ }^\circ\text{C}$ по Цельсию; α – температурный коэффициент давления газа равен $1/273\text{ град}^{-1}$. График такой зависимости на p - t диаграмме имеет вид, указанный на рисунке 16.5.

3. Изотермический процесс. Закон Бойля-Мариотта. $T = \text{const}$.

Поведение идеального газа при изотермическом процессе подчиняется закону Бойля – Мариотта: $pV = \text{const}$, который формулируется так: при постоянной температуре и неизменных значениях массы и газа и его молярной массы, произведение объёма газа на его давление остаётся постоянным. График изотермического процесса на pV -диаграмме называется **изотермой** (рис. 16.6).

Изотерма

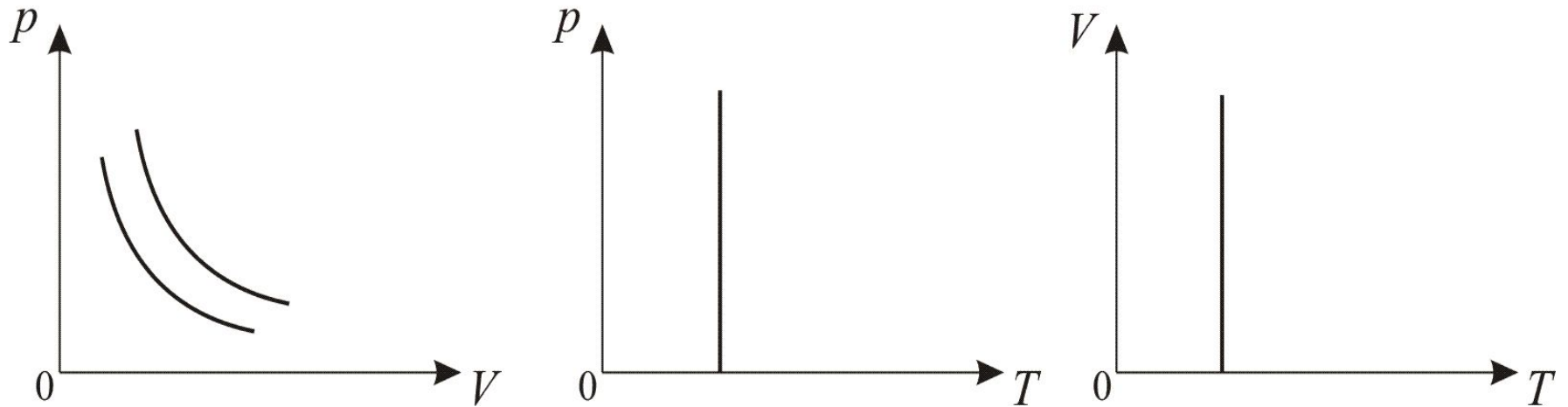


Рис. 5.6

Полезно знать графики изотермического процесса на pV и pT диаграммах. Уравнение изотермы

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (16.20)$$

4. Адиабатический процесс (изоэнтропийный).

Адиабатический процесс – термодинамический процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.



5. Политропический процесс.

Политропический процесс – общий случай всех перечисленных выше процессов. Процесс, при котором теплоёмкость газа остаётся постоянной.

6. Закон Авогадро.

При одинаковых давлениях и одинаковых температурах, в равных объёмах различных идеальных газов содержится одинаковое число молекул. В одном моле различных веществ содержится $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул (число Авогадро).

7. Закон Дальтона.

Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений p , входящих в неё газов $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ (p_1 – давление, которое оказывал бы определённый газ из смеси, если бы он занимал весь объём).

При $p_{см} = p_1 + p_2$; $V_{см} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}$, тогда

$$p = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} + \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \quad (16.21)$$

8. Объединённый газовый закон (Закон Клапейрона).

В соответствии с законами Бойля – Мариотта (5.20) и Гей – Люссака (5.18) можно сделать заключение, что для данной массы газа

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \text{ или } \frac{pV}{T} = \text{const.} \quad (16.22)$$

5. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

В молекулярно-кинетической теории пользуются моделью **идеального газа**, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) собственный объём молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объёмом сосуда;
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным (например, кислород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

Уравнение, связывающее основные параметры состояния идеального газа вывел великий русский ученый Д.И. Менделеев. Он объединил известные вам законы Бойля-Мариотта, Гей – Люсака и Шарля с законом Авогадро.

Уравнение, связывающее все эти законы, называется **уравнением Менделеева–Клапейрона** и записывается так:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (16.23)$$

где m – масса газа; μ – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная; V – объём газа; $\frac{m}{\mu}$ – число молей. Для одного моля можно записать $pV_{\mu} = RT$, или если обозначим $\frac{m}{V} = \rho$ – плотность газа, то

$$p = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho}{\mu} RT. \quad (16.24)$$

Если рассматривать смесь газов, находящихся в объёме V при температуре T , то они имеют молярные массы и массы газов, заполняющие объём (μ_1, m_1, μ_2, m_2). Мы вводим понятие – парциальное давление. Давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объём. Тогда:

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}; \quad p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} \quad (16.25)$$

и так далее.

Согласно закону Дальтона: полное давление газа равно сумме парциальных давлений всех газов, входящих в смесь $p=p_1+p_2+\dots+p_n$. Отсюда, с учетом вышеизложенного, можно записать

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n} \right) RT \quad (16.26)$$

– это уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов.

Лекция 16. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЗОВЫХ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ И ЭНЕРГИЯМ

1. Скорость газовых молекул. Опыт Штерна.
2. Вероятность события. Понятие о
распределении молекул газа по скоростям.
3. Функция распределения Максвелла.
4. Барометрическая формула.
5. Распределение Больцмана.
6. Закон распределения Максвелла-
Больцмана.
7. Распределение Бозе-Эйнштейна, Ферми-
Дирака.

1. Скорости газовых молекул. Опыт Штерна.

Поставьте себя на место исследователей 60-х годов позапрошлого столетия. Сформулирована молекулярно-кинетическая теория, но нет никаких доказательств существования самих молекул! А вся теория базируется на предположении о движении молекул. С какой они движутся скоростью? И как эту скорость измерить, если молекулы невидимы.

Теоретики первыми нашли выход. Из уравнения молекулярно-кинетической теории газов известно, что

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (16.1)$$

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (16.2)$$

Получена хорошая формула, но масса молекулы неизвестна! Тогда можно записать:

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{3kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (16.3)$$

А мы знаем, что $p = RT \frac{\rho}{\mu}$ тогда

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \quad (16.4)$$

где p – давление; ρ – плотность. Они уже измеряемые величины.

Например: плотность азота (N_2) равна $1,25 \text{ кг/м}^3$ при $T=0^\circ\text{C}$ и $p=1 \text{ атм}$, $v_{N_2}=500 \text{ м/с}$. Для водорода: $v_{H_2}=2000 \text{ м/с}$.

При этом, интересно отметить, что скорости молекул в газе близки к скорости звука в этом газе. Это объясняется тем, что звуковые волны переносятся молекулами газа. И неудивительно поэтому, что

$$v_{\text{зв}} \approx \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Экспериментально впервые скорости молекул были измерены в 1920 г. Штерном. За этот опыт и за большой вклад в развитие молекулярной физики в 1943 г. он был удостоен Нобелевской премии.

В этом опыте были не только измерены скорости газовых молекул, но и показано, что они имеют большой разброс по скоростям. Причина, в хаотичности теплового движения молекул. Ещё в XIX веке Максвелл утверждал, что молекулы беспорядочно сталкиваясь друг с другом как-то «распределяются» по скоростям, причём вполне определённым образом.

Общая Физика

М К Т

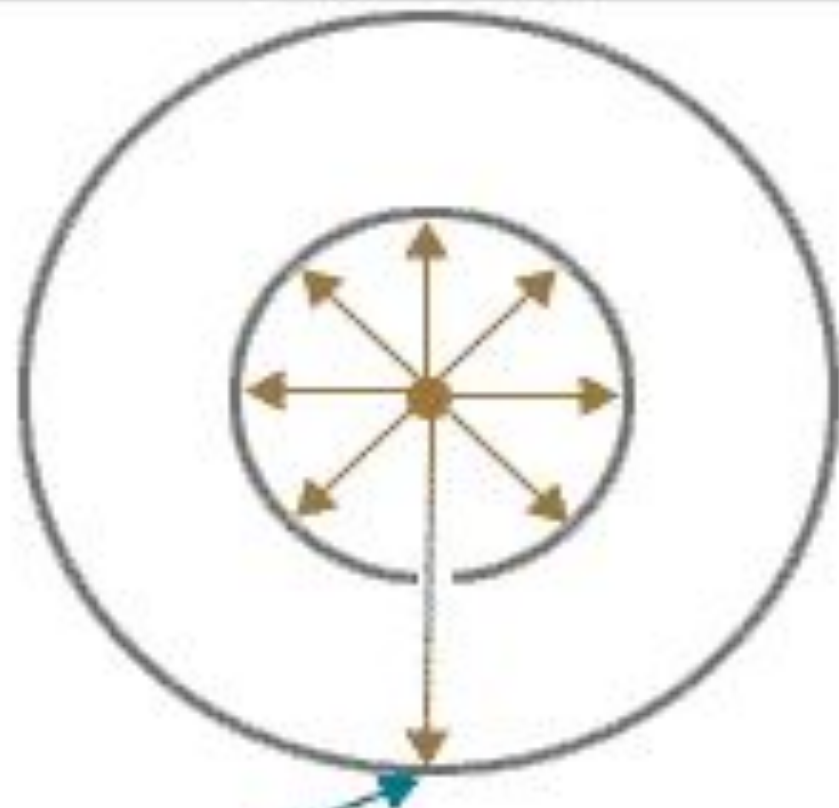
опыт Штерна

В 1920 году физиком Отто Штерном (1888-1969) впервые были экспериментально определены скорости частиц вещества.

Прибор Штерна состоял из двух цилиндров разных радиусов, закрепленных на одной оси. Воздух из цилиндров был откачен до глубокого вакуума. Вдоль оси натягивалась платиновая нить, покрытая тонким слоем серебра. При пропускании по нити электрического тока она нагревалась до высокой температуры, и серебро с ее поверхности испарялось.



В стенке внутреннего цилиндра была сделана узкая продольная щель, через которую проникали движущиеся атомы металла, осаждаясь на внутренней поверхности внешнего цилиндра, образуя хорошо наблюдаемую тонкую полоску прямо напротив прорези.

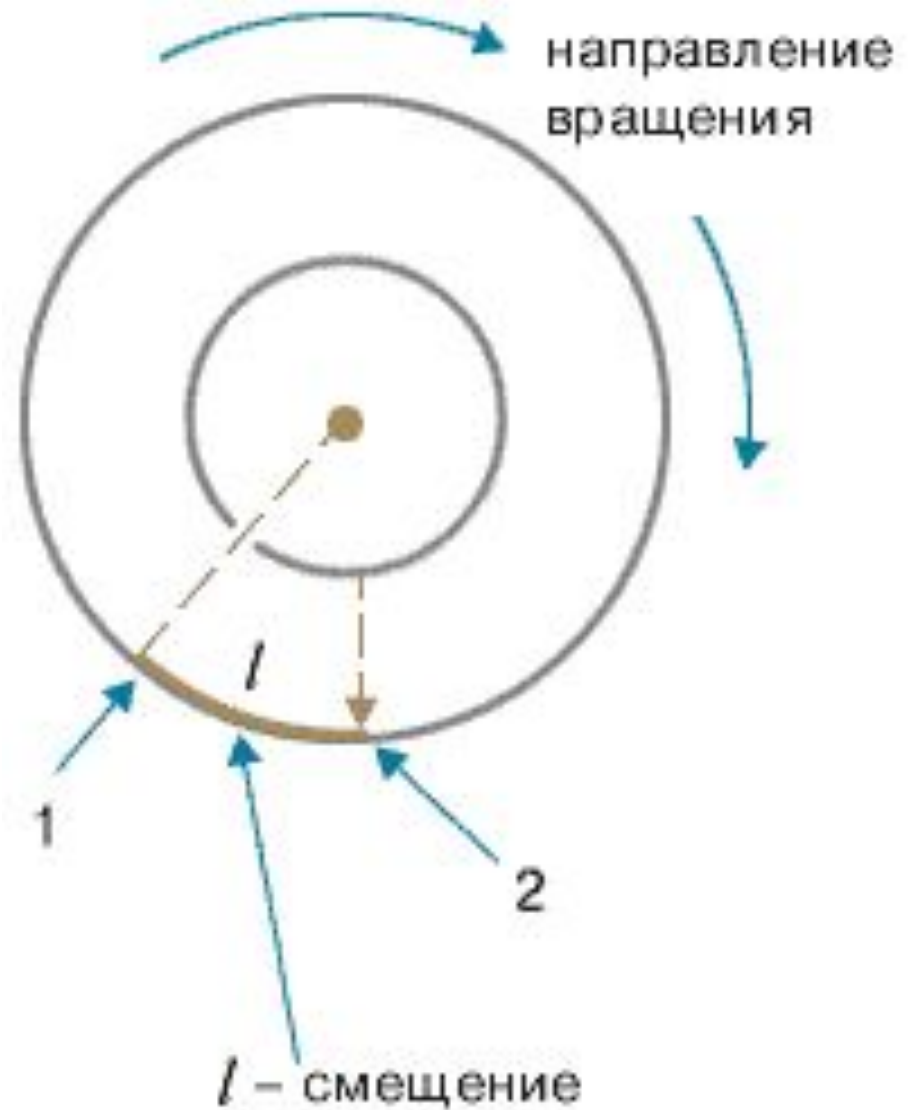


здесь оседают частицы

Схема установки Штерна
(вид сверху).

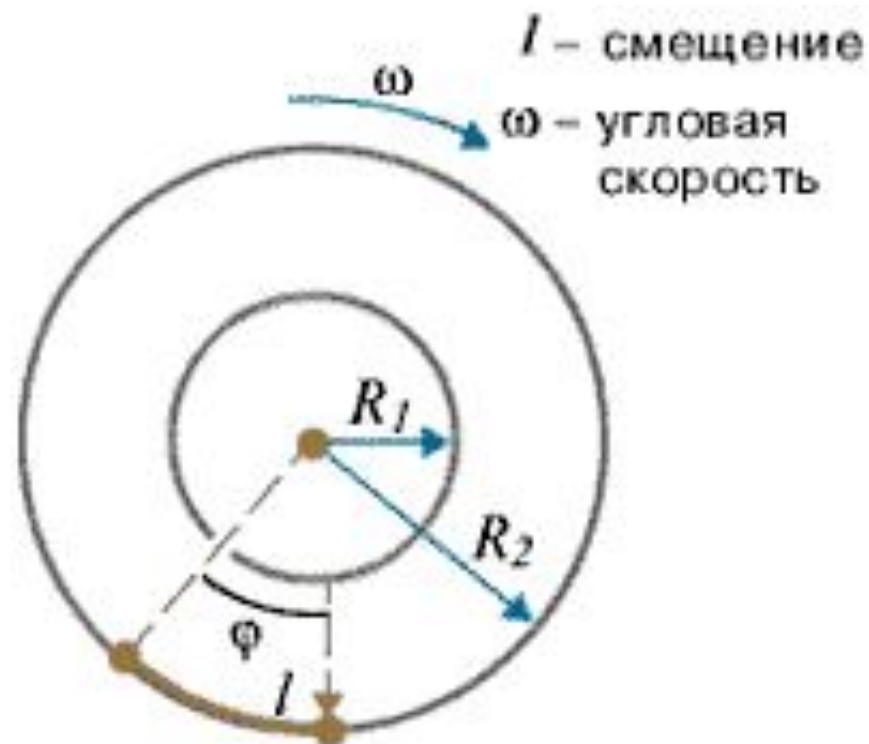
Цилиндры начинали вращать с постоянной угловой скоростью. Теперь атомы, прошедшие сквозь прорезь, оседали уже не прямо напротив щели, а смещались на некоторое расстояние, так как за время их полета внешний цилиндр успевал повернуться на некоторый угол. При вращении цилиндров с постоянной скоростью, положение полоски, образованной атомами на внешнем цилиндре, смещалось на некоторое расстояние.

- 1) Здесь оседают частицы, когда установка неподвижна.
- 2) Здесь оседают частицы при вращении установки.



Зная величины радиусов цилиндров, скорость их вращения и величину смещения легко найти скорость движения атомов.

Время полета атома t от прорези до стенки внешнего цилиндра можно найти, разделив путь, пройденный атомом и равный разности радиусов цилиндров, на скорость атома v . За это время цилиндры повернулись на угол " φ ", величину которого найдем, умножив угловую скорость " ω " на время t . Зная величину угла поворота и радиус внешнего цилиндра R_2 , легко найти величину смещения l и получить выражение, из которого можно выразить скорость движения атома.

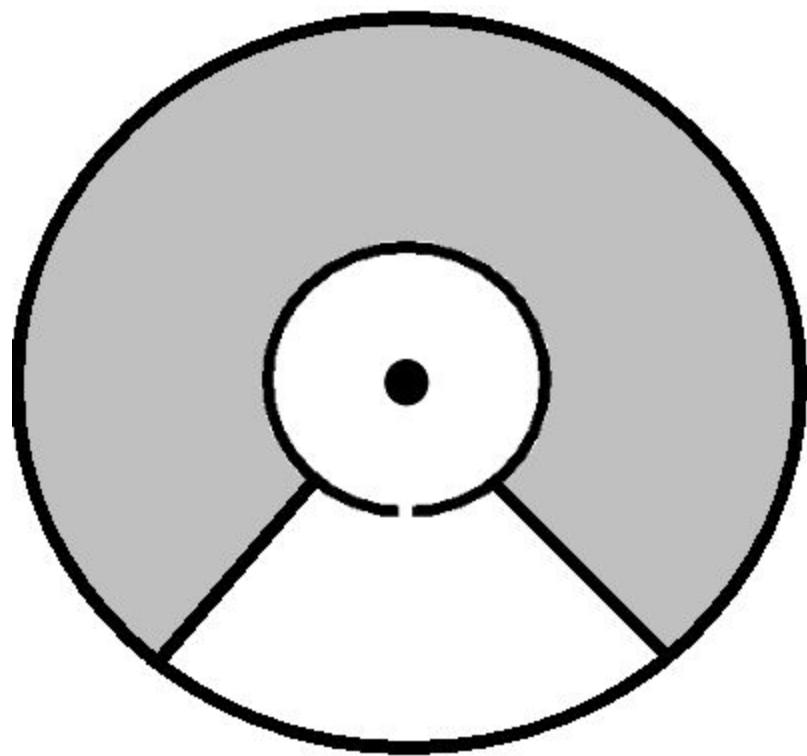


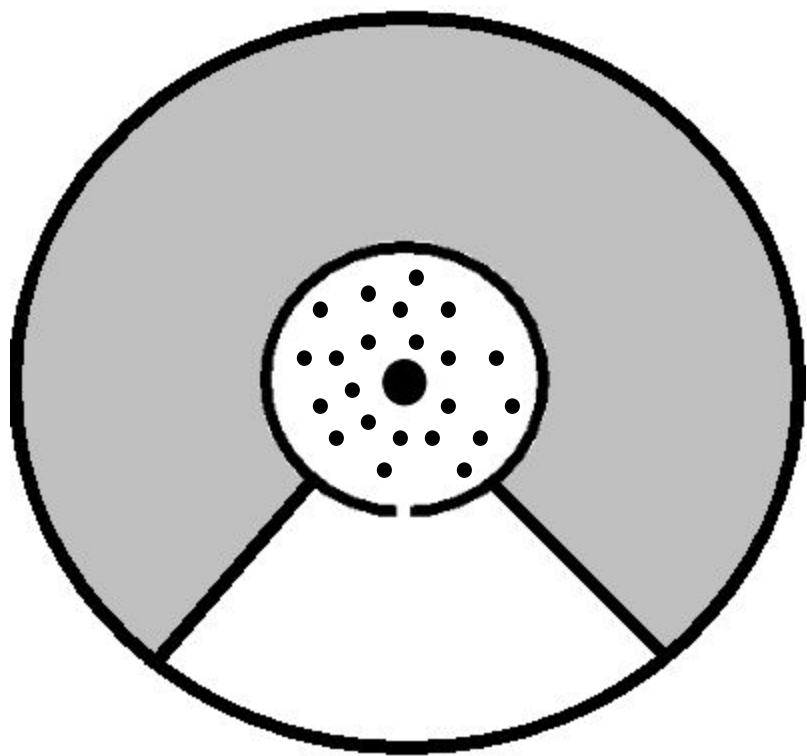
$$a) \quad t = \frac{R_2 - R_1}{v}$$

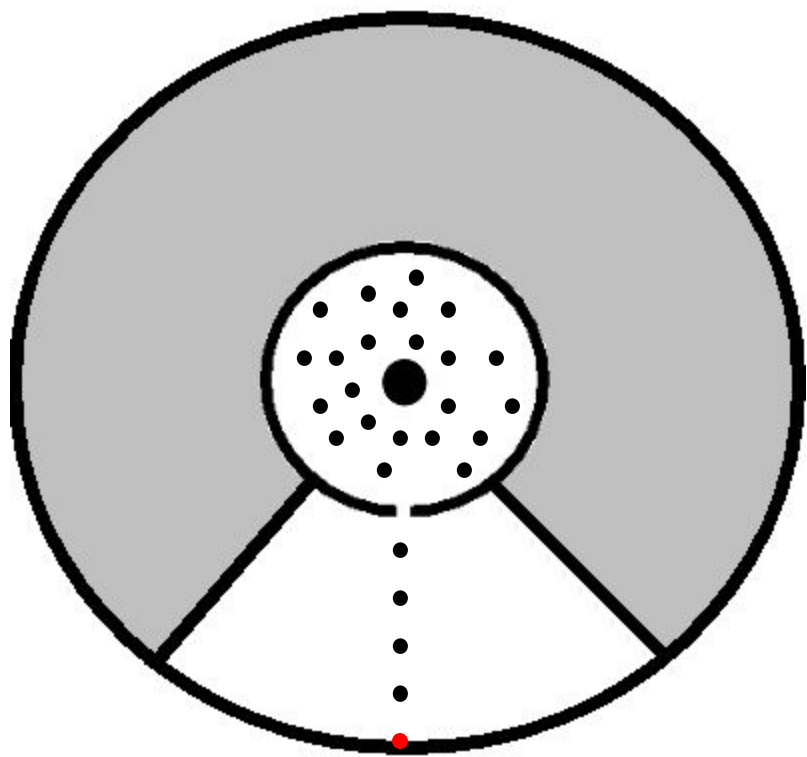
$$b) \quad \varphi = \omega \cdot t = \omega \cdot \frac{R_2 - R_1}{v}$$

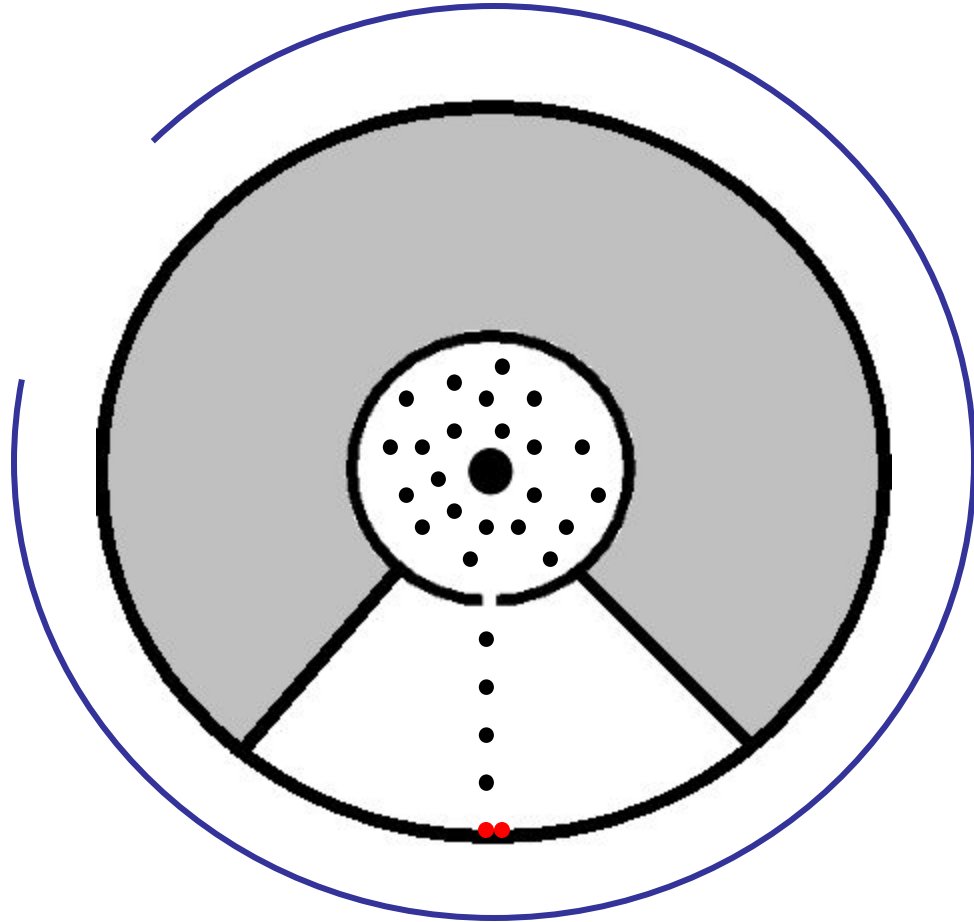
$$c) \quad l = \varphi \cdot R_2 = \omega \cdot R_2 \cdot \frac{R_2 - R_1}{v}$$

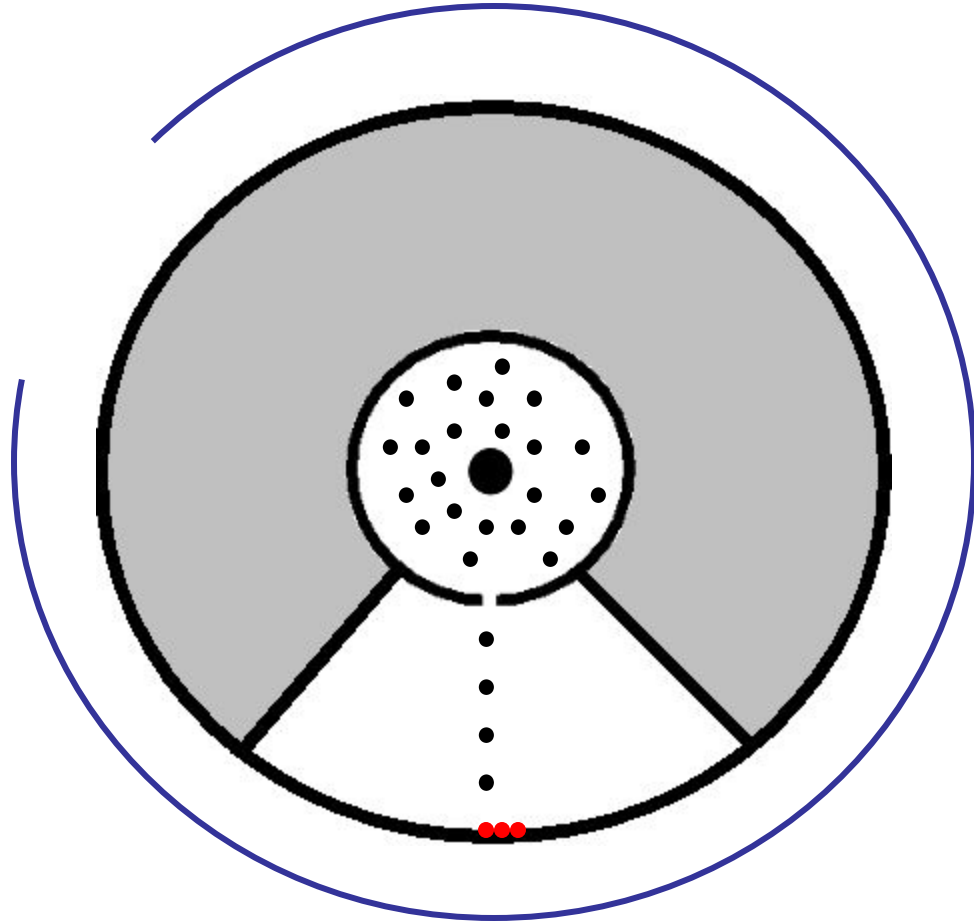
$$d) \quad v = \frac{\omega \cdot R_2 \cdot (R_2 - R_1)}{l}$$

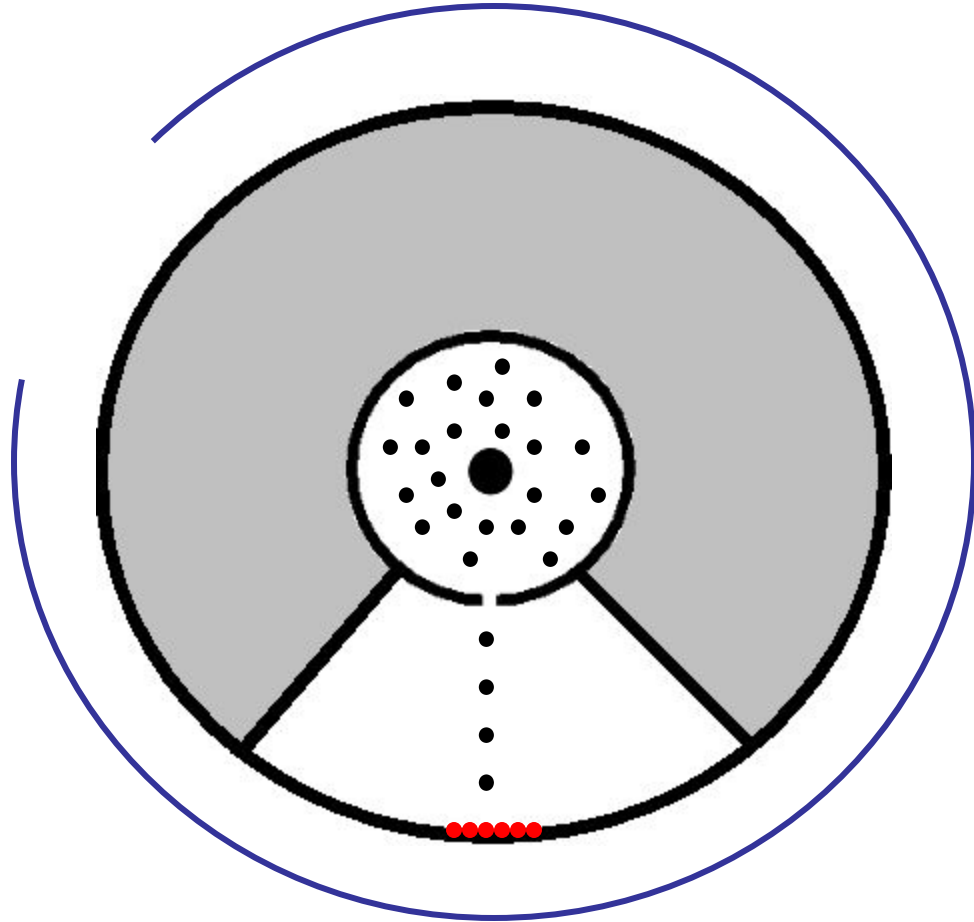




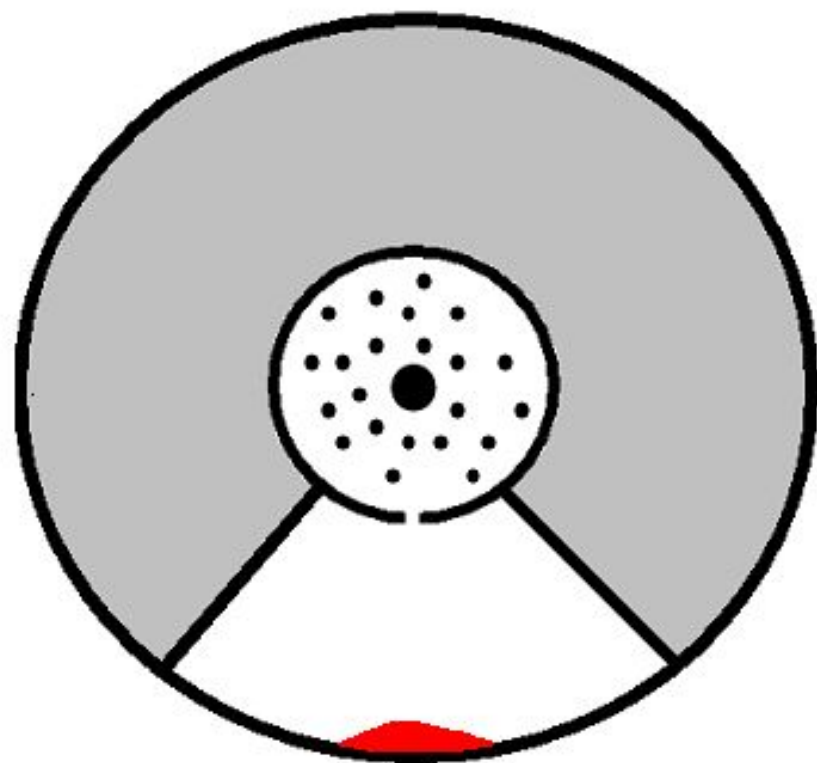




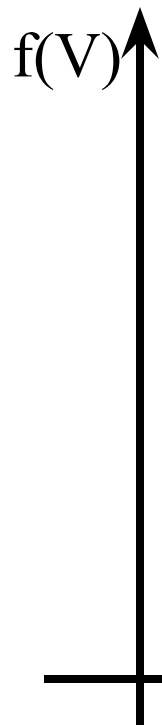




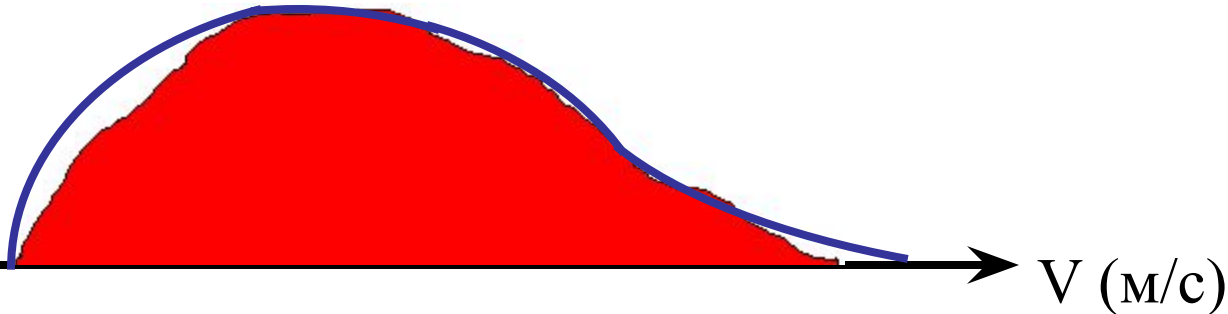
Спустя определённый момент времени, после прекращения подвода электричества к электроду, и после полной остановки цилиндра на снятом внешнем цилиндре можно наблюдать слой атомарного серебра, распределённого по стенке цилиндра в определённой зависимости.

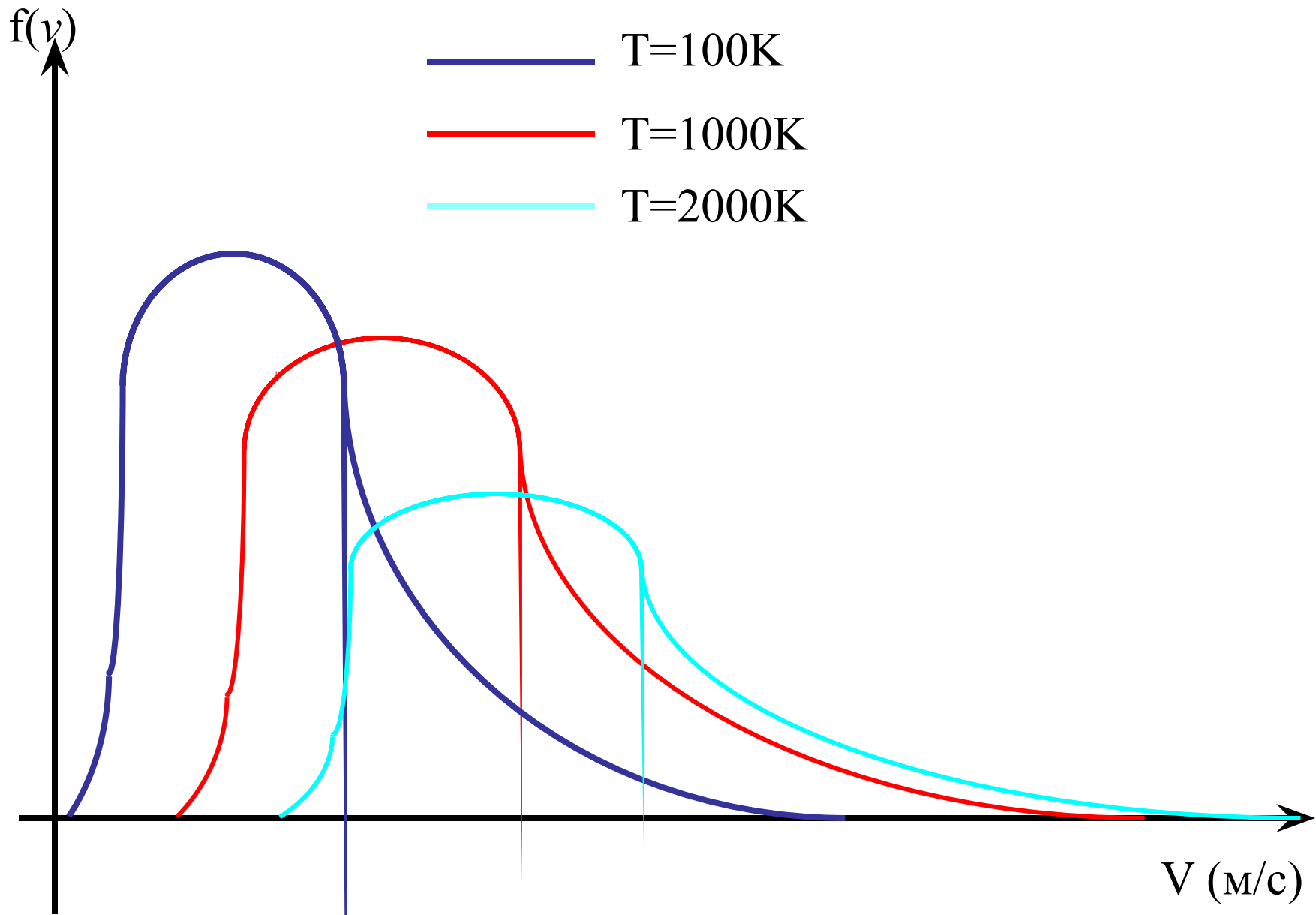


Проанализировав толщину и характер распределения молекул, можно сделать вывод о том, что молекулы распределяются в соответствии с *максвелловским распределением молекул по скоростям.*



При различных температурах кривые описывающие распределение Максвелла будут различны. С увеличением температуры кривые будут понижаться, но площадь под любой кривой будет постоянна.





2. Вероятность события. Понятие о распределении молекул газа по скоростям

Математическое определение вероятности: **вероятность какого-либо события** – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев, при бесконечном увеличении последних. Или

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}, \quad (16.5)$$

где n' – число опытов, когда событие произошло, а n – общее число опытов.

Отсюда следует, что P может быть от нуля до единицы ($P=0\div 1$). Или по определению Лапласа: **вероятность** – отношение числа благоприятных случаев к числу возможных случаев.

Определить распределение молекул по скоростям вовсе не значит, что нужно определить число молекул, обладающих той, или иной заданной скоростью. Ибо число молекул, приходящихся на долю каждого значения скорости равно нулю (постарайтесь это понять). Вопрос должен быть поставлен так: «Сколько молекул обладает скоростями, лежащими в этом интервале, включающем заданную скорость?» Так всегда ставятся статистические задачи.

Например: на переписи населения, когда указывается возраст (20 лет) – это не значит, что 20 лет, 0 часов, 0 минут, а эта цифра свидетельствует, что возраст лежит в интервале от 20 лет до 21 года.

Итак, молекулы хаотически движутся. Среди них есть и очень быстрые и очень медленные. Благодаря беспорядочному движению и случайному характеру их взаимных столкновений, молекулы определённым образом распределяются по скоростям.

Это распределение оказывается однозначным и единственно возможным, и не только не противоречит хаотическому движению, но именно им и обусловлено.

Мы будем искать число частиц (Δn), скорости которых лежат в определённом интервале значения скорости Δv (от v до $v+\Delta v$). То есть Δn – число благоприятных молекул.

Очевидно, что в единице объёма число таких благоприятных молекул тем больше, чем больше Δv .

Ясно так же, что Δn должно быть пропорционально концентрации молекул (n).

Δn **зависит** и от самой скорости, так как в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным (сложная фраза с простым смыслом: неодинаково, например, число людей в возрасте от 20 лет до 21 года и от 90 лет до 91 года).

Итак:

$$\Delta n = n f(v) \Delta v \quad (16.6)$$

или перейдя к пределу

$$dn = n f(v) dv, \quad (16.7)$$

где $f(v)$ – функция распределения.

Трудность вычисления (16.7) – в нахождении именно $f(v)$. **Физический смысл $f(v)$** : при $dv = 1$

$$f(v) = \frac{dn}{n}$$

Таким образом, $f(v)$ – имеет смысл вероятности. То есть $f(v)$ показывает, какова вероятность любой молекулы газа в единице объёма иметь скорость, заключённую в единичном интервале, включающем заданную скорость v . В этом случае $f(v)$ называют **плотностью вероятности**.

3. Функция распределения Максвелла

Распределение молекул идеального газа по скоростям было получено Максвеллом в 1860 году с помощью методов теории вероятностей. Вывод формулы функции распределения есть:

САМОСТОЯТЕЛЬНО!

И.В. Савельев. Курс общей физики. Т.1.- М.: Наука, 1982, с.311-319.

Мы воспользуемся результатами этого вывода. Скорость – векторная величина. Для x -ой составляющей скорости $dn_x = nf(v_x)dv_x$, тогда

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{ndv_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x}{2kT}} = A_1 e^{-\frac{mv_x}{2kT}}, \quad (16.8)$$

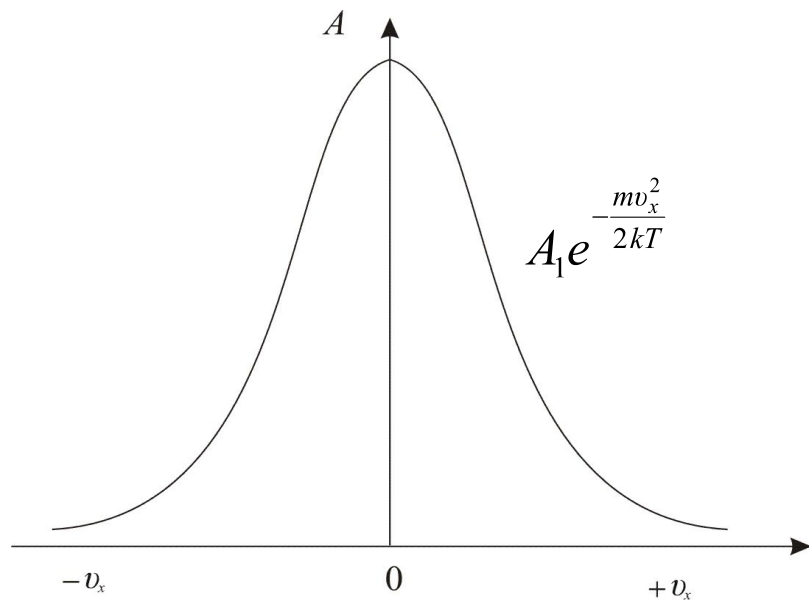


Рис. 16.1

A_1 – постоянная равная

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Графическое изображение функции показано на рис 16.1. Видно, что доля молекул со скоростью $v_x = 0$ не равна нулю.

При $v_x = 0$, $f(v_x) = A$ (в этом физический смысл постоянной A). Приведённое выражение описывает распределение молекул газа по x -ым компонентам скорости.

Очевидно, что и

$$\frac{dn_y}{ndv_y} = A_1 e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \quad \text{и} \quad \frac{dn_z}{ndv_z} = A_1 e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Вероятность того, что скорость молекулы одновременно удовлетворяет трём условиям: x – компонента скорости лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$; y – компонента, в интервале от v_y до $v_y + dv_y$; z – компонента, в интервале от v_z до $v_z + dv_z$ будет равна произведению вероятностей каждого из условий (событий) в отдельности!

То есть

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A_1^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z, \quad (16.9)$$

Этой формуле можно дать геометрическое истолкование: dn_{xyz} — это число молекул в параллелепипеде со сторонами dv_x , dv_y , dv_z , то есть в объёме $dV = dv_x dv_y dv_z$, находящемся на расстоянии от начала координат в пространстве скоростей. Эта величина (dn_{xyz}) не может зависеть от направления вектора скорости. Поэтому надо получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, то есть по абсолютному значению скорости.

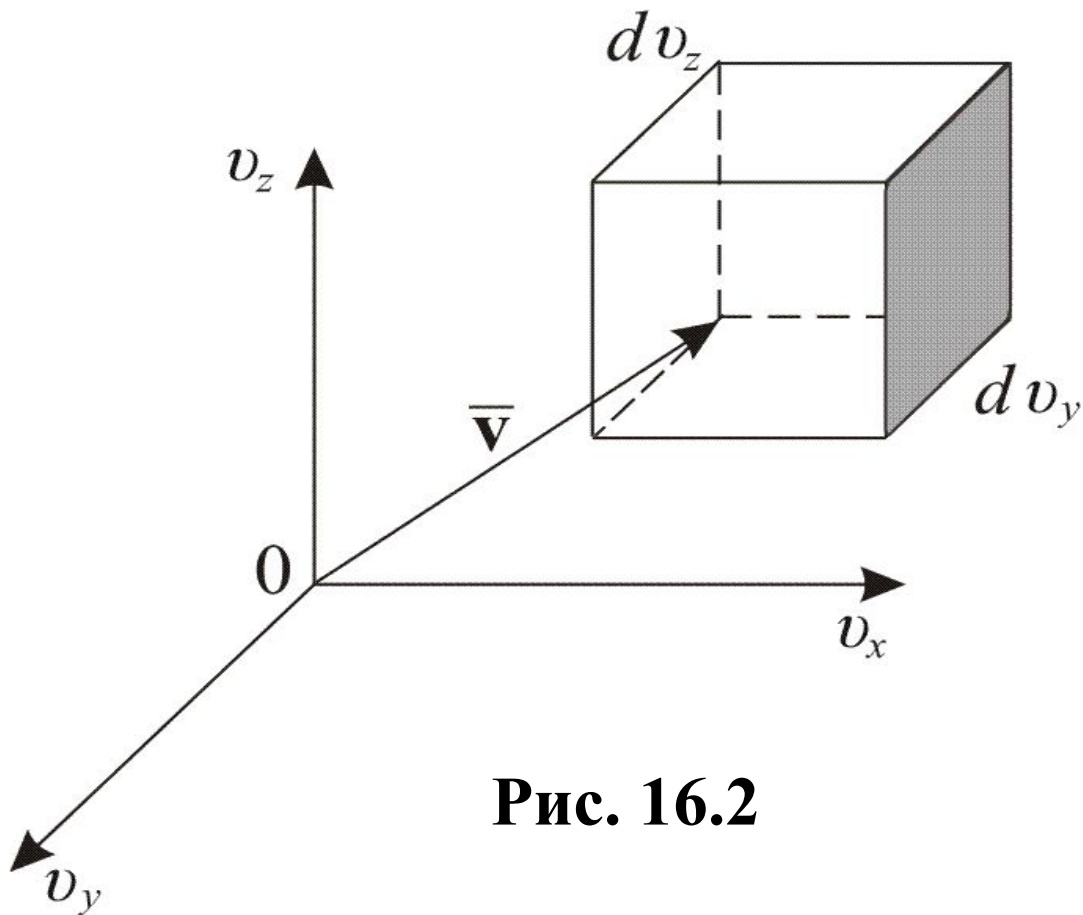


Рис. 16.2

Если собрать вместе все молекулы в единице объёма, скорости которых заключены в интервале от v до $v+dv$ (рис. 16.2) по всем направлениям, и выпустить их,

то они окажутся через одну секунду в шаровом слое толщиной dv и радиусом v . Этот шаровой слой складывается из тех параллелепипедов, о которых говорится выше.

Объём этого шарового слоя

$$d\Omega = 4\pi v^2 dv, \quad (16.10)$$

тогда общее число молекул в слое

$$dn = \frac{n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\Omega. \quad (16.11)$$

Отсюда следует закон Максвелла – распределение молекул по абсолютным значениям скоростей!

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (16.15)$$

$\frac{dn}{n}$ – доля всех молекул единицы объёма, скорости которых лежат на интервале от v до $v+dv$.

При $dv=1$ получаем плотность вероятности, или функцию распределения молекул по скоростям:

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (16.14)$$

Эта функция обозначает долю молекул единицы объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, равном единице включающем данную скорость.

Обозначим через

$$A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}},$$

тогда

$$f(u) = A e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2. \quad (16.15)$$

График этой функции показан на рис. 16.3.

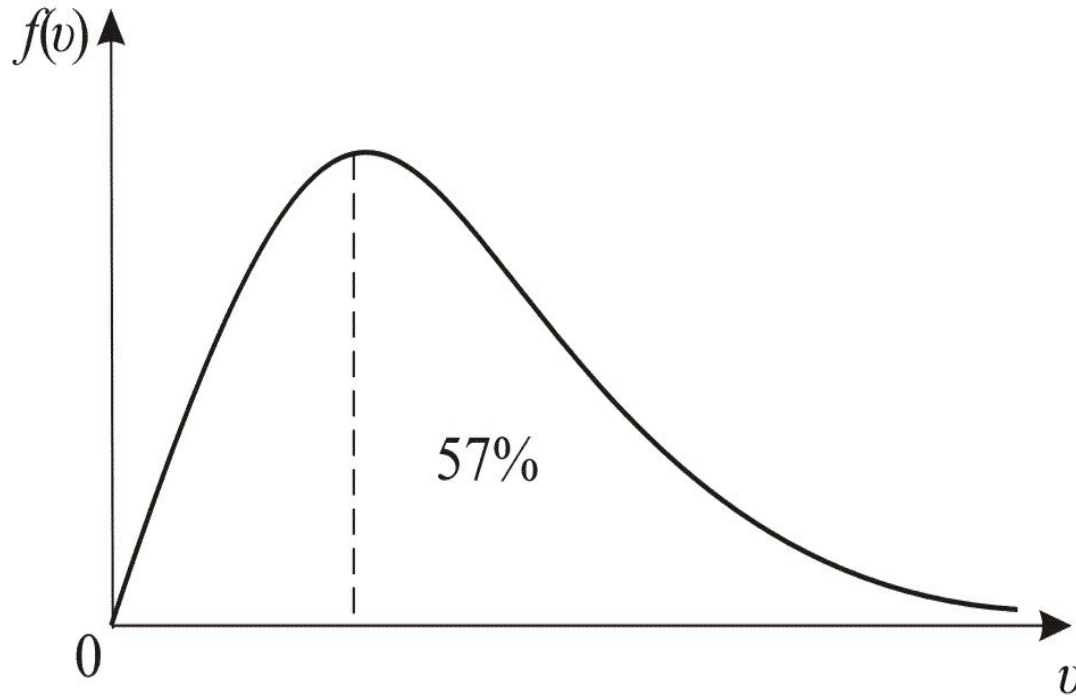


Рис. 16.3

1) Вид физического распределения для каждого газа зависит от рода газа (m) и от параметра состояния (T). Давление p и объём газа V на распределение молекул не влияют.

2) В показателе степени стоит отношение кинетической энергии, соответствующей данной скорости v к (kT) – средней кинетической энергии молекул при данной температуре, значит распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии (то есть показывает, какова вероятность при данной температуре иметь именно такое значение кинетической энергии).

Наиболее вероятная, средне квадратичная и средняя арифметическая скорости молекул газа

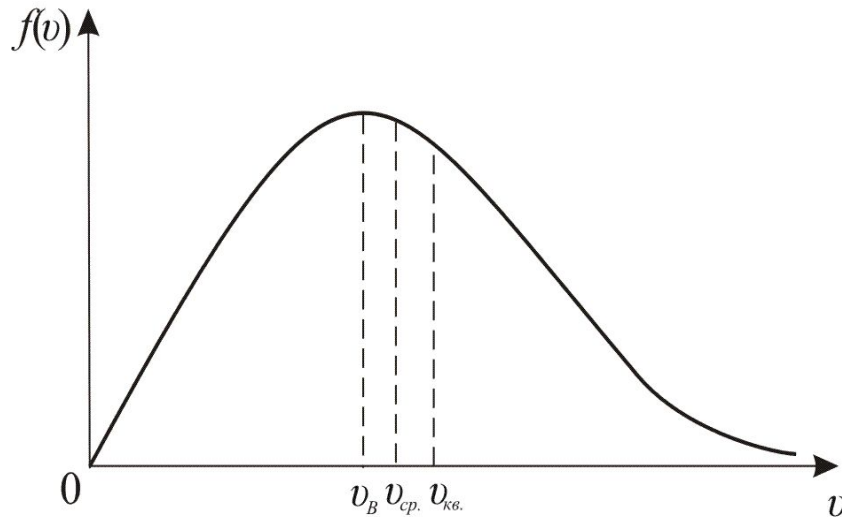


Рис. 16.4

Скорость, соответствующая максимуму распределения есть **наиболее вероятная скорость** (рис. 16.4).

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{— для одной молекулы.} \quad (16.16)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.} \quad (16.17)$$

Среднюю квадратичную скорость найдем используя соотношение

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

Тогда

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{— для одной молекулы.} \quad (16.18)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.} \quad (16.19)$$

Средняя арифметическая скорость – $v_{\text{ср}}$

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v n f(v) dv \quad (16.20)$$

где $n f(v) dv = dn$ – число молекул со скоростью от v до $v+dv$. Если подставить сюда $f(v)$ и вычислить, то:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m}}; \quad (16.21)$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}}. \quad (16.22)$$

Полезно знать, что $\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{в}}} = 1,13$; $\frac{v_{\text{кв}}}{v_{\text{в}}} = 1,22$.

Зависимость функции распределения Максвелла от массы и температуры газа

Если у нас смесь газов, то в пределах каждого сорта газа будет своё распределение со своим m

$$f(v_B) \approx \sqrt{\frac{m}{T}}, \text{ кроме того } v_B \approx \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Можно проследить за изменением $f(v)$ при изменении m и T : $m_1 > m_2 > m_3$ ($T = \text{const}$) или $T_1 > T_2 > T_3$ ($m = \text{const}$) (рис. 16.5). Площадь под кривой $f(v) = \text{const} = 1$ поэтому важно знать как будет изменяться положение максимума кривой.

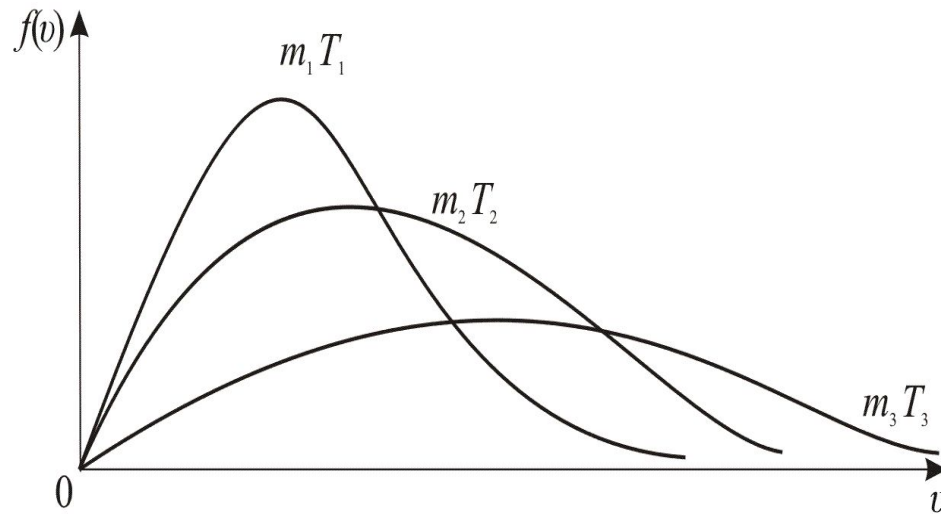


Рис. 16.5

Максвелловский закон распределения по скоростям и все вытекающие следствия справедливы только для газа в равновесной системе. Закон статически выполняется тем лучше, чем больше число молекул.

Формула Максвелла для относительных скоростей

Для решения многих задач удобно использовать формулу Максвелла, где скорость выражена в относительных единицах. Относительную

$$U = \frac{v}{v_B} \quad (16.23)$$

где $v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Тогда
$$\frac{dn}{ndU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} U^2 \quad (16.24)$$

Это уравнение универсальное. В таком виде функция распределения не зависит ни от рода газа ни от температуры.

4. Барометрическая формула

Рассмотрим ещё один вероятный закон очень важно.

Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом выше лежащих слоёв газа. Пусть p – давление на высоте h , $p+\Delta p$ – на высоте $h+\Delta h$ (рис. 16.6). Причём $dh>0$, $dp<0$, так как на большой высоте давление меньше. Разность давления $p-(p+dp)$ равна весу газа, заключённого в объёме цилиндра с площадью основания равного единице и высотой dh , $p=\rho gh$, ρ медленно убывает с высотой.

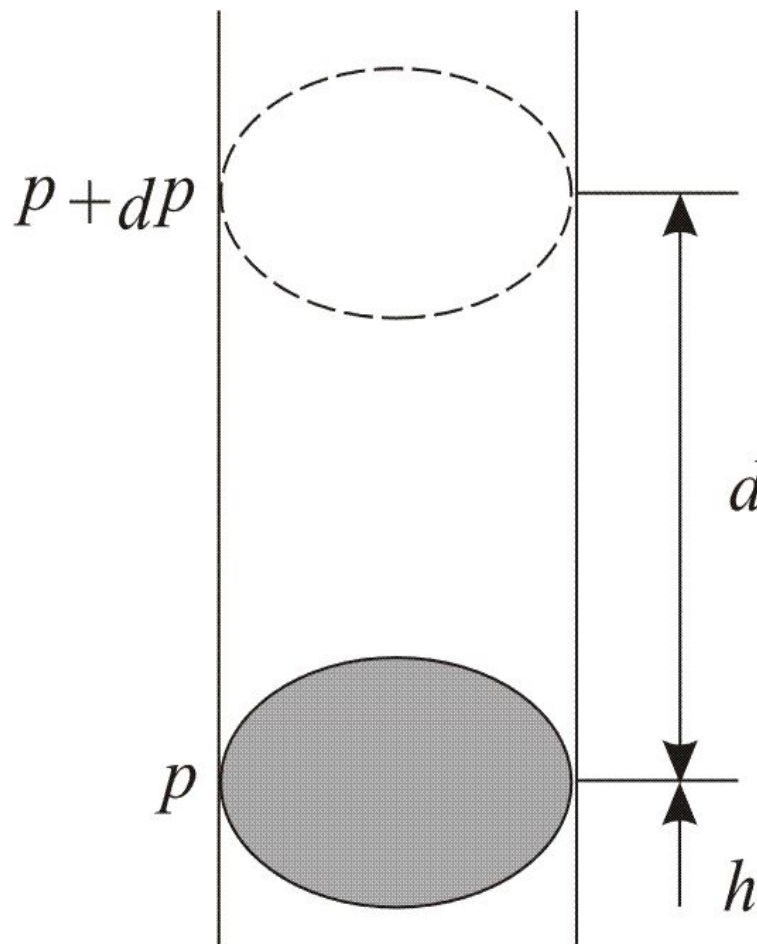


Рис. 16.6

$$p - (p + dp) = \rho q dh, \quad (16.25)$$

ρ – плотность газа на высоте h , тогда

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (16.26)$$

где p_0 – давление на высоте $h=0$.

Это барометрическая формула. Из формулы следует, что p убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше μ) и чем ниже температура.

На больших высотах концентрация He и N₂ гораздо больше чем у поверхности Земли. На (рис. 16.7) изображены две кривые, которые можно трактовать либо как соответствующие разным μ (при одинаковой T) либо как отвечающие разным T (при одинаковых μ), то есть чем тяжелее газ и чем ниже температура, тем быстрее убывает давление.

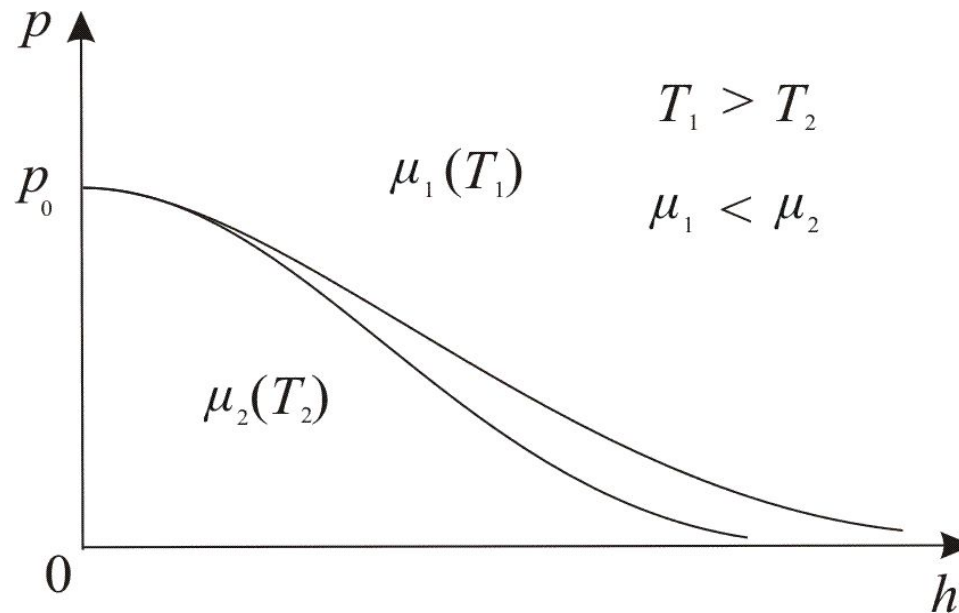


Рис. 16.7

5. Распределение Больцмана

Нам известна формула $p=nkT$ – это основное уравнение МКТ ($p_0=nkT$), заменим p и p_0 в барометрической формуле на n и n_0 .

Получим

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (16.27)$$

где n_0 – число молекул в единице объёма на высоте $h=0$, n – число молекул в единице объёма на высоте h .

Так как $\mu=mN_A$, $R=N_A k$, то

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (16.28)$$

Модель: Распределение

Больцмана

С уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля убывает. При $T=0$ тепловое движение прекращается, все молекулы расположились бы на земной поверхности. При высоких температурах, наоборот, молекулы оказываются распределёнными по высоте почти равномерно, а плотность молекул медленно убывает с высотой. Так как mgh – это потенциальная энергия, то на разных высотах $W_n = mgh$ – различно. Следовательно (16.28) характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 e^{-\frac{W_n}{kT}} \quad (16.29)$$

– это функция распределения Больцмана.

Здесь n_0 – число молекул в единице объёма в том месте, где $W_n=0$. Пусть n/n_0 – доля молекул, обладающих именно таким значением потенциальной энергии W_n при данной температуре, тогда

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{W_{n1} - W_{n2}}{kT}} \quad \text{– отношение концентраций молекул в}$$

точках с W_{n1} и W_{n2} .

Больцман доказал, что соотношение (16.29) справедливо не только в потенциальном поле сил гравитации, но и в любом потенциальном поле, для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Итак, Максвелл дал распределение частиц по значениям кинетической энергии, а Больцман – по значениям потенциальной энергии. Оба распределения можно объединить в один закон – **распределение Максвелла–Больцмана**.

6. Закон распределения Максвелла-Больцмана

Вначале лекции мы с вами получили выражение для распределения молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$dn(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (16.30)$$

Из этого выражения легко найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии $W_{\text{к}}$. Для этого перейдём от переменной v к переменной $W_{\text{к}} = mv^2/2$, то есть, подставим в предыдущее выражение $v = \sqrt{\frac{2W_{\text{к}}}{m}}$ и $dv = \frac{1}{\sqrt{2m}} dW_{\text{к}}$:

$$dn(W_K) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} W_K^{1/2} e^{-\frac{W_K}{kT}} dW_K = nf(W_K) dW_K, \quad (16.31)$$

где dnW_K – число молекул имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключённую в интервале от W_K до $W_K + dW_K$. То есть функция распределения молекул по энергиям теплового движения:

$$f(W_K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} W_K^{1/2} e^{-\frac{W_K}{kT}}. \quad (16.32)$$

Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа:

$$\langle W_K \rangle = \int_0^{\infty} W_K f(W_K) dW_K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} W^{3/2} e^{-\frac{W}{kT}} = \frac{3}{2} kT,$$

то есть получим результат совпадающий с прежним результатом.

Итак, закон Максвелла даёт распределение частиц по значениям кинетической энергии, а закон Больцмана – даёт распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Оба распределения можно объединить в один закон Максвелла–Больцмана, согласно которому, число молекул в единице объёма, скорости которых лежат в пределах от v до $v+dv$ равно

$$dn_{W_{\Pi}, W_K} = n_0 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{W_{\Pi} + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv. \quad (16.33)$$

Обозначим W – полная энергия равна $W_{\text{п}} + W_{\text{к}}$

$$dn = n_0 A e^{-\frac{W}{kT}} v^2 dv. \quad (16.34)$$

Это и есть закон распределения Максвелла-Больцмана, где n_0 – число молекул в единице объёма в той точке, где $W_{\text{п}}=0$, $mv^2/2=W_{\text{к}}$;

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2; A = \left(\frac{m}{\pi 2kT} \right)^{3/2}.$$

В последнем выражении, потенциальная и кинетическая энергии, а следовательно и полная энергия W могут принимать непрерывный ряд значений. Если же энергия частицы может принимать лишь дискретный ряд значений $W_1, W_2 \dots$ (как это имеет место, например, для внутренней энергии атома), то в этом случае распределение Больцмана имеет вид:

$$N_i = ANe^{-\frac{W_i}{kT}} \quad (16.35)$$

где N_i – число частиц, находящихся в состоянии с энергией W_i , а A – коэффициент пропорциональности, который должен удовлетворять условию:

$$\sum N_i = A \sum e^{-\frac{W_i}{kT}} = N, \quad (16.36)$$

В (16.36) N – полное число частиц в рассматриваемой системе.

Тогда окончательное выражение распределения Больцмана для случая дискретных значений

$$N_i = \frac{N e^{-W_i/kT}}{\sum e^{-W_i/kT}}. \quad (16.37)$$

7. Распределение Бозе–Эйнштейна, Ферми–Дирака

Если у нас имеется термодинамическая система состоящая из N частиц, энергии которых могут принимать дискретные значения ($W_1, W_2 \dots W_n$), то говорят о системе квантовых чисел.

Поведение такой системы описывается квантовой статистикой, в основе которой лежит принцип неразличимости тождественных частиц. Основная задача этой статистики состоит в определении среднего числа частиц, находящихся в ячейке фазового пространства: «координаты–проекции импульса» (x, y, z и P_x, P_y, P_z) частиц. При этом имеют место два закона распределения частиц по энергиям (две статистики).

1. Распределение Бозе – Эйнштейна:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(W_i - \mu)/kT} - 1} \quad (16.38)$$

2. Распределение Ферми – Дирака:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(W_i - \mu)/kT} + 1} \quad (16.39)$$

Первая формула описывает квантовые частицы с целым спином (собственный момент движения). Их называют **бозоны** (например фотоны). Вторая формула описывает квантовые частицы с полуцелым спином. Их называют **фермионы**, например: электроны, протоны, нейтроны).

Лекция окончена!

Распределение Больцмана



Здесь схематически показано движение молекул газа в присутствии гравитационного поля. Можно видеть, что концентрация молекул у дна сосуда оказывается выше, чем концентрация в верхней части сосуда. Под действием теплового движения молекулы подбрасываются вверх, а затем падают вниз за счет действия сил тяжести.

[назад](#)

Лекция окончена!

Закон Гей-Люссака

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$



Возврат

Изменение температуры вещества

Температурой называется физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Температура одинакова для всех частей изолированной системы, находящейся в термодинамическом равновесии. Если изолированная система не находится в равновесии, то с течением времени переход энергии от более перегретых частей системы к менее перегретым приводит к выравниванию температуры по всей системе.



[Возврат](#)

Тепловое расширение тел

Тепловым расширением называется эффект изменения размеров тела с изменением температуры при постоянном давлении.



[Возврат](#)