

**Законы
математической
ЛОГИКИ**

Законы математической логики	Закон относительно операции конъюнкции	Закон относительно операции дизъюнкции
Тавтология	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
Ассоциативность	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
Дистрибутивность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Законы де Моргана	$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
Операции с 0 и 1	$x \wedge 1 = x; x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1; x \vee 0 = x$
Закон дополнительности	$x \wedge \bar{x} = 0$	$x \vee \bar{x} = 1$
Закон склеивания	$(y \vee x) \wedge (y \vee \bar{x}) = y$	$(y \wedge x) \vee (y \wedge \bar{x}) = y$
Закон ортогонализации	$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$	
Закон импликации	$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$	
Инверсия	$\overline{\bar{x}} = x$	

Пример 1. Упростить выражение:

$$X \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y}$$

Воспользуемся распределительным законом:

$$X \cdot (Y \vee Z) = X \cdot Y \vee X \cdot Z$$

(или вынесем общий множитель за скобку)

$$X \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y} = X \cdot (\underbrace{\bar{Y} \vee Y}_1) = X \cdot 1 = X$$

Пример 2. Упростите логическое выражение

$$F = (A \vee B) \rightarrow (B \vee C).$$

1. Избавимся от импликации и отрицания. Воспользуемся ($\neg(A \rightarrow B) = A \& \neg B$).
Получится: $\neg((A \vee B) \rightarrow \neg(B \vee C)) = (A \vee B) \& \neg(\neg(B \vee C))$.
2. Применим закон двойного отрицания, получим:
 $(A \vee B) \& \neg(\neg(B \vee C)) = (A \vee B) \& (B \vee C)$.
3. Применим правило дистрибутивности ($(A \cdot B) + (A \cdot C) = A \cdot (B + C)$). Получим:
 $(A \vee B) \& (B \vee C) = (A \vee B) \& B \vee (A \vee B) \& C$
4. Применим закон коммутативности ($A \& B = B \& A$) и дистрибутивности
Получим: $(A \vee B) \& B \vee (A \vee B) \& C = A \& B \vee B \& B \vee A \& C \vee B \& C$.
5. Применим ($A \& A = A$) и получим: $A \& B \vee B \& B \vee A \& C \vee B \& C =$
 $A \& B \vee B \vee A \& C \vee B \& C$
6. Применим ($(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$), т.е. вынесем за скобки B.
Получим: $A \& B \vee B \vee A \& C \vee B \& C = B \& (A \vee 1) \vee A \& C \vee B \& C$.
7. Применим ($A \vee 1 = 1$). Получим: $B \& (A \vee 1) \vee A \& C \vee B \& C = B \vee A \& C \vee B \& C$.
8. Переставим местами слагаемые, сгруппируем и вынесем B за скобки.
Получим: $B \vee A \& C \vee B \& C = B \& (1 \vee C) \vee A \& C$.
9. Применим ($A \vee 1 = 1$) и получим ответ: $B \& (1 \vee C) \vee A \& C = B \vee A \& C$.

Закрепление изученного

№1

Упростите выражение:

$$1. F = \neg (A \& B) \vee \neg (B \vee C).$$

$$2. F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A).$$

$$3. F = A \& C \vee \bar{A} \& C.$$

$$4. F = \square A \vee \square B \vee \square C \vee A \vee B \vee C$$

Ответы:

$$1. F = \neg (A \& B) \vee \neg (B \vee C) = \square A \vee \square B.$$

$$2. F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) = 1.$$

$$3. F = A \& C \vee \bar{A} \& C = C.$$

$$4. F = \square A \vee \square B \vee \square C \vee A \vee B \vee C = 1.$$

№2

Упростите выражение:

$$1. F = \neg(X \& Y \vee \neg(X \& Y)).$$

$$2. F = \square X \& \neg(\square Y \vee X).$$

$$3. F = (X \vee Z) \& (X \vee \square Z) \& (\square Y \vee Z).$$

Ответы:

$$1. F = \neg(X \& Y \vee \neg(X \& Y)) = 0.$$

$$2. F = \square X \& \neg(\square Y \vee X) = \square X \& Y.$$

$$3. F = (X \vee Z) \& (X \vee \square Z) \& (\square Y \vee Z) \\ = X \& (\square Y \vee Z).$$