Тема: Задачи и методы оптимального планирования

КТН, доцент
Манкевич
Александр Валерьевич

Учебные вопросы:

1. **Основные понятия**
2. **Математическая постановка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП)**
3. **Транспортная задача**
4. **Геометрический метод решения ОЗЛП**
5. **Пример решения задачи линейного программирования (ЗЛП)**
6. **Двойственные задачи линейного программирования**

Первый учебный вопрос:

Основные понятия

1. Основные понятия
1.1 Сущность задач оптимального планирования

Оптимальное планирование **– комплекс методов который позволяет выбрать из многих возможных планов или программы наилучший с точки зрения заданного критерия оптимальности при определённых ограничениях.**

В экономическом анализе критерий оптимальности – показатель показывающий предельную меру экономического эффекта принимаемого решением (максимум прибыли, минимум трудозатрат, наименьшее время достижения цели и т.д.).

1.1 Сущность задач оптимального планирования

Основные задачи:

1. **Правильно и чётко формулировать цели экономической системы в целом и каждого его звена.**
2. **Отбирать критерий оптимальности для всего комплекса задач планирования.**
3. **Решать каждую задачу планирования в отдельности оптимально (*находить единственно наилучшее решение с учётом избранных критериев оптимальности*).**

1.2 Классификация задач оптимального планирования

I. ***По характеру взаимосвязи между переменными:***

1. **линейные;**
2. **нелинейные.**

II. ***По характеру изменения переменных:***

1. **непрерывный;**
2. **дискретный.**

III. ***По характеру учёта факторов времени:***

1. **статические;**
2. **динамические.**

1.2 Классификация задач оптимального планирования (продолжение)

IV. ***По наличию информации:***

1. **полные определённости;**
2. **неполные информации.**

V. ***По числу критериев оценки альтернатив:***

1. **простые (однокритериальные);**
2. **сложные (многокритериальные).**

Оптимальное планирование основано на решении задач математического программирования.

1.3 Методы математического проектирования

1. Дифференциальный;
2. Линейный;
3. Нелинейный;
4. Динамический;
5. Стохастический (вероятностный);
6. Эвристический (интуиция, мнение экспертов) и т.д.

1.4 Проблемы решаемые методами линейного программирования

1. Оптимальное распределение мощностей различных машин, станков, механизмов;
2. Оптимальное использование транспортных средств путём определения рациональных планов перевозок;
3. Рациональное комплектование сырья и составление любых смесей и т.д.

Второй учебный вопрос:

Математическая постановка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП)

2.1 Общие математические признаки общей задачи линейного программирования (ОЗЛП)

1. **Отыскание экстремума (*min*; *max*);**
2. **Наличие большого числа переменных;**
3. **Область существования переменных это линейные равенства и неравенства.**

2.2 Постановка общей задачи

Найти значение переменных X_1, X_2, …, X_n, которые обращают в *max* или *min* функцию:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} \qquad (1)$$

и удовлетворяет уравнениям или неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} b_i \qquad (2) \qquad \begin{matrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{matrix}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (3)$$

№ 1 – целевая функция;

№ 2 – ограничения;

№ 3 – условие неотрицательности;

***a*, *b*, *c* – известные коэффициенты.**

Вид функций 1 и 2 определяют класс или вид математического программирования.

2.3 Формы записи задачи линейного программирования

1. Стандартная;
2. Каноническая;
3. Векторная;
4. Матричная.

Третий учебный вопрос:

Транспортная задача

3.1 Транспортная задача

Данная задача впервые в мире была поставлена и решена в 1939 году в России Канторовичем Л.В. Её решением было положено начало методу линейного проектирования.

В зависимости от выбранного критерия эффективности различают следующие задачи:

- по суммарному пробегу;
- по стоимости;
- по времени;
- комбинированные.

3.1 Транспортная задача линейного проектирования (ТЗЛП) в общем виде

Исходные данные:

$Ск_i$ - склады с запасом имущества в количестве a_i;

$П_j$ – потребители с потребностями в имуществе в количестве b_j;

C_{ij} – стоимость перевозки единицы имущества со склада потребителю;

x_{ij} – количество единиц имущества доставленных со склада потребителю.

Требуется найти такой план перевозок (x_{ij}), который бы удовлетворял ограничениям и суммарная стоимость перевозок была минимальной.

3.1.1 Составляем логическую таблицу

Склады	Потребитель				Запасы на складах
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	
$Ск_1$	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1n} C_{1n}	a_1
$Ск_2$	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…	X_{2n} C_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
$Ск_m$	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…	X_{mn} C_{mn}	a_m
Потребности потребителей	b_1	b_2	…	b_n	Условия выполнения плана снабжения $\sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i$

3.1.2 На основе таблицы составляем целевую функцию

Целевая функция

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to \min$$

Ограничения по запасам на складах

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

Ограничения по потребностям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

Условие неотрицательности

$$x_{ij} \ge 0$$

Четвёртый учебный вопрос:

Геометрический метод решения ОЗЛП

4.1 Основа метода

Задачам линейного программирования можно дать наглядную геометрическую интерпретацию, которая позволяет наглядно увидеть ряд основных свойств задач линейного программирования, а также решить простейшие задачи.

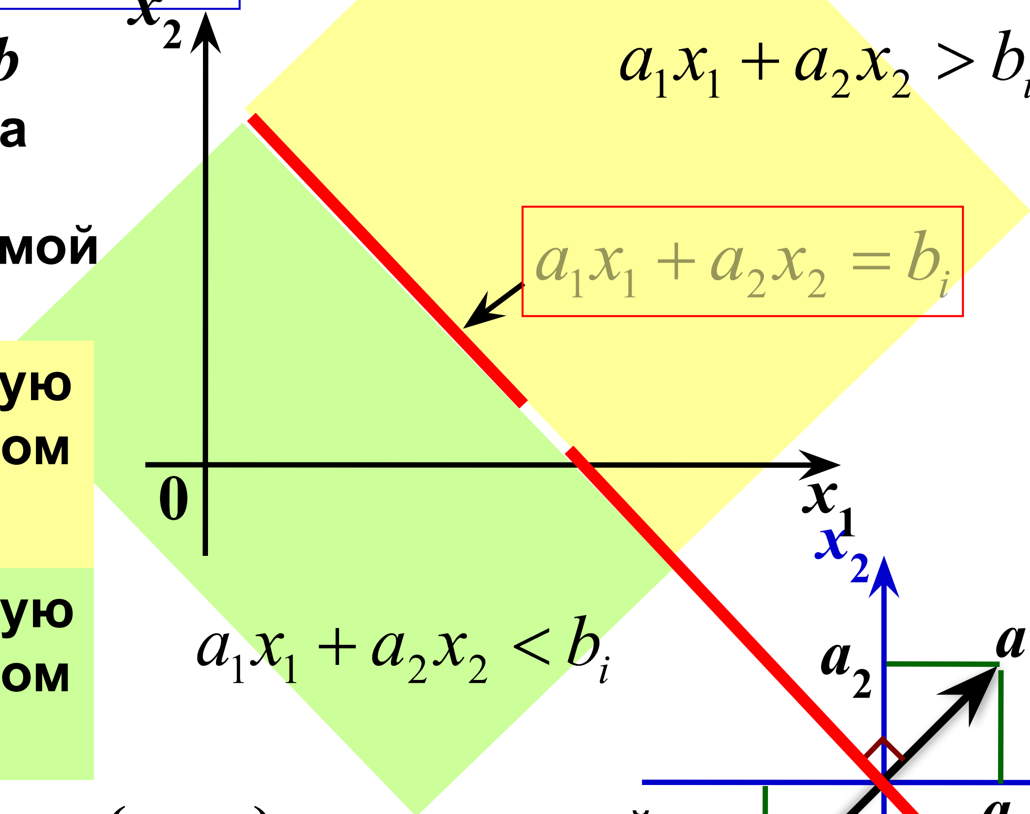
***Основное условие*:**

- ✔ **число переменных величин n на 2 больше чем число уравнений m ($n = m + 2$)**

Геометрическая интерпретация ЗЛП

Целевая функция $F = C_1x_1 + C_2x_2 \rightarrow \max$

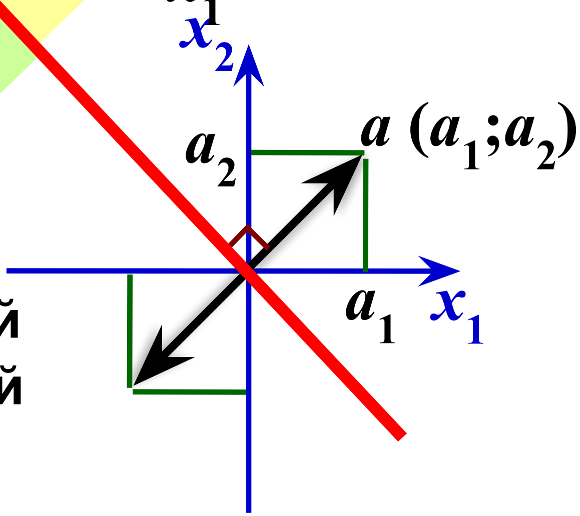
Ограничения $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_i$



* Уравнение $a_1x_1+a_2x_2=b$ определяет прямую на плоскости

* Плоскость делится прямой на 2 полуплоскости:

- положительную описывают неравенством $a_1x_1+a_2x_2>b$
- отрицательную описывают неравенством $a_1x_1+a_2x_2<b$



* Вектор a с координатами $(a_1;a_2)$, называемый нормалью, направлен перпендикулярно к прямой и только в сторону « + » полуплоскости.

Так как в ограничении стоит знак ≤, то вектор строим в сторону « – » полуплоскости.

Алгоритм решения задачи графическим методом:

1. **Построить на координатной плоскости область соответствующую ограничениям, которые представлены прямыми линиями.**

2. **Определить положительную или отрицательную полуплоскость ограничений в зависимости от вида неравенства с помощью вектора прямых, который направлен только в положительную полуплоскость.**

3. **Выделить область допустимых решений *(ОДР)* и её вершины**

4. **Построить целевую функцию F.**

Алгоритм решения задачи графическим методом (продолжение):

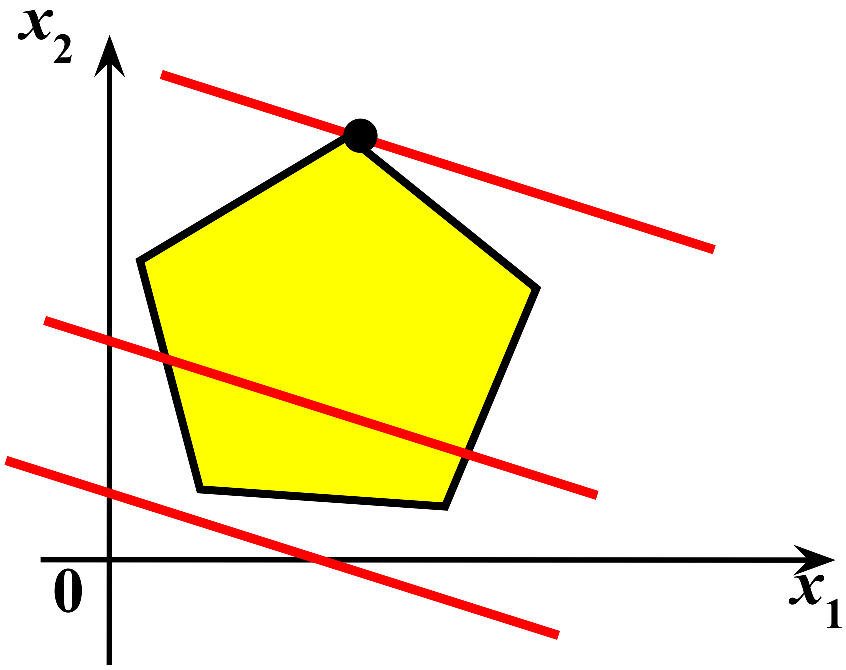
5. **Определить направление возрастания или убывания целевой функции в зависимости от её вида (*min*; *max*) с помощью вектора C (направленного в положительную полуплоскость).**

6. **Найти координаты точки *max* или *min* в вершине *ОДР* с помощью целевой функции F.**

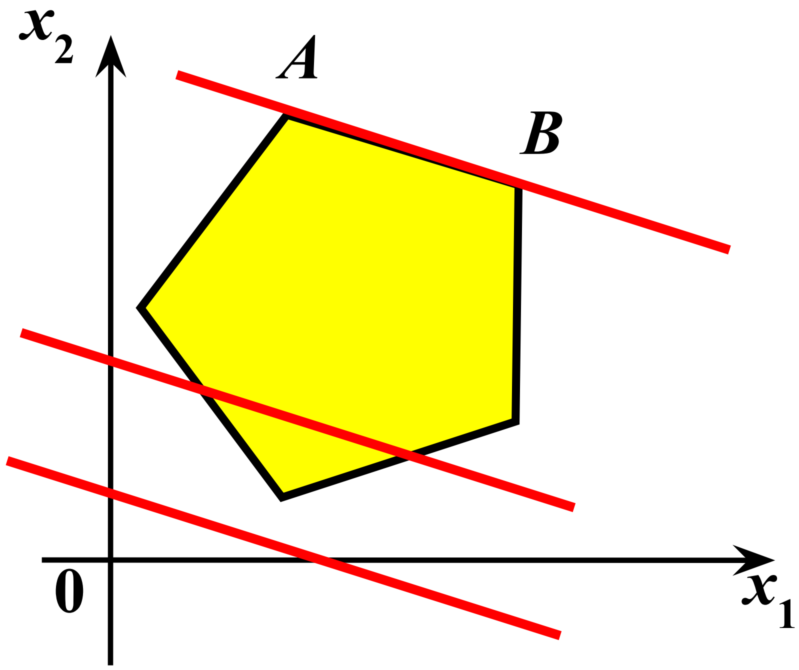
Примечание: *Решение может быть:*

- ***единственным;***
- ***множественным;***
- ***отсутствует.***

Виды решений ЗЛП

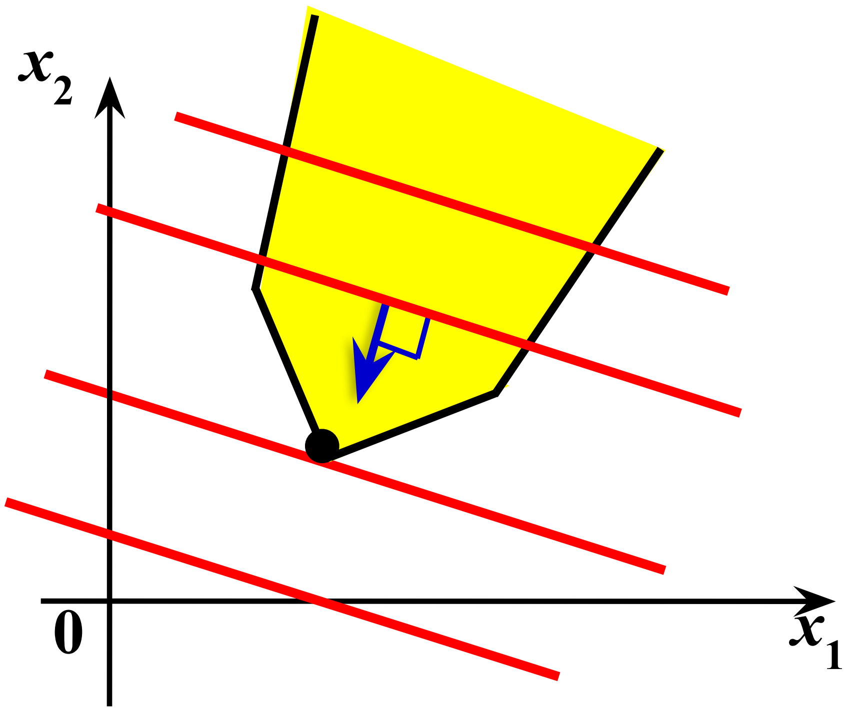


***ЗЛП* имеет единственное решение**

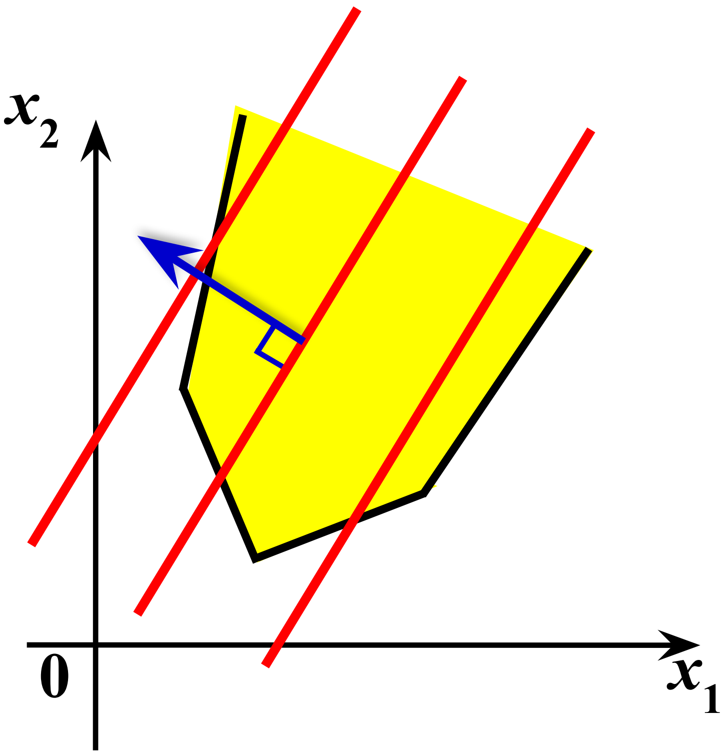


***ЗЛП* имеет альтернативный оптимум (линия AB)**

Виды решений ЗЛП



ЗЛП **имеет минимум и не имеет максимума**



ЗЛП **не имеет решения**

Пятый учебный вопрос:

Пример решения ЗЛП

Решение задачи

Целевая функция $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$

Ограничения

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \le 7 & (2) \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6 & (3) \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Решить</u> задачу геометрическим методом

Решение задачи

I Этап:

1) $-x_1 + x_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = 2 \\ x_2 = 0; \quad x_1 = -2 \end{array}\right.$$

2) $x_1 + 2x_2 = 7$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = 3{,}5 \\ x_2 = 0; \quad x_1 = 7 \end{array}\right.$$

3) $4x_1 - 3x_2 = 6$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = -2 \\ x_2 = 0; \quad x_1 = 1{,}5 \end{array}\right.$$

II Этап: **Определить направление векторов.**

III Этап: **Выделить *ОДР* и её вершины –** ***ОАВСД***

IV Этап:

$2x_1 + x_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = 0 \\ x_2 = 2; \quad x_1 = -1 \end{array}\right.$$

Решение задачи

V Этап: **Определить направление вектора.**

VI Этап: **Перебираем все точки для** $F = 2x_1 + x_2$

точка O − $F = 2*0 + 0 = 0$

точка A − $F = 2*0 + 2 = 2$

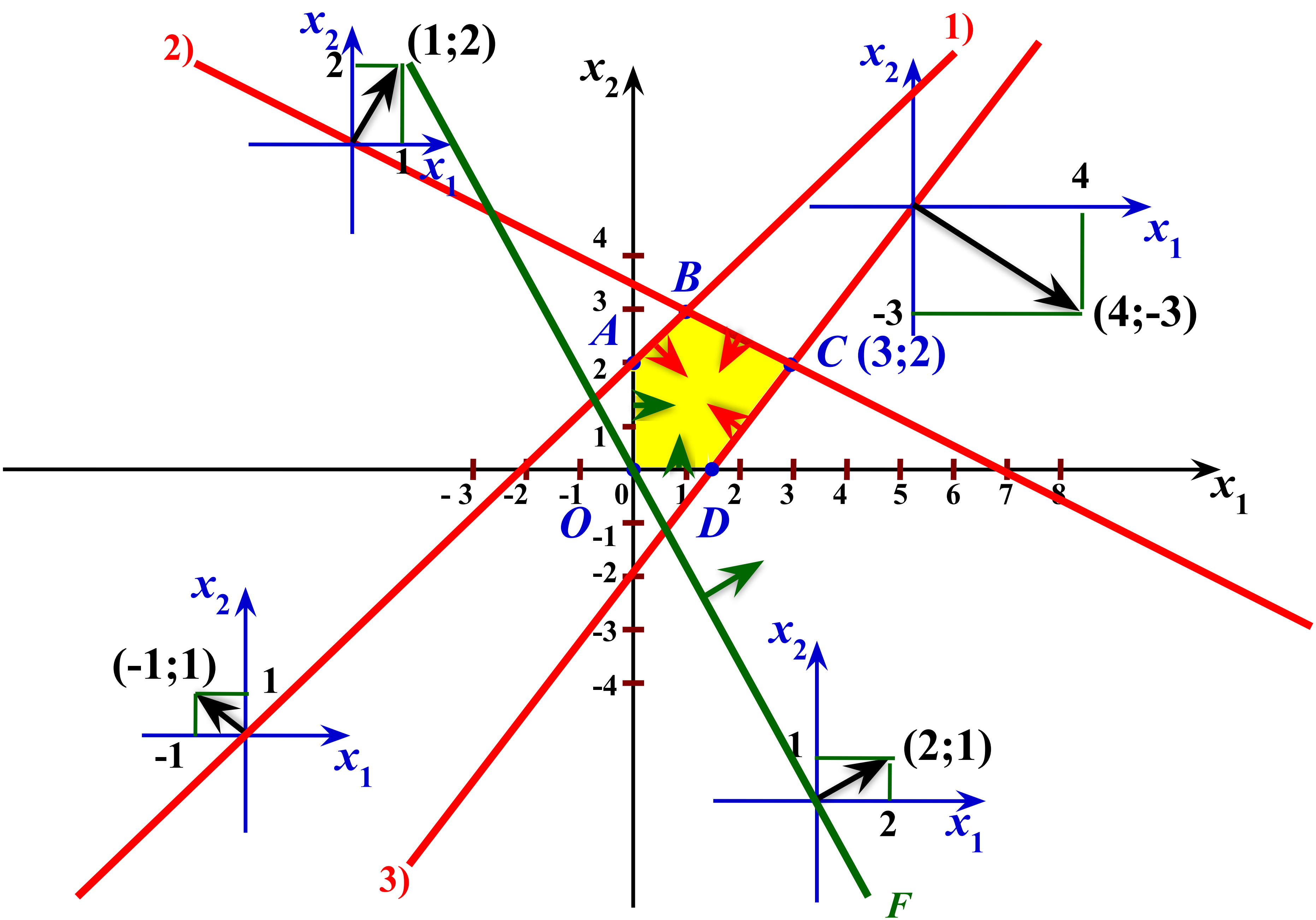
точка B − $F = 2*1 + 3 = 5$

точка C − $F = 2*3 + 2 = 8$

точка $Д$ − $F = 2*1{,}5 + 0 = 3$

Ответ: **точка** C **с координатами (3;2) является оптимальной, так как в ней** $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$

Решение задачи



Решение задачи

P.S. **Если взять целевую функцию $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ при тех же ограничениях, тогда F будет параллельна прямой BC, следовательно, задача линейного проектирования будет иметь альтернативный оптимум (будет иметь множество значений на отрезке BC).**

Шестой учебный вопрос:

Двойственные задачи линейного программирования

6.1 Основные понятия

Двойственность в линейном программировании **это принцип, который заключается в том, чтобы для каждой задачи ЛП путём замены отдельных её элементов на двойственные можно сформулировать двойственную задачу.**

Связь между прямой и двойственной задачами устанавливается двумя теоремами:

- **теоремой (признаком) двойственности;**
- **теоремой (признаком) оптимальности.**

6.1 Основные понятия (продолжение)

Прямая		Двойственная	
Целевая функция			
1)	$F_{ПР} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$	$F_{ДВ} = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min$	4)
Ограничения			
2)	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1, m})$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$	5)
Условия неотрицательности			
3)	$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$	$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}$	6)
Требуется			
	Составить такой план выпуска продукции $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной, при условии, что потребности ресурсов не превысят по каждому виду продукции имеющихся запасов (b_i). C_j – цена продукции.	**Найти такой набор цен ресурсов $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ при котором общие затраты на ресурсы будут минимальны, при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не больше прибыли от реализации этой продукции.**	

6.2 Экономические свойства оценок

- В экономической литературе цены ресурсов y_1, y_2, …, y_m носят следующие названия – учётные, неявные, теневые.

- Внешние цены c_1, c_2, …, c_n на продукции известны как правило до начала производства.

6.2 Экономические свойства оценок

Алгоритм составления двойственной задачи

I. Привести все неравенства системы ограничений прямой задачи к одному смыслу:

1) Если в прямой задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы необходимо привести к виду меньше ($\leq$).

2) Если в прямой задаче ищут минимум линейной функции, то все неравенства системы необходимо привести к виду больше ($\geq$).

С этой целью неравенства, где данное требование не выполняется, надо умножить на «– 1».

Алгоритм составления двойственной задачи (продолжение)

II. Составить расширенную матрицу коэффициентов прямой задачи

$$A = \left|\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hdashline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & F_{np} \end{array}\right|$$

Алгоритм составления двойственной задачи (продолжение)

III. Составить расширенную матрицу двойственной задачи, транспонированную (замена строк столбцами с сохранением порядка) к прямой

$$A^T = \left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & c_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_m & F_{дв} \end{array} \right|$$

Алгоритм составления двойственной задачи (продолжение)

IV. Сформировать двойственную задачу.

- $F_{\text{пр}} \rightarrow F_{\text{дв}}, x_j \rightarrow y_i$;
- **число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений под № 2 в прямой задаче;**
- **число ограничений в системе (5) двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи;**
- **коэффициенты при неизвестных целевой функции (4) двойственной задачи являются свободными членами в системе (2) прямой задачи;**
- **правые части ограничения в (5) двойственной задаче это коэффициенты при неизвестных в целевой функции(1);**
- **Если в прямой задаче ограничения имеют знак ≥, то в двойственной задаче – ≤, и наоборот.**

Пример

Составить задачу двойственную следующей

Целевая функция $F = -x_1 + x_2 \rightarrow max$

Ограничения

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 & (1) \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 & (2) \\ x_1 - x_2 \leq 3 & (3) \\ x_1 + x_2 \geq 5 & (4) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Пример. Решение

I. Приведём все неравенства системы ограничений к виду ≤, так как ЦФ → max. С этой целью обе части неравенств с (1) по (4) умножим на «– 1» и получим

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1 & (1) \\ -x_1 + 4x_2 \le 24 & (2) \\ x_1 - x_2 \le 3 & (3) \\ -x_1 - x_2 \le -5 & (4) \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Пример. Решение (продолжение)

II. Составим расширенную матрицу коэффициентов прямой задачи

$$A = \left| \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ \hline -1 & 1 & F_{np} \end{array} \right|$$

Пример. Решение (продолжение)

III. Составим расширенную матрицу двойственной задачи транспонированную к прямой

$$A^T = \left|\begin{array}{cccc:c} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ \hdashline -1 & 24 & 3 & -5 & F_{дв} \end{array}\right|$$

Пример. Решение (продолжение)

IV. Сформируем двойственную задачу

Целевая функция $F_{ДВ} = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to min$

Ограничения

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ 1y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Спасибо за внимание!