Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

КТН, доцент

Манкевич Александр Валерьевич

Учебные вопросы:

1. Вычислительные методы решения задач линейного программирования.
2. Сущность симплекс – метода.
3. Примеры решения с использованием симплекс-метода.

Учебный вопрос № 1

Вычислительные методы решения задач линейного программирования

Вычислительные методы решения задач линейного программирования

Геометрическая интерпретация, при решении задач линейного программирования, перестает быть пригодной для этой цели при числе свободных переменных $n - m > 3$, а затруднительна уже при $n - m = 3$. Для нахождения решения задачи линейного программирования в общем случае (при произвольном числе свободных переменных) применяются не геометрические, а вычислительные методы. Из них наиболее универсальным является так называемый ***симплекс-метод***.

Вычислительные методы решения задач линейного программирования

Симплекс-метод **— алгоритм решения оптимизационной задачи (ОЗ) линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве. Метод был разработан американским математиком Джорджем Данцигом (George Dantzig) в 1947 году.**

Википедия

Учебный вопрос № 2

Сущность симплекс-метода

Сущность симплекс-метода

Идея симплекс-метода относительно проста. Пусть в задаче линейного программирования имеется n переменных и m независимых линейных ограничений, заданных в форме уравнений. Известно, что оптимальное решение (если оно существует) достигается в одной из опорных точек (вершин *ОДР*), где по крайней мере $k = n - m$ из переменных равны нулю. Выберем какие-то k переменных в качестве свободных и выразим через них остальные m базисных переменных. Пусть, например, в качестве свободных выбраны первые $k = n - m$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а остальные m выражены через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha_{k+1,1} x_1 + \alpha_{k+1,2} x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k + \beta_{k+1}; \\ x_{k+2} = \alpha_{k+2,1} x_1 + \alpha_{k+2,2} x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k} x_k + \beta_{k+2}; \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nk} x_k + \beta_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Сущность симплекс-метода

Предположим, что все свободные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ равны нулю.

При этом получим:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \beta_{k+1}; \\ x_{k+2} = \beta_{k+2}; \\ \ldots \\ x_n = \beta_n. \end{cases}$$

Это решение может быть допустимым или недопустимым. Оно допустимо, если все свободные члены $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ неотрицательны. Предположим, что это условие выполнено. Тогда мы получили опорное решение. Но является ли оно оптимальным? Чтобы проверить это, выразим целевую функцию F через свободные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k. \qquad (2)$$

Сущность симплекс-метода

Очевидно, что при $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, $F = \gamma_0$. Проверим, может ли быть улучшено решение, т. е. получено уменьшение функции F с увеличением каких-нибудь из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (уменьшать их мы не можем, так как все они равны нулю, а отрицательные значения переменных недопустимы). Если все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ в (2) положительны, то увеличение каких-либо из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ не может уменьшить F; следовательно, найденное опорное решение является оптимальным. Если же среди коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ есть отрицательные, то, увеличивая некоторые из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (те, коэффициенты при которых отрицательны), можно улучшить решение.

Сущность симплекс-метода

Пусть, например, коэффициент γ_i в (2) отрицателен. Значит, есть смысл увеличить x_1, т. е. перейти от данного опорного решения к другому, где переменная x_1 не равна нулю, а вместо нее равна нулю какая-то другая. Однако увеличивать x_1 следует с осторожностью, так чтобы не стали отрицательными другие переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ выраженные через свободные переменные, в частности через x_1 формулами (1).

Например, если коэффициент при x_1 в соответствующем x_i уравнении (1) отрицателен, то увеличение x_1 может сделать x_i отрицательным. Наоборот, если среди уравнений (1) нет уравнения с отрицательным коэффициентом при x_1 то величину x_1 можно увеличивать беспредельно, а, значит, линейная функция F не ограничена снизу и оптимального решения ОЗ не существует.

Сущность симплекс-метода

Допустим, что это не так и что среди уравнений (1) есть такие, в которых коэффициент при x_1 отрицателен. Для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение x_1 опасно — оно может сделать их отрицательными.

Возьмем одну из таких переменных x_1 и посмотрим, до какой степени можно увеличить x_1, пока переменная x_i не станет отрицательной. Выпишем i-е уравнение из системы (1):

$$x_i = \alpha_{i\,1}\, x_1 + \alpha_{i\,2}\, x_2 + \ldots + \alpha_{i\,\mathrm{k}}\, x_\mathrm{k} + \beta_i$$

Здесь свободный член $\beta_i \geq 0$, а коэффициент $\alpha_{i\mathrm{k}}$ отрицателен.

Сущность симплекс-метода

Если оставить $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = 0$, то x_1 можно увеличивать только до значения, равного $(-\beta_i / \alpha_{1i})$, а при дальнейшем увеличении x_1 переменная x_i станет отрицательной.

Выберем ту из переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, которая раньше всех обратится в нуль при увеличении x_1 т. е. ту, для которой величина $(-\beta_i / \alpha_{1i})$ наименьшая. Пусть это будет x_r . Тогда имеет смысл разрешить систему уравнений (1) относительно других базисных переменных, исключая из числа свободных переменных x_1 и переводя вместо нее в группу свободных переменных x_r . Перейдём от опорного решения, задаваемого равенствами $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, к опорному решению, в котором уже $x_1 \neq 0$, а $x_2 = \ldots = x_k = x_r = 0$.

Сущность симплекс-метода

Первое опорное решение получим, положив равными нулю все прежние свободные переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ второе – если обратим в нуль все новые свободные переменные

Базисными переменными при этом будут

$$x_1, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$$

Сущность симплекс-метода

Предположим, что уравнения типа (1) для нового набора базисных и свободных переменных составлены. Тогда можно выразить через новые свободные переменные и линейную функцию F. Если все коэффициенты при переменных в этой формуле положительны, то значит найдено оптимальное решение: оно получится, если все свободные переменные положить равными нулю. Если среди коэффициентов при переменных есть отрицательные, то процедура улучшения решения продолжается: система вновь разрешается относительно других базисных переменных, и так далее, пока не будет найдено оптимальное решение, обращающее функцию F в минимум.

Учебный вопрос № 3

Примеры решения с использованием симплекс-метода

Пример

Пример. Пусть имеется задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2; \\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5; \\ -3x_1 + 5x_4 \le 7. \end{cases} \qquad (3)$$

Требуется минимизировать линейную функцию

$$F = 5x_1 - 2x_3$$

Пример (продолжение)

Приводя неравенства к стандартному виду (≥ 0) и вводя добавочные переменные y_1, y_2, y_3, переходим к условиям-равенствам:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2; \\ y_2 = x_1 - x_3 - x_4 + 5; \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases} \qquad (4)$$

Число переменных ($n = 7$) на 4 превышает число уравнений ($m = 3$). Значит, четыре переменные могут быть выбраны в качестве свободных.

Пример (продолжение)

Пусть в качестве свободных переменных выступают x_1, x_2, x_3, x_4. Положим их равными нулю и получим опорное решение:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$
$$y_1 = 2,\ y_2 = 5,\ y_3 = 7.$$

При этих значениях переменных $F = 0$.

Это решение не оптимально, поскольку в линейной функции F коэффициент при x_3 отрицателен. Значит, увеличивая x_3, можно уменьшить F.

Попробуем увеличивать x_3 . Из выражений (4) видно, что в y_1 и y_2 переменная входит с отрицательным коэффициентом, значит, при увеличении x_3 соответствующие переменные могут стать отрицательными.

Пример (продолжение)

Определим, какая из этих переменных (y_1 или y_2) раньше обратится в нуль при увеличении x_3. Очевидно, что это y_1: она станет равной нулю при $x_3 = 1$, а величина y_2 — только при $x_3 = 5$.

Выбирается переменная y, и вводится в число свободных вместо x_3. Чтобы разрешить систему (4) относительно x_3, y_2, y_3 необходимо:

Разрешить первое уравнение (4) относительно новой базисной переменной x_3:

$$x_3 = \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}y_1 + 1$$

Пример (продолжение)

Это выражение подставляется вместо x_3 во второе уравнение:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}y_1 + 1; \\ y_2 = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 - x_4 + 4; \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Пример (продолжение)

Что касается третьего уравнения, то оно, как не содержащее x_3 не изменится. Система (4) приведена к виду со свободными переменными x_1, x_2, y_1, x_4 и базисными x_3, y_2, y_3.

Выразим функцию F через новые свободные переменные:

$$F = 5x_1 - 5x_1 - x_2 + y_1 - 2 = -x_2 + y_1 - 2 \qquad (6)$$

Положим теперь свободные переменные равными нулю. Функция приобретает значение $F = -2$, что меньше (лучше), чем прежнее значение $F = 0$.

Пример (продолжение)

Это решение все еще не оптимально, так как коэффициент при x_2 в выражении (6) отрицателен, и переменная x_2 может быть увеличена. Это увеличение, как это видно из системы (5), может сделать отрицательной y_2 (в первое уравнение x_2 входит с положительным коэффициентом, а в третьем — отсутствует).

Поменяем местами переменные x_2 и y_2 — первую исключим из числа свободных, а вторую — включим. Для этого разрешим второе уравнение (5) относительно x_2 и подставим x_2 в первое уравнение. Получим следующий вид системы (4):

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - y_2 - x_4 + 5; \\ y_2 = -3x_1 - 2y_2 + y_1 - 2x_4 + 8; \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases} \tag{7}$$

Пример (продолжение)

Выразим F через новые свободные переменные:

$$F = 3x_1 + 2y_2 - y_1 + 2x_4 - 8 + y_1 - 2 = 3x_1 + 2y_2 + 2x_4 - 10 \quad (8)$$

Полагая , что $3x_1 + 2y_2 + 2x_4 = 0$, получим $F = -10$.

Это решение является оптимальным, так как коэффициенты при всех свободных переменных в выражении (8) неотрицательны. Итак, оптимальное решение ОЗ найдено:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 0; \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.$$

При таких значениях переменных линейная функция F принимает минимальное значение:

$$F_{\min} = -10.$$

Пример (продолжение)

В рассмотренном примере не пришлось искать опорное решение: оно сразу же получилось, когда положили свободные переменные равными нулю. Это объясняется тем, что в уравнениях (4) все свободные члены были неотрицательны и, значит, первое же попавшееся решение оказалось опорным. Если это окажется не так, можно будет прийти к опорному решению с помощью такой же процедуры обмена местами некоторых базисных и свободных переменных, повторно решая уравнения до тех пор, пока свободные члены не станут неотрицательными.

Пример

ЗАДАНИЕ. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м^2 материала, а для полки типа В – 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин. машинного времени, а для изготовления одной полки типа В – 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В – 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

Пример

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть $x1$ – количество полок вида А, $x2$ – количество полок вида В, которые производятся в неделю (по смыслу задачи эти переменные неотрицательны). Прибыль от продажи такого количества полок составит $3x1 + 4x2$, прибыль требуется максимизировать.

Выпишем ограничения задачи.

$x1 + x2 \le 550$ – в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок.

Затраты материала: $2x1 + 3x2 \le 1200$

Затраты машинного времени: $12x1 + 30x2 \le 9600$.

Пример

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования.

$$f = 3x1 + 4x2 \to \max,$$
$$x1 + x2 \le 550,$$
$$2x1 + 3x2 \le 1200,$$
$$12x1 + 30x2 \le 9600,$$
$$x1 \ge 0,\ x2 \ge 0.$$

Решим ее симплекс-методом. Введем три дополнительные переменные x3, x4, x5 и придем к задаче

$$f = 3x1 + 4x2 \to \max,$$
$$x1 + x2 + x3 = 550,$$
$$2x1 + 3x2 + x4 = 1200,$$
$$12x1 + 30x2 + x5 = 9600,$$
$$xi \ge 0,\ i=1,2,3,4,5.$$

Пример

В качестве опорного плана выберем X0=(0,0,550,1200,9600). Составим симплекс-таблицу.

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x3	550	1	1	1	0	0
x4	1200	2	3	0	1	0
x5	9600	12	**30**	0	0	1
f	0	-3	-4	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги, пока не придем к таблице с неотрицательными оценками.

Пример

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x3	230	3/5	0	1	0	-1/30
x4	240	**4/5**	0	0	1	-1/10
x2	320	2/5	1	0	0	1/30
f	1280	-7/5	0	0	0	2/15

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x3	50	0	0	1	-3/4	**1/24**
x1	300	1	0	0	5/4	-1/8
x2	200	0	1	0	-1/2	1/12
f	1700	0	0	0	7/4	-1/24

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x5	1200	0	0	24	-18	1
x1	450	1	0	3	-1	0
x2	100	0	1	-2	1	0
f	1750	0	0	1	1	0

Пример

В последнем плане строка *f* не содержит отрицательных значений, план x1 = 450, x2 = 100 оптимален, целевая функция принимает значение 1750. Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, предприятию необходимо производить 450 полок вида А и 100 полок вида В, при этом прибыль составит 1750 ден. ед., а останется неиспользованными 1200 минут (20 часов) машинного времени.

Пример

ЗАДАНИЕ. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$f = 2X_1 + X_2 - 2X_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 \geq 1; \\ X_i \geq 0 (i = 1,2,3). \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Будем решать эквивалентную задачу

$$F = -2X_1 - X_2 + 2X_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 \geq 1; \\ X_i \geq 0 (i = 1,2,3). \end{cases}$$

Пример

Введем дополнительные переменные, чтобы привести задачу к каноническому виду:

$$F = -2X_1 - X_2 + 2X_3 \to max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 - X_5 = 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 - X_6 = 1; \\ X_i \geq 0(i = 1,2,3,4,5,6). \end{cases}$$

Так как нет единичных векторов, вводим искусственный базис:

$$F = -2X_1 - X_2 + 2X_3 - Mz_1 - Mz_2 - Mz_3 \to max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 + z_1 = 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 - X_5 + z_2 = 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 - X_6 + z_3 = 1; \\ X_i \geq 0(i = 1,2,3,4,5,6). \end{cases}$$

Пример

Получили расширенную задачу с опорным планом (0,0,0,0,0,0,8,2,1). Составим симплекс-таблицу:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	z1	z2	z3
z1	8	1	1	-1	-1	0	0	1	0	0
z2	2	1	-1	2	0	-1	0	0	1	0
z3	1	-2	-8	**3**	0	0	-1	0	0	1
F	-11M	2	8M+1	-4M-2	M	M	M	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки (смотрим на коэффициенты при M, пока искусственный базис не выйдет), поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги.

Пример

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	z1	z2	z3
z1	25/3	1/3	-5/3	0	-1	0	-1/3	1	0	1/3
z2	4/3	7/3	**13/3**	0	0	-1	2/3	0	1	-2/3
x3	1/3	-2/3	-8/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3
F	-29/3M+2/3	-8/3M+2/3	-8/3M-13/3	0	M	M	-1/3M-2/3	0	0	4/3M+2/3

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	z1	z2	z3
z1	115/13	16/13	0	0	-1	-5/13	-1/13	1	5/13	1/13
x2	4/13	**7/13**	1	0	0	-3/13	2/13	0	3/13	-2/13
x3	15/13	10/13	0	1	0	-8/13	1/13	0	8/13	-1/13
F	-115/13M+2	-16/13M+3	0	0	M	5/13M-1	1/13M	0	8/13M+1	12/13M

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	z1	z2	z3
z1	57/7	0	-16/7	0	-1	**1/7**	-3/7	1	-1/7	3/7
x1	4/7	1	13/7	0	0	-3/7	2/7	0	3/7	-2/7
x3	5/7	0	-10/7	1	0	-2/7	-1/7	0	2/7	1/7
F	-57/7M+2/7	0	16/7M-39/7	0	M	-1/7M+2/7	3/7M-6/7	0	8/7M-2/7	4/7M+6/7

Пример

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	z1	z2	z3
x5	57	0	-16	0	-7	1	-3	7	-1	3
x1	25	1	-5	0	-3	0	-1	3	0	1
x3	17	0	-6	1	-2	0	-1	2	0	1
F	-16	0	-1	0	2	0	0	M-2	M	M

Искусственный базис выведен, но в единственном столбце с отрицательной оценкой (X2) все коэффициенты отрицательны, то есть функция не ограничена на множестве допустимых решений, оптимальный план найти невозможно.

Спасибо за внимание!

F	0.00	-1.00	-2.00	0.00	0.00	0.00
x3	12.00	-3.00	4.00	1.00	0.00	0.00
x4	-4.00	-1.00	-4.00	0.00	1.00	0.00
x5	6.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00

симплекс-таблица на 2 итерации

		x1	x2	x3	x4	x5
F	6.00	-2.50	0.00	0.50	0.00	0.00
x2	3.00	-0.75	1.00	0.25	0.00	0.00
x4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.00
x5	3.00	1.75	0.00	-0.25	0.00	1.00

симплекс-таблица на 3 итерации

		x1	x2	x3	x4	x5
F	10.29	0.00	0.00	0.14	0.00	1.43
x2	4.29	0.00	1.00	0.14	0.00	0.43
x4	14.86	0.00	0.00	0.43	1.00	2.29
x1	1.71	1.00	0.00	-0.14	0.00	0.57

Максимум целевой функции Fmax= 10.29