Логарифмические уравнения

Уравнения, решаемые с использованием теорем о логарифмах

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

17.17 $\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=\log_3(2x-1)$

а) $\log_3((x-2)(x+2))=\log_3(2x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0 \\ x+2>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$

$(x-2)(x+2)=2x-1$

$x^2-4=2x-1$

$x^2-2x-3=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ п.к.} \\ x=3 \end{array}\right.$

$\begin{cases} -1-2>0 \\ -1+2>0 \\ 2\cdot(-1)-1>0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 3-2>0 \\ 3+2>0 \\ 2\cdot 3-1>0 \end{cases}$

Ответ: 3

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

17.17 б) $\log_{11}(x+4)+\log_{11}(x-7)=\log_{11}(7-x)$

$$\log_{11}\left((x+4)(x-7)\right)=\log_{11}(7-x)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \\ x-7>0 \\ 7-x>0 \end{cases}$

$$(x+4)(x-7)=7-x$$

$$x^2-3x-28=7-x$$

$$x^2-2x-35=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-5 \text{ п.к.} \\ x=7 \text{ п.к.} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} -5+4>0 \\ -5-7>0 \\ 7-(-5)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7+4>0 \\ 7-7>0 \\ 7-7>0 \end{cases}$$

Ответ корней нет

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

17.18 а)

$$\log_{23}(2x-1)-\log_{23}x=0$$

ОДЗ: $\begin{cases}2x-1>0\\ x>0\end{cases}$

$$\log_{23}(2x-1)=\log_{23}x$$

Разность двух выражений равна нулю, если они равны

$$2x-1=x$$

$$x=1$$

$\begin{cases}2\cdot 1-1>0\\ 1>0\end{cases}$

$$\textit{Ответ}:\ 1$$

17.18 б) $\log_{0,5}(4x-1)-\log_{0,5}(7x-3)=1$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 7x-3>0 \end{cases}$

Преобразуем заданное уравнение к виду

$$\log_{0,5}(4x-1)=1+\log_{0,5}(7x-3)$$

$$1=\log_{0,5}0,5$$

$$\log_{0,5}(4x-1)=\log_{0,5}0,5+\log_{0,5}(7x-3)$$

$$\log_{0,5}(4x-1)=\log_{0,5}0,5(7x-3)$$

$$\begin{cases} 4\cdot(-1)-1>0 \\ 7\cdot(-1)-3>0 \end{cases}$$

$$4x-1=0,5(7x-3)$$

$$4x-1=3,5x-1,5$$

$$0,5x=-0,5$$

$x=-1$ п.к.

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

Ответ корней нет

17.19 а) $\log_2(x-3)(x+5)+\log_2\frac{x-3}{x+5}=2$

ОДЗ: $\begin{cases}(x-3)(\quad+5)>0\\ \frac{x-3}{x+5}>0\end{cases}$

$$\log_2(x-3)\cancel{(x+5)}\left(\frac{x-3}{\cancel{x+5}}\right)=2$$

$$\log_2(x-3)^2=2$$

$$2\log_2|x-3|=2$$

$$\log_2|x-3|=1$$

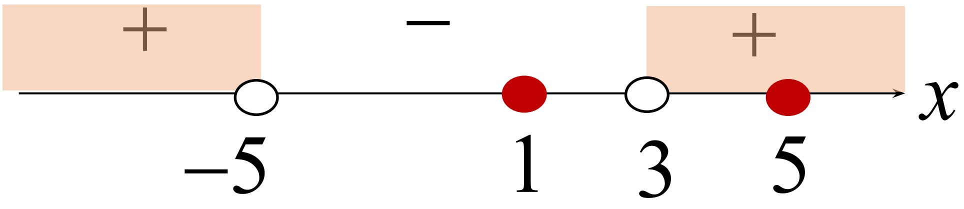
$$|x-3|=2$$

$$\left[\begin{array}{l}x-3=2\\ x-3=-2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=1\ \text{п.к.}\end{array}\right.$$

Ответ: 5

Решение двух неравенств одинаково (метод интервалов):



$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

$$\log_a b^{2n}=2n\cdot\log_a|b|$$

17.20 а)

$$\lg(x-1)^3-3\lg(x-3)=\lg 8$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$

$$3\lg(x-1)-3\lg(x-3)=\lg 8 \quad |\div 3$$

$$\lg(x-1)-\lg(x-3)=\frac{1}{3}\lg 8$$

$$\lg(x-1)-\lg(x-3)=\lg 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\lg(x-1)-\lg(x-3)=\lg 2$$

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$\lg(x-1)=\lg 2+\lg(x-3)$$

$$\lg(x-1)=\lg 2(x-3)$$

$$x-1=2x-6$$

$$x=5$$

$\begin{cases} 5-1>0 \\ 5-3>0 \end{cases}$

$$\textit{Ответ}: \ 5$$

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

$$\log_a b^r=r\log_a b$$

17.21 $\log_2\left(x^3-1\right)-\log_2\left(x^2+x+1\right)=4$

а) $\log_2\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}=4$

ОДЗ: $\begin{cases} x^3-1>0 \\ x^2+x+1>0 \end{cases}$

$$\log_2\frac{(x-1)\cancel{\left(x^2+x+1\right)}}{\cancel{x^2+x+1}}=4$$

$$\begin{cases} 17^3-1>0 \\ 17^2+17+1>0 \end{cases}$$

$$\log_2(x-1)=4$$

$$x-1=2^4$$

$$x=17$$

Ответ: 17

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

17.21 б) $\log_{0,5}\left(x^6-6x^4+12x^2-8\right)=-3$

ОДЗ:

$$x^6-6x^4+12x^2-8>0$$

$$x^6-6x^4+12x^2-8=(0,5)^{-3}$$

$$x^6-6x^4+12x^2-8=8$$

$$x^6-6x^4+12x^2-16=0$$

Пусть $x^2=t,\ t\geq 0$

$$t^3-6t^2+12t-16=0$$

Для дальнейшего решения уравнения воспользуемся схемой Горнера

$$\log_a b=c \Leftrightarrow a^c=b$$

$$t^3-6t^2+12t-16=0$$

Пусть $x^2=t,\ t\ge 0$

$16 \vdots\ 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16$

$$p(1)=1^3-6\cdot1^2+12\cdot1-16\ne0$$

$$p(2)=2^3-6\cdot2^2+12\cdot2-16\ne0$$

$$p(4)=4^3-6\cdot4^2+12\cdot4-16=0$$

	Пусть $x^2=t, t\ge0$	Пусть x^2:	Пусть $x^2=t$	Пусть
Пусть $x^2=t, t\ge0$	Пусть $x^2=t, t\ge0$	Пусть x^2:	Пусть $x^2=t, t\ge0$	Пусть $x^2=t, t\ge0$

$$(t-4)(t^2-2t+4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t-4=0 \\ t^2-2t+4=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=4 \\ D=4-16<0 \end{array}\right.$$

$t=4 \qquad x^2=4 \qquad x=\pm2$

ОДЗ:

$$x^6-6x^4+12x^2-8>0$$

$$2^6-6\cdot2^4+12\cdot2^2-8>0$$

$$(-2)^6-6\cdot(-2)^4+12\cdot(-2)^2-8>0$$

$$\textit{Ответ}:\ \pm2$$