Логарифмические уравнения

Уравнения, решаемые методом введения новой переменной

17.22 б)

$$\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$$

ОДЗ: $x > 0$

$$\log_2 x = t, t \in R$$

$$2 > 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$8 > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2^1 \\ x = 2^3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 8 \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 8

17.23 в) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 = 0$

ОДЗ: $x > 0$

$2 > 0$

$8 > 0$

$\log_{0,3} x = t, t \in R$

$2t^2 - 7t - 4 = 0$

$D = (-7)^2 + 32 = 81$

$t_1 = \frac{7-9}{4} = -\frac{1}{2}$

$t_1 = \frac{7+9}{4} = 4$

Вернемся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,3} x = -\frac{1}{2} \\ \log_{0,3} x = 4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (0,3)^{-\frac{1}{2}} \\ x = 0,3^4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{10}{3}} \\ x = 0,0081 \end{array}\right.$$

$$x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Ответ: $0.0081; \ \frac{\sqrt{30}}{3}$

17.24 а) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \dfrac{9}{\lg 10x}$

ОДЗ: $x > 0$

$$\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{1 + \lg x}$$

$$\lg x = t, t \in R$$

$$t^2 - t + 1 = \frac{9}{1 + t}$$

$$\frac{(1+t)(t^2 - t + 1) - 9}{1 + t} = 0$$

$$\frac{t^3 + 1 - 9}{1 + t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 8 \\ t \neq -1 \end{cases} \qquad t = 2$$

Вернемся к переменной x

$$\lg x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

$$100 > 0$$

Ответ: 100

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

17.25 в) $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$

ОДЗ: $-x > 0$

$x < 0$

$4\lg|x| - \lg^2(-x) = 4$

$4\lg(-x) - \lg^2(-x) = 4$

$\lg(-x) = t, t \in R$

$4t - t^2 = 4$

$t^2 - 4t + 4 = 0$

$(t-2)^2 = 0$

$t - 2 = 0$

$t = 2$

Вернемся к переменной x

$\lg(-x) = 2$

$-x = 10^2$

$x = -100$

$-100 < 0$

Ответ: -100

$\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a |b|$

$|x| = \left[\begin{array}{ll} x, \text{если} & x \geq 0 \\ -x, \text{если} & x < 0 \end{array} \right.$

17.25 г) $\lg^2 x^3 + \lg x^2 = 40$

ОДЗ: $x > 0$

$$\left(\lg x^3\right)^2 + 2\lg|x| = 40$$

$$\left(3\lg x\right)^2 + 2\lg|x| = 40$$

$$9\lg^2 x + 2\lg x = 40$$

$$\lg x = t, t \in R$$

$$9t^2 + 2t - 40 = 0 \quad | \quad k = 1$$

$$D_1 = 1^2 - 9\cdot(-40) = 361$$

$$t_1 = \frac{-1-19}{9} = -\frac{20}{9}$$

$$t_1 = \frac{-1+19}{9} = 2$$

Вернемся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = -\dfrac{20}{9} \\ \lg x = 2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 10^{-\frac{20}{9}} \\ x = 10^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{20}{9}} \\ x = 100 \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{20}{9}} > 0$$

$$100 > 0$$

$$\log_a b^{2n} = 2n\cdot\log_a|b|$$

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

$$|x| = \left[\begin{array}{l} x, \text{если } x \ge 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{20}{9}}$; 100

17.26 б) $\frac{7\log_3 x - 15}{5\log_3 x + 3} + 1 = 0$

ОДЗ: $x > 0$

$3 > 0$

$\log_3 x = t, t \in R$

$$\frac{7t - 15}{5t + 3} + 1 = 0$$

$$\frac{7t - 15 + 5t + 3}{5t + 3} = 0$$

$$\frac{12t - 12}{5t + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12t - 12 = 0 \\ 5t + 3 \neq 0 \end{cases} \quad t = 1$$

Вернемся к переменной x

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3^1$$

$$x = 3$$

Ответ: 3

17.27 б) $\frac{\log_3 x}{2\log_3 x-6}+\frac{9}{9-\log_3^2 x}=\frac{8}{2\log_3 x+6}$

ОДЗ: $x>0$

$9>0$

$\log_3 x = t, t\in R$

$\frac{t}{2t-6}+\frac{9}{9-t^2}=\frac{8}{2t+6}$

$\frac{t^{/t+3}}{2(t-3)}-\frac{9^{/t+3}}{(t-3)(t+3)}-\frac{8^{/t+3}}{2(t+3)}=0$

$\frac{t^2+3t-18-8t+24}{2(t-3)(t+3)}=0$

$\frac{t^2-5t+6}{2(t-3)(t+3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-5t+6=0 \\ t^2-9\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \text{ п.к.} \end{array}\right. \\ t\neq\pm3 \end{cases}$ $t=2$

$t^2-5t+6=0$

$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right.$

Вернемся к переменной x

$\log_3 x = 2 \quad x=3^2$

$x=9$

Ответ: 9

17.27 а)

$$\frac{1}{\log_2 x-3}+\frac{4}{\log_2 x+1}=\frac{4}{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}$$

ОДЗ: $x>0$

$\log_2 x=t, t\in R$

$$\frac{1}{t-3}+\frac{4}{t+1}=\frac{4}{t^2-2t-3}$$

$t^2-2t-3=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

$$\frac{1}{t-3}+\frac{4}{t+1}-\frac{4}{(t-3)(t+1)}=0$$

$t+3$ **$t+3$**

$$\frac{t+1+4t-12-4}{(t-3)(t+1)}=0$$

$$\frac{5t-15}{(t-3)(t+1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t-15=0 \\ (t-3)(t+1)\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=3 \text{ п.к.} \\ t\neq 3; t\neq 1 \end{cases}$$

Ответ корней нет