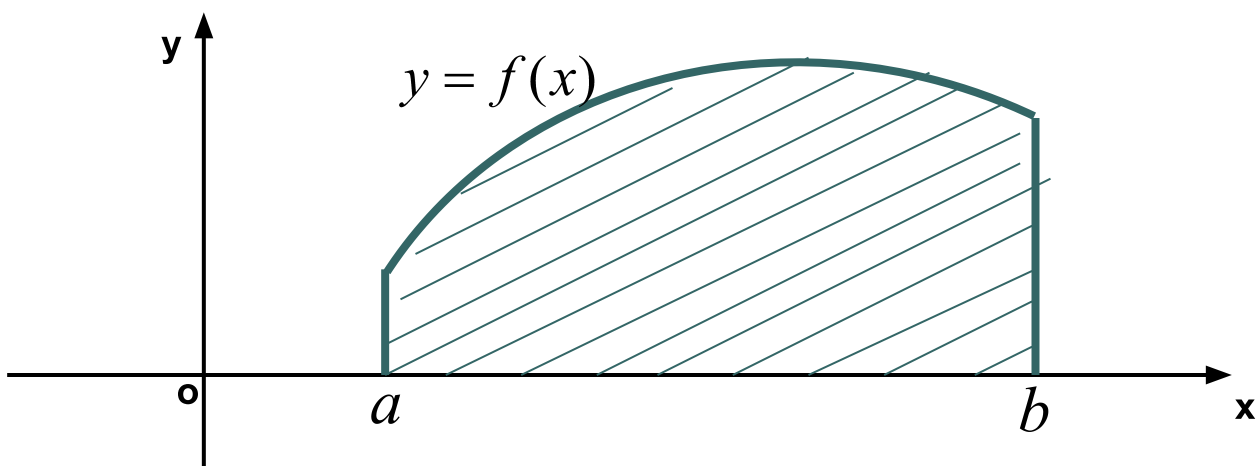
Интегральное исчисление

Определенный интеграл

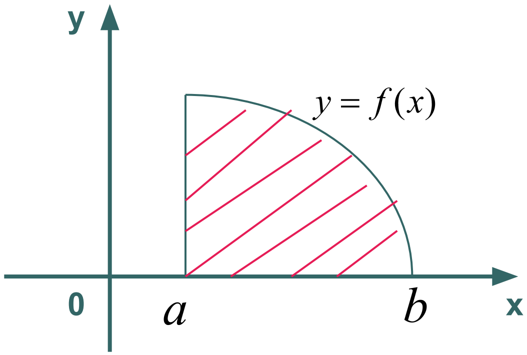
Определенный интеграл.

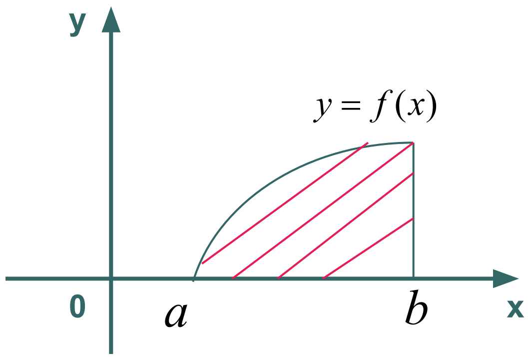
- **Определение.**
- **Криволинейной трапецией** называется фигура
- на плоскости, ограниченная **сверху** графиком
- функции $y = f(x)$, **снизу** отрезком $[a,b] \subset OX$,
- **с боков** вертикальными прямыми $x = a \;\; и \;\; x = b$.

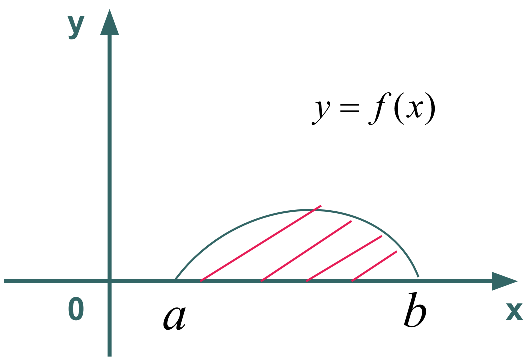


Определенный интеграл

- Частные случаи криволинейной трапеции.

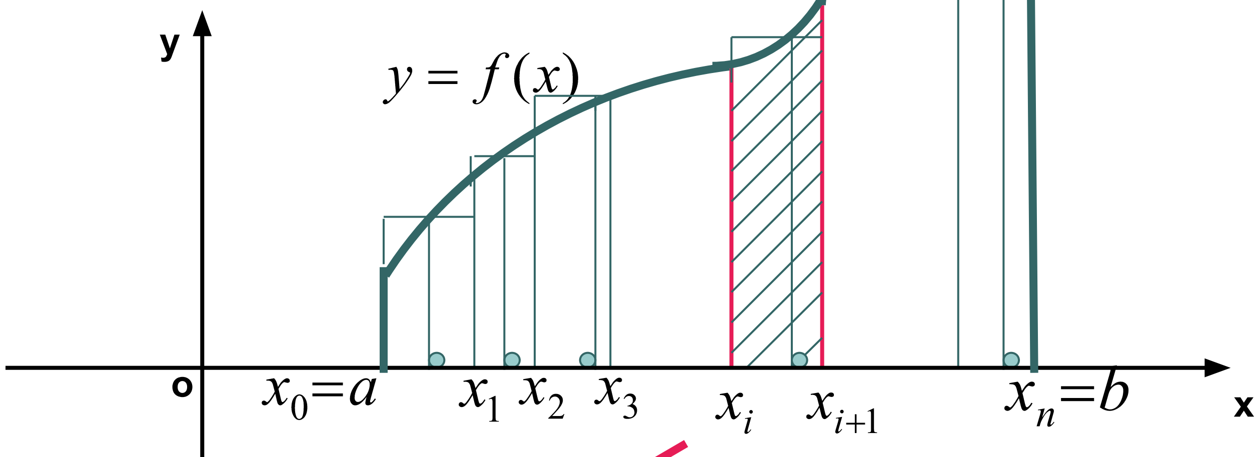


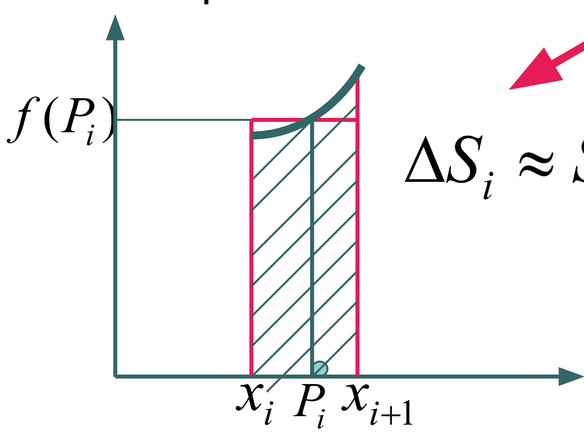




Определенный интеграл.

- **Задача о площади криволинейной трапеции.**





$$\Delta S_i \approx S_{\square} = f(P_i)\Delta x_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i}$$

Определенный интеграл.

- **Определение.**
- Выражение $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$
- называется **интегральной суммой**.
- Рассматриваем всевозможные разбиения
- криволинейной трапеции на части такие,
- что $\lambda = \max(\Delta x_i) \to 0$
- Составляем интегральные суммы
- и переходим к пределу при $\lambda \to 0$

$$\boxed{S_{трапеции} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i}$$

Определенный интеграл.

- **Определение.**
- **Определенным интегралом**
- от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$
- называется предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$$

- когда наибольший из участков разбиения $\lambda = \max(\Delta x_i)$
- стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$$

- **Геометрический смысл.**

$$f(x)\geq 0 \;\; на \;\; [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = S_{трапеции}$$

Определенный интеграл.

- Когда существует предел?
- Когда предел не зависит от способа разбиений?

- **Теорема..**
- Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,
- то она **интегрируема**
  - (то есть существует предел интегральных сумм
  - и он не зависит от способа разбиений)

Определенный интеграл.

- **Свойства.**
- **1. Линейность.**

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

$$(\ C - const \neq 0\ )$$

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))dx =$$

$$= k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx$$

$$(\ k_1, k_2 = const \neq 0\ )$$

Определенный интеграл.

- **Доказательство свойства** (для суммы).
- **1.** Возьмем разбиение $[a,b]$ на **n** частей: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$
  - и выберем в каждой части точку: $P_1, P_2, \ldots, P_n$
- **2.** Составим интегральную сумму: $\sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + g(P_i))\Delta x_i$
- **3.** $\sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + g(P_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta x_i$
- **4.** Рассматриваем всевозможные разбиения $[a,b]$ на части такие,
- что все Δx_i уменьшаются , составляем интегральные суммы
- и переходим к пределу при $\lambda = \max(\Delta x_i) \to 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + g(P_i))\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta x_i$$

$$\text{то есть} \quad \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Определенный интеграл.

- **2. Перестановка пределов интегрирования.**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- **3. Аддитивность**.
- Пусть

$$\left[a,b\right]=\left[a,c\right]\cup\left[c,b\right]$$

- тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Определенный интеграл.

- **4. О знаке интеграла.**

$$a)\ f(x) \ge 0 \ \ на\ [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

$$b)\ f(x) \le 0 \ \ на\ [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le 0$$

$$c)\ f(x) \le g(x) \ \ на\ [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Доказать свойства самостоятельно

Определенный интеграл.

- **Теорема (об оценке).**

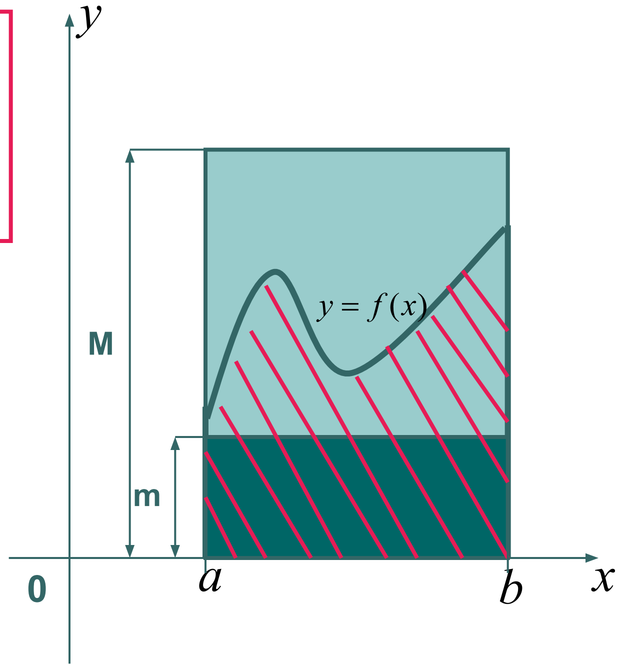
$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Геометрический смысл.

Если $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, то

$$S_m \le S_{трапеции} \le S_M$$



Определенный интеграл.

- **Доказательство.**
- **1.** $f(x)-m \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b (f(x)-m)dx \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx - m\int_a^b dx \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$$

- **2.** Аналогично: $M - f(x) \geq 0 \Rightarrow M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx$

Определенный интеграл.

- **Определение.**
- **Средним значением** функции $f(x)$на $[a,b]$
- называется число $$\boxed{f_{ср.}=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}}$$
- **Теорема (о среднем).**

$$\boxed{f(x) - непрерывна\ на\ \ [a,b]}$$

$$\Downarrow$$

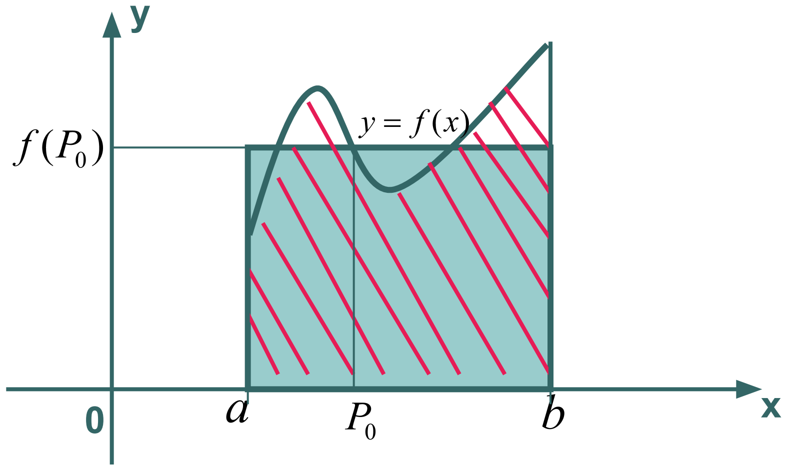
$$\boxed{\exists\, P_0\in[a,b]\ :\ f(P_0)=f_{ср.}}$$

$$\left(\int\limits_a^b f(x)dx=f(P_0)(b-a)\right)$$

Определенный интеграл.

- **Геометрический смысл.**

$$\int_a^b f(x)dx = f(P_0)(b-a)$$



Если $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, то $\boxed{S_{трапеции} = S_{P_0}}$

Определенный интеграл.

- **Доказательство.**
- **1.** Из непрерывности $f(x) \Longrightarrow m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$
- где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)\,,\ M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$
- **2.** Из теоремы об оценке $\Longrightarrow$ $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\Downarrow$$

$$m \le \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx} \le M$$

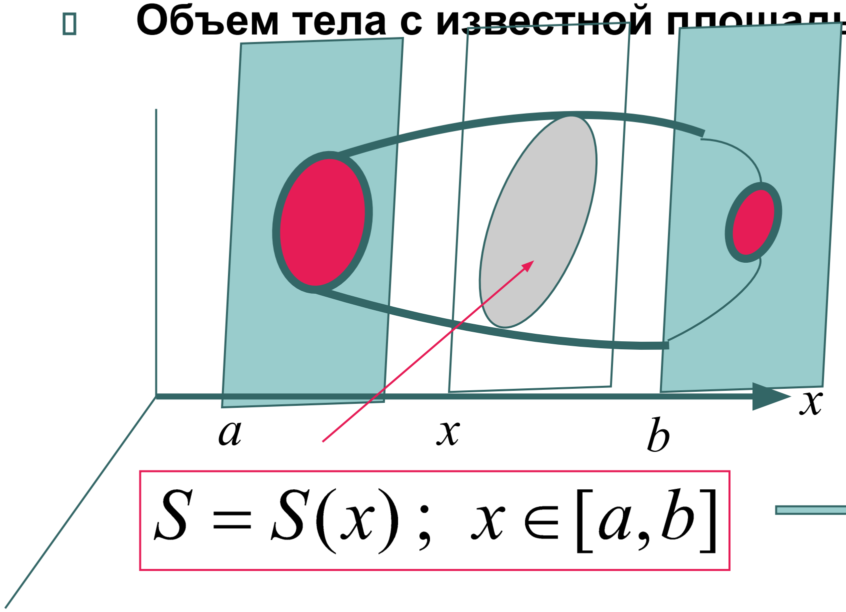
$$\Downarrow$$

$$m \le f_{ср.} \le M$$

- **3.** Из непрерывности $f(x) \Longrightarrow \exists\, P_0 \in [a,b] \ :\ f(P_0) = f_{ср.}$

Определенный интеграл.

- **Объем тела с известной площадью поперечных сечений.**



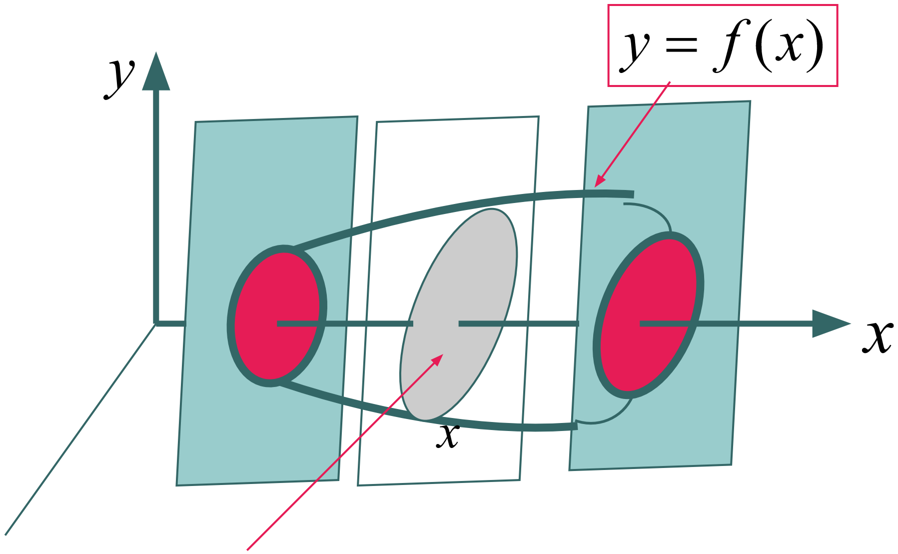
$$\boxed{S = S(x)\,;\;\; x \in [a,b]}$$

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

- **Доказать самостоятельно.**

Определенный интеграл.

- **Следствие: объем тела вращения.**



$$S = \pi r^2 = \pi (f(x))^2 ; \;\; x \in [a,b]$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

- Рассмотрим $\int_a^t f(x)dx = \Phi(t)$, *где* $t \in [a,b]$
- (t – переменная).
- **Теорема (Барроу).**
- Если $f(x)$ - непрерывная на $[a,b]$
- то $\Phi(t) \equiv \int_a^t f(x)dx$ - дифференцируемая
- и $\boxed{\left(\int_a^t f(x)dx\right)' = f(t)}$

Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

- **Следствие.**
- $\Phi(t) \equiv \int\limits_a^t f(x)dx$ **- первообразная для** $f(t)$
- **Доказательство теоремы Барроу.**
- **1.** Возьмем $t, t_1 \in [a,b]: \ t_1 = t + \Delta t$
- **2.** Тогда $\Delta\Phi = \Phi(t_1) - \Phi(t) = \int\limits_t^{t_1} f(x)dx$
- $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t_1} f(x)dx = f(P_0)$ где $P_0 \in [t, t_1]$
- **4.** $\Delta t \to 0 \Rightarrow P_0 \to t$ $\Rightarrow$ $\Phi'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = f(t)$

Связь определенного и неопределенного интегралов

Формула Ньютона - Лейбница.

Пусть $f(x)$ - непрерывная на $[a, b]$;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$

Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$

Первое доказательство.

- **1.** Возьмем разбиение $[a,b]$: $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\,;\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$
-
- **2.** $F(b) - F(a) \equiv$

$$\equiv (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \ldots + (F(x_1) - F(x_0)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

- **3.** По теореме Лагранжа $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(P_i)\Delta x_i = f(P_i)\Delta x_i$

$$\Longrightarrow \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$$

- **4.** Рассматриваем всевозможные разбиения $[a,b]$ на части такие, что все Δx_i
- уменьшаются, составляем интегральные суммы и переходим к пределу при $\lambda = \max(\Delta x_i) \to 0$

$$\lim_{\lambda \to 0}(F(b) - F(a)) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx}$$

Второе доказательство.

- Пусть $F(x)$ - какая-либо **первообразная** для $f(x)$.
- Тогда $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - также **первообразная** для $f(x)$

$$\Longrightarrow \Phi(x) = F(x) + C$$

При x=a $\Longrightarrow \begin{cases} \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \\ 0 = F(a) + C \end{cases} \Longrightarrow C = -F(a)$

При x=b $\Longrightarrow \boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$

Формула Ньютона-Лейбница.

- **Примеры.**
- **1.** $\int_1^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\frac{3}{4}$
- **2.** Интегрирование по частям в определенном интеграле.

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

- Пример: $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$