Задачи на вероятность.

1. Задачи только на определение вероятности

2. Задачи с использованием элементов комбинаторики

3. Задачи на правила сложения и умножения вероятностей

1. Задачи только на определение вероятности

Вероятностью события А называется дробь

$$P(A) = m/n$$

в числителе которой стоит число *m* элементарных событий, *благоприятствующих* событию А, а в знаменателе *n* - число *всех* элементарных событий

Пример 1

На борту самолёта 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

Решение

Если "остальные места неудобны", то удобны именно упомянутые 12 + 18 = 30 мест. Пассажиру В. может достаться одно любое место из 300 мест в самолёте, значит всего возможных событий n = 300. Но "благоприятствующими" будут только те из них, когда пассажир В. попал на удобное место, таких

Пример 2

В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

Решение

Определим, сколько всего рейсов должен совершить вертолет

30 : 6 = 5 (рейсов).

Турист П. может полететь любым из них, но "благоприятствующим" будет только 1 из них - первый. Следовательно *n* = 5, *m* = 1. Р(А) = 1/5 = 0,2.

Ответ: 0,2

Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Решение

Выпишем в ряд заданные числа и отметим те из них, которые делятся на 3. 10, 11, <u>12</u>, 13, 14, <u>15</u>, 16, 17, <u>18</u>, 19

Получается, что из 10 заданных чисел на 3 делятся 3 числа.

Находим ответ по общей формуле P(A) = 3/10 = 0,3.

Ответ: 0,3

Задача 1
В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

Задача 2.
В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по неравенствам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по неравенствам.

Задача 3
В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные - из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Задача 4
В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 - из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Задача 5
На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.
Показать ответ.
Задача 6
Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений - по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Теорема.
Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Задача 1. Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

Решение.
Пусть событие А — попадание в мишень, его вероятность Р(А) = 0,6. Противоположное попаданию событие - промах.
Вероятность промаха
Р(А) = 1-0,6=0,4.

2. Задачи с использованием элементов комбинаторики

В этих задачах ответ также определяется по формуле **$P(A) = m/n$**, но подсчет числа n всех возможных событий и числа m благоприятствующих событий заметно труднее, чем в предыдущих случаях.

Для этого используют различные методы перебора вариантов и **вспомогательные рисунки, таблицы, графы ("дерево возможностей"). формулы для числа перестановок, сочетаний, размещений.**

Правило сложения:

если некоторый объект А можно выбрать k способами, а объект В - l способами (*не такими как А*), то объект "или А *или* В" можно выбрать $m + l$ способами.

Правило умножения:

если объект А можно выбрать k способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (*независимо от объекта А*) l способами, то пару объектов А и В можно выбрать $m \cdot l$ способами.

Правило умножения еще называют "И - правилом", а правило сложения "ИЛИ - правилом".

Задача 7
В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.
Задача 8
В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.
Задача 9
В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет хотя бы один раз.
Задача 10
В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.
Задача 11
В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.
Задача 12
В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков.

Можно выписать и рассмотреть все возможные исходы 3-ёх бросаний монеты: {ооо, оор, оро, орр, роо, рор, рро, ррр}, где о - сокращение от "орёл", р - сокращение от "решка". Из перечисления видно, что n = 8, m = 1. (Благоприятствующее только ррр). По формуле P(A) = 1/8 = 0,125.

Способ I.
Испытание то же и исходы те же, что в предыдущем случае: {ооо, оор, оро, орр, роо, рор, рро, ррр}. Из перечисления видно, что n = 8, m = 3. (Благоприятствующие: {орр, рор, рро}).
По формуле P(A) = 3/8 = 0,375.

Способ I.
Испытание то же и исходы те же, что в предыдущих случаях: {ооо, оор, оро, орр, роо, рор, рро, ррр}. Из перечисления видно, что $n = 8$, $m = 7$. (Благоприятствующие все, кроме ооо).
По формуле $P(A) = 7/8 = 0,875$.

3. Задачи на правила сложения и умножения вероятностей

несовместимые

Правило сложения вероятностей:

или А, или В, или оба вместе.

если А и В несовместимые события, то вероятность того, что наступит хотя бы одно из двух событий А или В, равна сумме их вероятностей.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

Правило умножения вероятностей:

при наступлении и А, и В одновременно.

если А и В независимые события, то вероятность одновременного наступления обоих событий А и В, равна произведению их вероятностей.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Правило сложения вероятностей для совместимых событий: вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности их произведения.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ **ИЛИ**

Правило умножения вероятностей для зависимых событий: вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **"и"**

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение

Используем правило сложения, поскольку "вопрос по одной из этих двух тем" означает, что ИЛИ на тему «Вписанная окружность», ИЛИ на тему «Параллелограмм». Причем правило используем в простой форме, потому что события несовместимы. В условии об этом прямо сказано - вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

$0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35.$

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение

"А. выиграет оба раза" означает, что А. выиграет И первый раз, И второй раз. А поскольку гроссмейстеры меняют цвет фигур, то это событие можно описать и так "А. выиграет И белыми, И черными." Используем правило умножения в простой форме, потому что события независимы.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

$0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156.$

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение

Событие "кофе останется в обоих автоматах" противоположно событию "кофе закончится хотя бы в одном из автоматов ИЛИ в первом, ИЛИ во втором, ИЛИ в обоих". Найдем вероятность этого (противоположного) события по правилу сложения вероятностей для совместимых событий.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$

Тогда искомая вероятность равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Вероятность схватить пристрелянный пистолет равна 4/10 = 0,4..
Вероятность схватить непристрелянный пистолет равна (10−4)/10 = 0,6

Затем разберемся с мухой:
- Если ковбой стрелял из пристрелянного револьвера, то он НЕ попал в муху с вероятностью 1−0,9=0,1.
- Если ковбой стрелял из непристрелянного револьвера, то он НЕ попал в муху с вероятностью 1−0,2=0,8.

Воспользовались формулой для вероятности противоположного события, потому что в условии даны вероятности попадания в муху из разных пистолетов, но не промахов.

Получаем:

$0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,04 + 0,48 = 0,52.$