Решение задач по статистическому моделированию

Моделирование систем

1. Смоделировать процесс обращения к спутниковой связи, если вероятность обращения P=0,05.

- **Решение**. Возьмем сл. в. ξ с рядом распределения

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$, где **1** – обращаемся, **0** – нет.

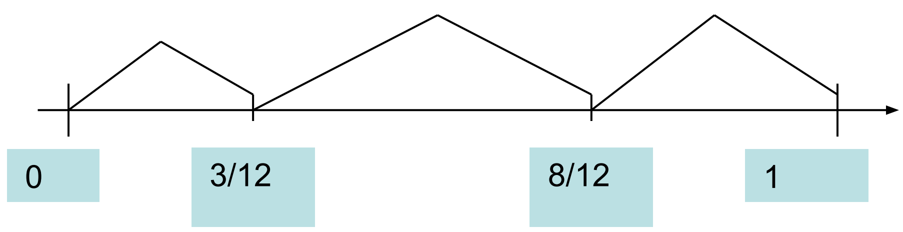
Для оптимальности алгоритма лучше использовать этот ряд в виде $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}95 & 0{,}05 \end{pmatrix}$

Дальше моделируем по ***th.*** **1**:

If γ< 0,95 then ξ =0 else ξ =1.

Смоделировать случайную величину ξ, заданную рядом распределения ξ : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & c & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- **Решение**. Здесь сумма вероятностей равна единице, т.е. $\frac{1}{4} + c + \frac{1}{3} = 1$, откуда **c=5/12**, при этом 1/4 = 3/12, 1/3 = 4/12.



Алгоритм:

If γ< 3/12 then ξ =1 else if γ< 8/12 then ξ =2 else ξ =3.

Производится залп из трех орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,8. Смоделировать случайную величину ξ – число попаданий по объекту.

- **Решение**. Это биномиальное распределение. Его можно смоделировать, связав с каждым орудием свою случайную величину γ – всего их будет **3**. Возможные варианты попаданий: 0, 1, 2, 3.
- Проверив по *th*.1 $\gamma 1<0{,}8$, получим, попало или нет первое орудие,
- Проверяем $\gamma 2<0{,}8$ – попало второе. Если >, то не попало. Аналогично третье орудие проверяем по $\gamma 3<0{,}8$. Сколько раз выполнилось условие $\gamma<0{,}8$, столько и было попаданий.

В среднем по 25% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Смоделировать случайную величину ξ - число договоров из пяти, связанных с выплатой страховой суммы.

- **Решение**.
- В этой задаче надо найти вероятность выплаты страховой суммы – это 25%, или 0,25.
- В остальном задача не отличается от предыдущей. Надо только взять 5 сл.в. γ.

Смоделировать случайную величину ξ с заданной плотностью распределения: $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$

- **Решение**. Это плотность нормально распределенной сл.в. с мат. ожиданием **3** и дисперсией **1**, т.е. **ξ ~ *N*(3; 1).**
- Надо привести эту сл. величину к **ξ_0 ~ *N*(0; 1).** Это значит $\xi - 3 = \xi_0$.
- Отсюда **ξ = ξ0 +3**. Для ξ_0 формулы моделирования известны:

$$\xi = \sqrt{-2\ln\gamma_2}\cdot\cos 2\pi\gamma_1 \quad \text{или} \quad \xi = \sqrt{-2\ln\gamma_2}\cdot\sin 2\pi\gamma_1.$$

Смоделировать случайную величину ξ с заданной функцией распределения: $F_\xi(x) = 1 - \frac{1}{5}(2e^{-2x} + 3e^{-3x}), \quad x \in (0, \infty).$

- **Решение**. Здесь ф.р. есть суперпозиция двух ф.р.
- $F1(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x \in (0, \infty).$; $F2(x) = 1 - e^{-3x}, x \in (0, \infty).$
- Соответственно $\mathbf{c_1=2/5}$, $\mathbf{c_2=3/5}$.
- В соответствии с принципом суперпозиции сначала моделируем сл.в. **η** с рядом распределения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

if $\gamma 1 < 2/5$ *then* $\eta=1$ *else* $\eta=2$, или, учитывая, что для моделирования ξ с экспоненциальным законом используется формула **$\xi = -(1/\lambda)\ln\gamma$**, получим следующий алгоритм

if $\boldsymbol{\gamma_1 < 2/5}$ ***then*** $\boldsymbol{\xi = -(1/2)\ln\gamma_2}$ ***else*** $\boldsymbol{\xi = -(1/3)\ln\gamma_2}$.

Смоделировать случайную величину ξ, распределенную с плотностью $$p_\xi(x) = \frac{6}{7}x^2 + 5x^6$$ **на (0,1).**

- **Решение.** Дана плотность, однако сумма говорит о том, что это суперпозиция. Чтобы воспользоваться ***th.*** о суперпозиции, надо от плотности перейти к ф.р., т.е. проинтегрировать.

$$F(\xi) = \int_0^\xi \left(\frac{6}{7}x^2 + 5x^6\right)dx = \int_0^\xi \frac{6}{7}x^2 dx + \int_0^\xi 5x^6 dx$$, или

$$F(\xi) = \frac{6}{7}\cdot\frac{\xi^3}{3} + 5\cdot\frac{\xi^7}{7} = \frac{2}{7}\xi^3 + \frac{5}{7}\xi^7$$

Теперь видно, что сумма коэффициентов равна 1 – можно воспользоваться ***th***. О суперпозиции.

$$F_1(\xi) = \xi^3$$

$$F_2(\xi) = \xi^7$$

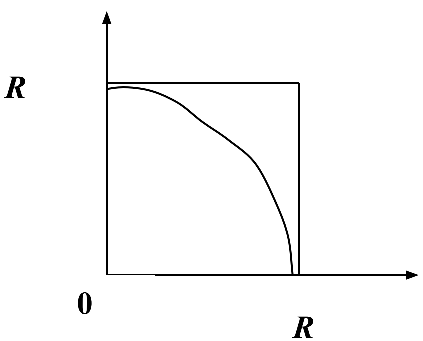
Здесь **c1=2/7, c2=5\7**

if **γ_1< 2/7** ***then*** $\xi = \sqrt[3]{\gamma 2}$

else $\xi = \sqrt[7]{\gamma 2}$.

Смоделировать сл.т. *Q*, равномерно распределенную в четверти круга радиуса *R* (1-ый квадрант).

- **Решение**. Проще всего решить задачу методом отбора. Поместим четверть круга в квадрат радиуса ***R*** так, чтобы центр круга был в левом нижнем углу.



Смоделируем сл.т. ***Q*(ξ,η),** равномерно распределенную в квадрате:

$\xi = R\,\gamma_1$ $\qquad\qquad$ $\eta = R\,\gamma_2$

Проверим, попала ли точка **Q(ξ,η) в четверть круга**

$$\xi^2 + \eta^2 \le R^2$$

Эффективность $= \dfrac{\dfrac{\pi R^2}{4}}{R^2} = \dfrac{\pi}{4}$