МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ЗФО НП 15.03.04; 27.03.04

Лектор: канд. физ.-мат. наук, доцент
Смирнова Людмила Алексеевна

Практическое занятие №3

Тема: Одномерная оптимизация

Численная реализация метода дихотомии

Постановка задачи

Определение. Унимодальной называется функция, имеющая на заданном отрезке единственный экстремум.

Требуется найти точку **минимума** x^* унимодальной функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

Свойство унимодальной функции

Пусть $f(x)$ - унимодальная на $L; \quad x_1, x_2 \in L; \quad x_1 < x_2.$

Тогда, если $f(x_1) \le f(x_2), \quad \text{то} \quad x^* \le x_2;$

если $f(x_1) \ge f(x_2), \quad \text{то} \quad x^* \ge x_1.$

Таким образом, на основании вычисленных значений функции можно указать отрезок, в котором находится точка минимума (локализовать эту точку).

Метод деления пополам **(дихотомии)**

В методе результаты каждого вычисления используются при выборе точки следующего вычисления функции.

Алгоритм метода

1. Исходный интервал $L_0 = [a,b]$ делят пополам.
2. Вблизи точки деления (по разные ее стороны) дважды определяют значение целевой функции в точках

$$x_1 = a + \frac{L_0}{2} - \frac{\varepsilon}{2};\ \ x_2 = a + \frac{L_0}{2} + \frac{\varepsilon}{2};\ \ \varepsilon - \text{заданная точность}$$

3. Используя свойство унимодальности, определяют интервал, в котором находится экстремальное значение целевой функции и отбрасывают тот интервал, где экстремум заведомо не лежит, уменьшая тем самым интервал неопределенности L_0.

Процесс расчета повторяют пор, пока не будет получен интервал L_n, где $L_n < 2\varepsilon$, содержащий точку оптимума.

Алгоритм метода

Шаг 1. Задаются количество итераций l ; $N=2l$, точность приближения ε; полагают номер итерации $k = 1$.

Шаг 2. На k-й итерации вычисляются границы расчетного интервала и значения функции в этих точках

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{2}\left(a^{(k-1)} + b^{(k-1)}\right) - \frac{\varepsilon}{2}; \quad x_2^{(k)} = \frac{1}{2}\left(a^{(k-1)} + b^{(k-1)}\right) + \frac{\varepsilon}{2};$$

$$f_1^{(k)} = f\left(x_1^{(k)}\right); \quad f_2^{(k)} = f\left(x_2^{(k)}\right).$$

Шаг 3. Выбираются границы нового расчетного интервала

$$\text{Если} \quad f_1^{(k)} \le f_2^{(k)}, \text{ то} \quad a^{(k)} = a^{(k-1)}; \quad b^{(k)} = x_2^{(k)}$$

$$\text{Если} \quad f_1^{(k)} > f_2^{(k)}, \text{ то} \quad a^{(k)} = x_1^{(k)}; \quad b^{(k)} = b^{(k-1)}$$

Алгоритм метода

Шаг 4. Проверяется условие **окончания вычислений**:

либо по числу итераций $k = \frac{N}{2};$

либо по длине интервала неопределенности 2ε.

Если это условие выполняется, то определяются:

- итоговый отрезок локализации точки минимума,
- точка минимума $, x^*$
- значение функции в точке минимума $f(x^*)$.

Конец счета.

Если условие окончания НЕ выполняется, то полагают

$k = k + 1$; **переходят** к шагу 2.

Задание 4 (КР1). Найти минимум функции $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10,$ заданной на интервале [1; 3], методом дихотомии, с точностью $\varepsilon = 0.1$

Формулы границ расчетного интервала на *k*-й итерации:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{2}\left(a^{(k-1)} + b^{(k-1)}\right) - \frac{\varepsilon}{2}; \quad x_2^{(k)} = \frac{1}{2}\left(a^{(k-1)} + b^{(k-1)}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Номер итерации k	Середина интервала L_{k-1}	Левая граница расчетного интервала $x_1^{(k)}$	Правая граница расчетного интервала $x_2^{(k)}$	Значение функции на левой границе	Значение функции на правой границе	Выбранный интервал неопределенности L_k	Длина интервала неопределенности L_k
0	-	1	3	5	37	[1; 3]	2
1	2	1,95	2,05	1,644	2,446	[1; 2,05]	1,05
2	1,525	1,475	1,575	1,680	1,270	[1,475; 2,05]	0,575
3	1,7625	1,7125	1,8125	1,004	1,082	[1,475; 1,8125]	0,3375
4	1,644	1,594	1,694	1,211	1,017	[1,594;1,8123]	0,2183
5	1,703	1,653	1,753	1,072	1,005	[1,653;1,8123]	0,159

Аналитическое решение задачи

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 10 \to \min; \quad x \in [1;3]$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 0; \quad 4x(x^2 - 3) = 0; \quad x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

$$f(1{,}73) = 1{,}00$$

Ответ: аналитическое решение: $x_{\min} = 1{,}73;\ f_{\min} = 1{,}00$

численное решение с точностью 0,1: $x_{\min} = 1{,}71;\ f_{\min} = 1{,}00$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ