INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nice Maria Americano da Costa

Introdução

Na análise de um fenômeno ou de um experimento, nem sempre é possível se determinar diretamente a relação entre a grandeza que queremos conhecer e a grandeza variável da qual ela depende. Ou seja, não conseguimos determinar explicitamente y=f(x).

Em lugar disso, o que sempre conseguimos é uma relação que envolve a própria grandeza, alguns comportamentos característicos dela e a variável da qual ela depende. Ou seja, obtemos uma relação envolvendo:

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{e} \quad x$$

ou seja, uma equaçao da forma

$$F(f(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, x...) = 0$$

Definição. Designa-se por uma equação diferencial ordinária, uma equação estabelecendo um relação entre uma função,suas derivadas e a variável independente.

$$F(y, y', y''...y^{(n)}) = 0$$

Definição. A ordem de uma equação diferencial ordinária é dada pela mais alta derivada presente na equação.

$$y' - 2xy^4 = 45 \qquad \text{de primeira ordem}$$

$$y'' + 2y' - xy^2 = 0 \quad \text{de segunda ordem}$$

Definição. Chama-se de solução da equação diferencial a função y=f(x) que satisfaz a equação dada.

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad \text{tem como soluçao}$$

$$y = Ce^x$$

Equações diferenciais a variáveis separáveis. São equações que se expressam na forma abaixo, na qual o lado direito da equação é o produto de uma função de y por uma função de x.

$$\frac{dy}{dx} = f_1(y) f_2(x)$$

Tais equações são fáceis de resolver, pois podemos separar de um lado tudo relativo a uma variável e do outro, tudo relativo à outra variável e realizar as integrações

$$\frac{1}{f_1(y)} dy = f_2(x) dx$$

$$\int \frac{1}{f_1(y)} dy = \int f_2(x) dx$$

As equações do tipo

$$M(y)dy + N(x)dx = 0$$

São equações a variáveis separáveis

Exemplo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+C$$

$$\ln y=\ln x+\ln C$$

$$y=\frac{x}{C}$$

Equações diferenciais de 2ª. Ordem a coeficientes constantes. São equações que envolvem a segunda derivada, a primeira derivada de uma função e ela própria, articualadas por coeficientes a, b e c, constantes:

$$ay''+by'+cy \quad =0$$

Para esse tipo de equação pode-se propor soluções do tipo

$$y = e^{kx}$$

pois

$$y' = ke^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

e a equaçao diferencial se transforma numa equaçao algebrica

$$\mathrm{a}k^2 + bk + c = o$$

Que tem como soluções, resolvendo pela fórmula de báscara, k_1 e k_2.
A solução geral da equação diferencial será então, sendo C_1 e C_2 as constantes de integração

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$