CÁLCULO NUMÉRICO

Aula 9 – Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DESTA AULA

- Equações diferenciais de 1ª ordem

  ✔ Método de Euler

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., $y^{(n)}$(x)) = 0 envolvendo uma função incógnita y = y(x) e suas derivadas. A variável x é independente enquanto y é dependente. O símbolo $y^{(k)}$ denota a derivada de ordem k da função y = y(x).

Exemplos:

$$\boxed{y''+3.y'+6y = sen(x)}$$

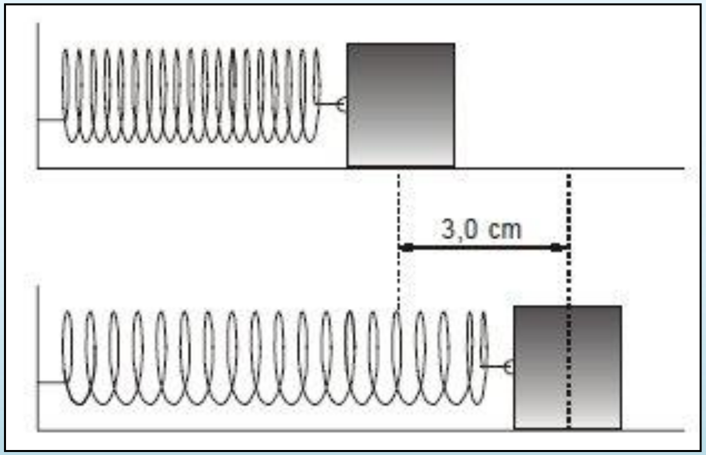
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0}$$

$$\boxed{(y'')^3 + 3.y'+6y = tg(x)}$$

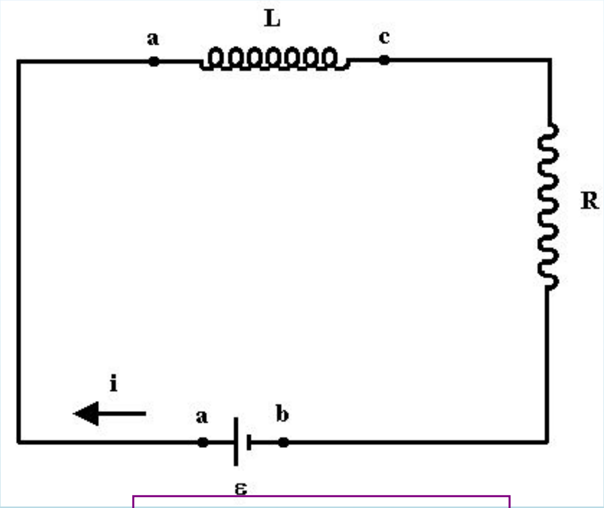
$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - APLICAÇÕES

Na engenharia, a utilização de equações diferenciais tem como objetivo descrever o comportamento dinâmico de sistemas físicos. Como, por exemplo, a equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico de um circuito ou de um movimento harmônico simples.



$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 . x = 0}$$



$$\boxed{L.\frac{di}{dt} + R.i = \varepsilon}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - CONCEITOS

- A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a “forma” de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas.

$\boxed{y''+3.y'+6y = sen(x)}$ (ordem 2 e grau 1)

$\boxed{(y'')^3 + 3.(y')^{10} + 6y = tg(x)}$ (ordem 2 e grau 3)

- Equação diferencial ordinária é aquela em que a função y e suas derivadas só dependem de 1 variável.

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A solução de uma equação diferencial é uma função que não contém derivadas nem diferenciais e que satisfaz a equação dada, isto é, a função que, substituída na equação dada, a transforma em uma identidade.

$$\boxed{x^2.y'' - 2.x.y' + 2y = 0 \quad (\textit{equação} \quad \textit{de} \quad \textit{Euler})}$$

$$\boxed{y(x) = C_1.x + C_2.x^2 \quad (\textit{solução} \quad \textit{geral})}$$

$$\boxed{\begin{gathered} y'(x) = C_1 + 2.C_2.x; \\ y''(x) = 2.C_2 \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x^2.y'' - 2.x.y' + 2y = 0 \\ x^2.2C_2 - 2.x.(C_1 + 2.C_2.x) + 2.(C_1.x + C_2.x^2) = 0 \\ 2.C_2x^2 - 2.C_1x. - 4.C_2.x^2 + 2.C_1.x + 2C_2.x^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{gathered}}$$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

Para que a equação diferencial tenha solução única define-se o PVI para uma equação diferencial de ordem n $F(x,y,y',y'',...,y^n)=0$ como sendo a equação diferencial mais "n" equações do tipo:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

EXEMPLO 1.

Dada a equação diferencial y'' + 4y = 0, verifique se $y = C_1.\cos 2x + C_2.\text{sen}2x$ é uma solução geral e resolva o problema de valor inicial com as seguintes condições:

$$\boxed{y(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad e \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 0}$$

Solução:

$y = C_1.\cos 2x + C_2.\text{sen}2x \Rightarrow y' = -2C_1.\text{sen}2x + 2C_2.\cos 2x$

$y' = -2C_1.\text{sen}2x + 2C_2.\cos 2x \Rightarrow y'' = -4C_1.\cos 2x - 4C_2.\text{sen}2x$

Substituindo:

$$-4C_1.\cos 2x - 4C_2.\text{sen}2x + 4.(C_1.\cos 2x + C_2.\text{sen}2x) = 0$$

$$0 = 0$$

EXEMPLO 1 - CONTINUAÇÃO.

$y = C_1.\cos 2x + C_2.\text{sen}2x$ e $y' = -2C_1.\text{sen}2x + 2C_2.\cos 2x$

- $y(\pi/4) = 1$

$$1 = C_1.\cos 2(\pi/4) + C_2.\text{sen}2(\pi/4)$$
$$1 = C_1.\cos(\pi/2) + C_2.\text{sen}(\pi/2)$$
$$1 = C_1.0 + C_2.1$$
$$C_2 = 1$$

- $y'(\pi/4) = 0$

$$0 = -2C_1.\text{sen}2(\pi/4) + 2C_2.\cos 2(\pi/4)$$
$$0 = -2C_1.\text{sen}(\pi/2) + 2.1.\cos(\pi/2)$$
$$0 = C_1.1 + C_2.0$$
$$C_1 = 0$$

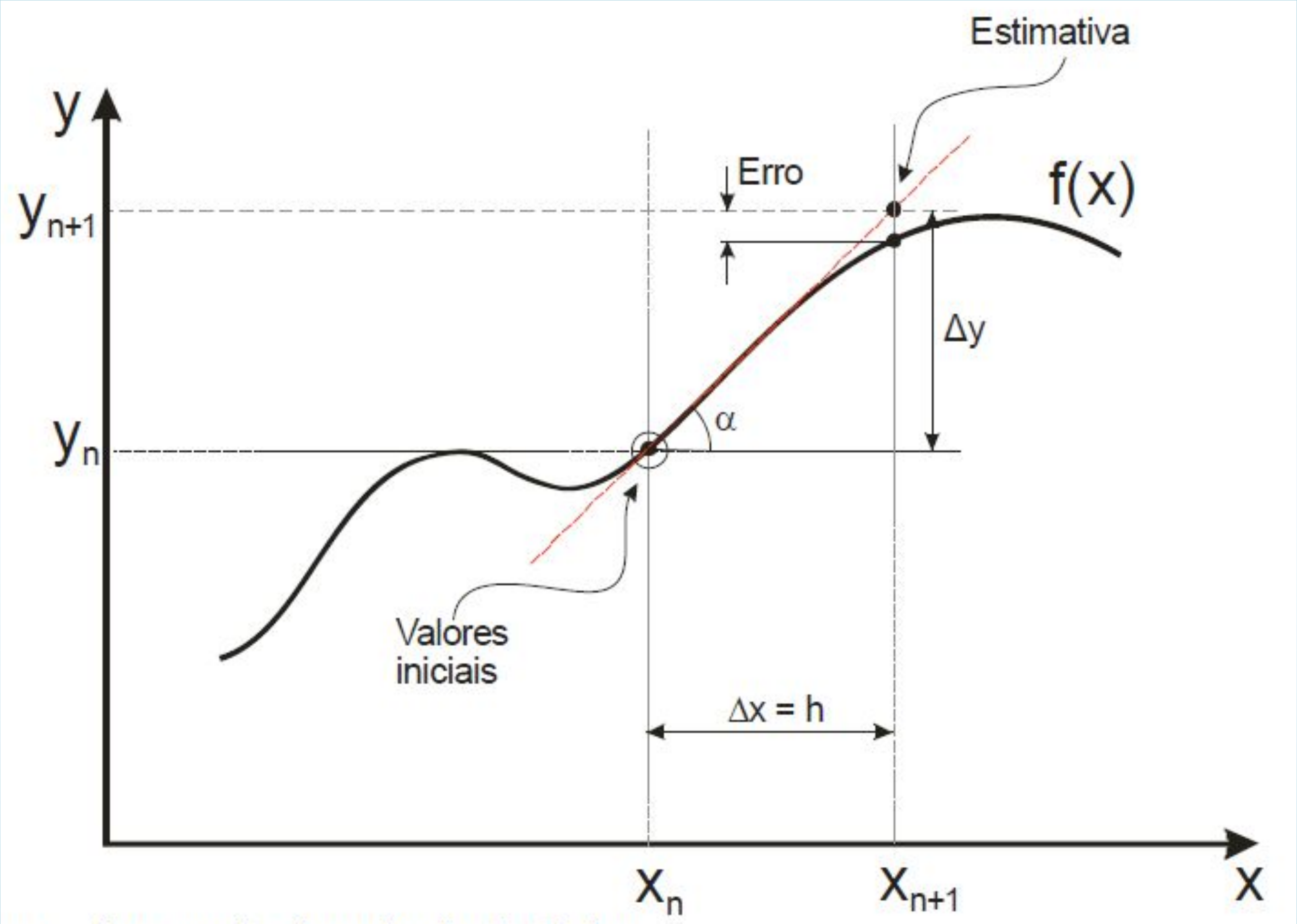
Solução particular: $y = \text{sen}2x$

MÉTODO DE EULER

O método de Euler, também conhecido como método da reta secante, é um dos métodos mais antigos que se conhece para a solução de equações diferenciais ordinárias

Seja uma função $y' = f(x, y)$ com a condição inicial de $y = y_n$ quando $x = x_n$.

MÉTODO DE EULER - CONTINUAÇÃO



Do gráfico:

- $y = y_{n+1}$ quando $x = x_{n+1}$;
- $h = x_{n+1} - x_n$.(passo)

MÉTODO DE EULER - CONTINUAÇÃO

Equação da reta:

$$y_{n+1} = y_n + tg\alpha . (x_{n+1} - x_n)$$

$tg\alpha = dy/dx = y' = f(x_n,y_n)$ (aproximadamente)

Substituindo $tg\alpha = f(x_n,y_n)$ e $h = x_{n+1} - x_n$, temos:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n,y_n) \text{ (Fórmula de Euler)}$$

EXEMPLO 2 - Resolva a equação y' = 1 – x + 4y com a condição $y_0(0)= 1$ para o intervalo [0,2] com passo h = 0,01

Solução

$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n,y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + 0,01.(1 - x + 4y)$

$h = x_{n+1} - x_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n + h \Rightarrow x_{n+1} = x_n + 0,01$

n = 0

- $y_1 = 1 + 0,01.(1 - 0 + 4.1) = 1,05$
- $x_1 = 0 + 0,01 = 0,01$

n = 1

- $y_2 = 1,05 + 0,01.(1 - 0,01 + 4.1,05) = 1,1019$
- $x_2 = 0,01 + 0,01 = 0,02$

EXEMPLO 2 – CONTINUAÇÃO

Solução

$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n,y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + 0{,}01.(1 - x + 4y)$

$h = x_{n+1} - x_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n + h \Rightarrow x_{n+1} = x_n + 0{,}01$

n = 2

- $y_3 = 1{,}1019 + 0{,}01.(1 - 0{,}02 + 4.1{,}1019) = 1{,}155776$
- $x_3 = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03$

n = 3

- $y_4 = 1{,}155776 + 0{,}01.(1 - 0{,}03 + 4.1{,}155776) = 1{,}211707$
- $x_4 = 0{,}03 + 0{,}01 = 0{,}04$

EXEMPLO 2 – CONTINUAÇÃO

n	x	y
0	0	1
1	0	1,05
2	0	1,1019
3	0	1,155776
4	0	1,21170704
5	0,1	1,26977532
6	0,1	1,33006633
7	0,1	1,39266899
8	0,1	1,45767575
9	0,1	1,52518278
10	0,1	1,59529009
11	0,1	1,66810169
12	0,1	1,74372576
13	0,1	1,82227479
14	0,1	1,90386578
15	0,2	1,98862041
16	0,2	2,07666523
17	0,2	2,16813184
18	0,2	2,26315711
19	0,2	2,3618834
20	0,2	2,46445873

n	x	y
0	0	1
1	0	1,05
2	0	1,1019
3	0	1,155776
4	0	1,21170704
5	0,1	1,26977532
6	0,1	1,33006633
7	0,1	1,39266899
8	0,1	1,45767575
9	0,1	1,52518278
10	0,1	1,59529009
11	0,1	1,66810169
12	0,1	1,74372576
13	0,1	1,82227479
14	0,1	1,90386578
15	0,2	1,98862041
16	0,2	2,07666523
17	0,2	2,16813184
18	0,2	2,26315711
19	0,2	2,3618834
20	0,2	2,46445873

RESUMINDO

Nesta aula vocês estudaram:

- Equações diferenciais de 1ª ordem

  ✔ Método de Euler.