CÁLCULO NUMÉRICO

Aula 10 – Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem - continuação.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DESTA AULA

- Equações diferenciais de 1ª ordem

  - continuação

  ✔ Método de Runge- Kutta (Euler modificado)

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas. A variável x é independente enquanto y é dependente. O símbolo $y^{(k)}$ denota a derivada de ordem k da função $y = y(x)$.

Exemplos:

$$\boxed{y''+3.y'+6y = sen(x)}$$

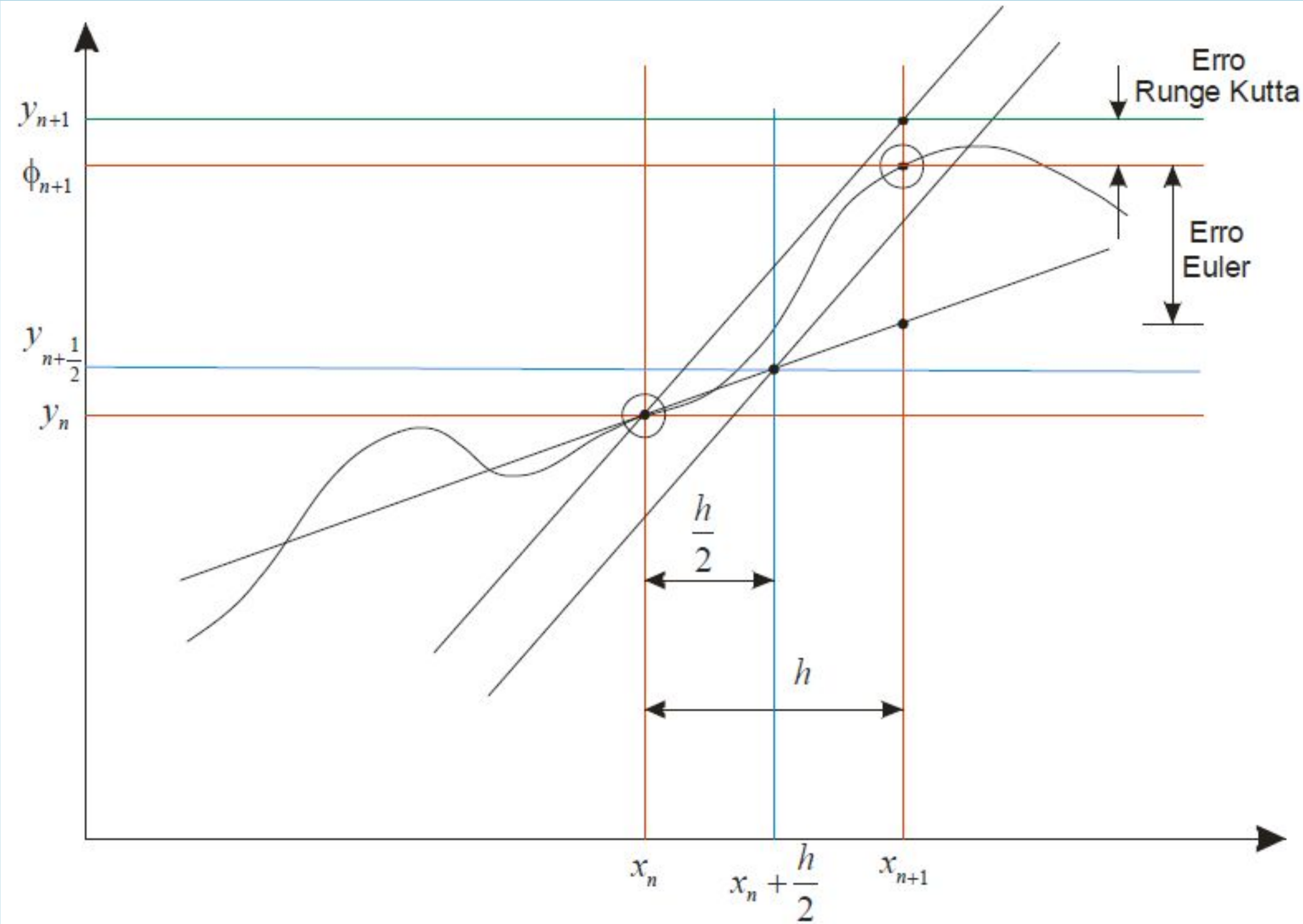
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0}$$

$$\boxed{(y'')^3 + 3.y'+6y = tg(x)}$$

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

- O método de Runge-Kutta pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função;
- No método de Euler a estimativa do valor de y_{n+1} é realizado com o valor de y_n e com a derivada no ponto x_n;
- No método de Runge-Kutta, busca-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em mais pontos no intervalo $[x_n , x_{n+1}]$.


Erro
Runge Kutta
Erro
Euler
y_{n+1}
ϕ_{n+1}
$y_{n+\frac{1}{2}}$
y_n
$\frac{h}{2}$
h
x_n
$x_n + \frac{h}{2}$
x_{n+1}

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

- O método de Euler é o método de Runge-Kutta de 1ª ordem;
- No método de Runge-Kutta de 2ª ordem, o valor da estimativa de y_{n+1} é encontrado com o valor de y_n e com uma estimativa da derivada em um ponto mais próximo de x_{n+1}, em $x_n + h/2$;
- A ideia básica é aproveitar as qualidades dos métodos da série de Taylor e ao mesmo tempo eliminar seu maior defeito que é o cálculo de derivadas de f(x, y) - torna os métodos de série de Taylor computacionalmente ineficientes

Estácio

MÉTODO DE EULER

- É um método de passo 1, isto é, para determinar y_{n+1} precisamos de apenas y_n;
- Não é necessário o cálculo de qualquer derivada de f(x,y);
- É um método de série de Taylor de 1ª ordem:
- Calcula f(x,y) em vários pontos.

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM p

- É um método de passo 1, isto é, para determinar y_{n+1} precisamos de apenas y_n;
- Após expandir f(x,y) por Taylor para função de duas variáveis em torno de (x_n,y_n) sua expressão coincide com a do método de série de Taylor de mesma ordem;
- Não é necessário o cálculo de qualquer derivada de f(x,y);
- Calcula f(x,y) em vários pontos.

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

- Como é um aperfeiçoamento do método de Euler devemos ter que y’ = f (x, y) e $y(x_0) = y_0$;
- Esse método consiste em se fazer mudanças no método de Euler para se conseguir um método baseado na série de aylor de 2ª ordem, de tal forma que elimine o cálculo de derivadas de 2ª ordem;

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h.[f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.f(x_n, y_n))]}$$

EXEMPLO 1 - Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = x - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Usando o método de Euler modificado encontre y_1 e y_2

$$y_{n+1} = y_n + h.[f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.f(x_n, y_n))]$$

$$y_1 = y_0 + h.[f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}.f(x_0, y_0))]$$

Onde:

- h = 0,1
- $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$
- $f(x_0,y_0) = 0$

EXEMPLO 1 - continuação

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{2}.[f(0,0) + f(0,1;0,1.f(0,0))]$$

$$y_1 = 0 + 0,1.[f(0 + 0,05;0 + 0,05.f(0,0))]$$

$$y_1 = 0,1x[f(0,05;0)]$$

$$y_1 = 0,1x0,05$$

$$y_1 = 0,005$$

EXEMPLO 1 - continuação

$X_1 = 0 + 0,1 = 0,1$ e $y_1=0,005$

$$y_2 = y_1 + h.[f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}.f(x_1, y_1))]$$

$$y_2 = 0,005 + 0,1.[f(0,1 + 0,05;0,005 + 0,05.f(0,1;0,005))]$$

$$y_2 = 0,005 + 0,1.[f(0,15;0,05 + 0,05.0,0999975)]$$

$$y_2 = 0,005 + 0,1.[f(0,15;0,0999875)]$$

$$y_2 = 0,005 + 0,1.[0,140002499]$$

$$y_2 = 0,0190025$$

EXEMPLO 2 - Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 0{,}04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

Determinar y(1)

a)Euler

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)}$$

$X_0 = 0$; $y_0 = 1.000$ e $h = 0{,}5$ (LEMBRANDO: $x_{n+1} = x_n + h$)

$$y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$$
$$y_1 = 1000 + 0{,}5.f(0;1000)$$
$$y_1 = 1000 + 0{,}5x40$$
$$y_1 = 1020$$

$$y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1)$$
$$y_2 = 1020 + 0{,}5.f(0{,}5;1020)$$
$$y_2 = 1000 + 0{,}5x40{,}8$$
$$y_2 = 1040{,}4$$

EXEMPLO 2 - continuação

b) Euler modificado

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h.[f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.f(x_n, y_n))]}$$

$X_0 = 0$; $y_0 = 1.000$ e $h = 0,5$ (LEMBRANDO: $x_{n+1} = x_n + h$)

$$y_1 = y_0 + h.[f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}.f(x_0, y_0))]$$

$$y_1 = 1000 + 0,5.[f(0 + 0,25;1000 + 0,25.f(0,1000))]$$

$$y_1 = 1000 + 0,5.[f(0,25;1000 + 0,25.40)]$$

$$y_1 = 1000 + 0,5.[f(0,25;1010]$$

$$y_1 = 1000 + 20,2$$

$$y_1 = 1020,2$$

EXEMPLO 2 - continuação

$$y_2 = y_1 + h.[f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}.f(x_1, y_1))]$$

$$y_2 = 1020{,}2 + 0{,}5.[f(0{,}5 + 0{,}25;1020{,}2 + 0{,}25.f(0{,}5;1020{,}2))]$$

$$y_2 = 1020{,}2 + 0{,}5.[f(0{,}75;1020{,}2 + 10{,}2)]$$

$$y_2 = 1020{,}2 + 0{,}5.[f(0{,}75;1030{,}4]$$

$$y_2 = 1020{,}2 + 0{,}5.[f(0{,}75;1030{,}4]$$

$$y_2 = 1040{,}808$$

EXEMPLO 2 - continuação

Solução exata:

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}04.y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 0{,}04.dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 0{,}04.dx$$

$$\ln y = 0{,}04.x + \ln K \quad \Rightarrow \quad \ln 1000 = \ln K$$

$$\ln y - \ln 1000 = 0{,}04x \Rightarrow \quad \ln \frac{y}{1000} = 0{,}04x$$

$$y = 1000.e^{0{,}04x}$$

Para x = 1, temos:

- $y = 1000.e^{0{,}04} \Rightarrow \quad y = 1040{,}810$

RESUMINDO

Nesta aula vocês estudaram:

- Equações diferenciais de 1ª ordem
  - ✔ Runge- Kutta (Euler modificado)