МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

МЕТОДИКА МЕТОДА МАИ

СУТЬ МЕТОДА МАИ

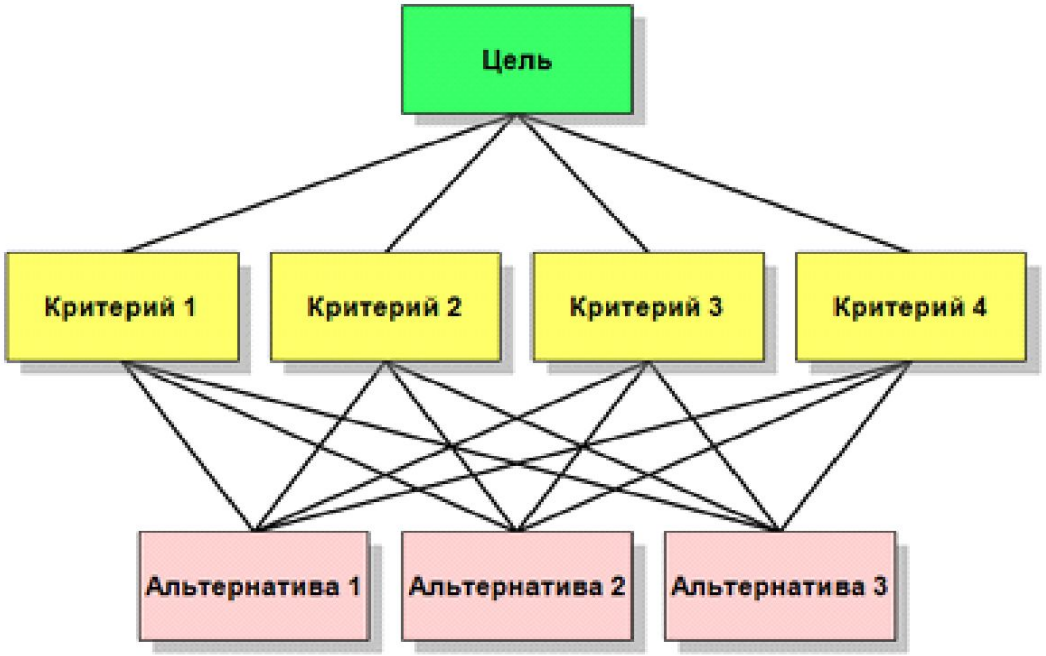
- Иерархия возникает тогда, когда системы, функционирующие на одном уровне, функционируют как части системы более высокого уровня, становясь подсистемами этой системы. МАИ является процедурой для иерархического представления элементов, определяющих суть проблемы. Метод состоит в декомпозиции проблемы на более простые составляющие части дальнейшей обработки последовательности суждений лица, принимающего решения по парным сравнениям. включая процесс синтеза многих суждении, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.

ПОРЯДОК ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

- Построение качественной модели проблемы в виде иерархии, включающей цель, альтернативные варианты достижения цели и критерии для оценки качества альтернатив.
- Определение приоритетов всех элементов иерархии с использованием метода парных сравнений.
- Синтез глобальных приоритетов альтернатив путем линейной свертки приоритетов элементов на иерархии.
- Проверка суждений на согласованность.
- Принятие решения на основе полученных результатов.

ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРОБЛЕМЫ –ПЕРВЫЙ ШАГ МАИ

- Иерархическая структура объединяет цель выбора, критерии, альтернативы и другие факторы, влияющие на выбор решения. Построение такой структуры помогает проанализировать все аспекты проблемы.



ТЕРМИНЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

- Иерархические структуры, используемые в МАИ, представляет собой инструмент для качественного моделирования сложных проблем. Вершиной иерархии является главная цель; элементы нижнего уровня представляют множество вариантов достижения цели (альтернатив); элементы промежуточных уровней соответствуют критериям или факторам, которые связывают цель с альтернативами. Существуют специальные термины для описания иерархической структуры МАИ. Каждый уровень состоит из узлов. Элементы, исходящие из узла, принято называть его детьми (дочерними элементами). Элементы, из которых исходит узел, называются родительскими. Группы элементов, имеющие один и тот же родительский элемент, называются группами сравнения.

ТЕРМИНЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР (продолжение)

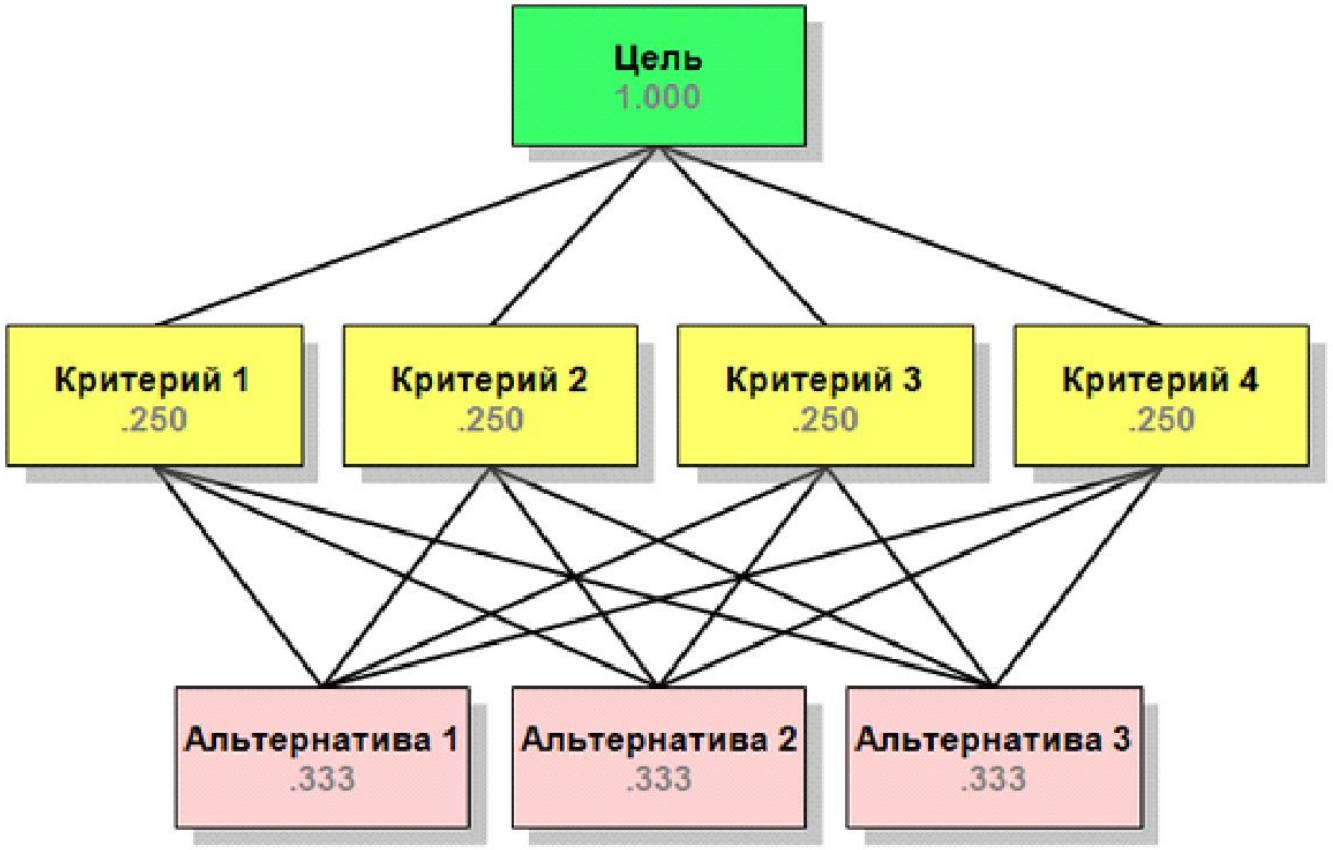
- Родительские элементы Альтернатив, как правило, исходящие из различных групп сравнения, называются покрывающими Критериями. Используя эти термины для описания представленной выше диаграммы, можно сказать, что четыре Критерия — это дети Цели; в свою очередь, Цель — это родительский элемент для любого из Критериев. Каждая Альтернатива — это дочерний элемент каждого из включающих ее Критериев. Всего на диаграмме присутствует две группы сравнения: группа, состоящая из четырех Критериев и группа, включающая три Альтернативы. Вид любой иерархии МАИ будет зависеть не только от объективного характера рассматриваемой проблемы, но и от знаний, суждений, системы ценностей, мнений, желаний и т. п. участников процесса.

РАССТАНОВКА ПРИОРИТЕТОВ

- Приоритеты — это числа, которые связаны с узлами иерархии. Они представляют собой относительные веса элементов в каждой группе. Подобно вероятностям, приоритеты — безразмерные величины, которые могут принимать значения от нуля до единицы. Чем больше величина приоритета, тем более значимым является соответствующий ему элемент. Сумма приоритетов элементов, подчиненных одному элементу выше лежащего уровня иерархии, равна единице. Приоритет цели по определению равен 1.0. Рассмотрим простой пример, поясняющий методику вычисления приоритетов.

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА МАИ С ПРИОРИТЕТАМИ, ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО УМОЛЧАНИЮ (рис. 1)

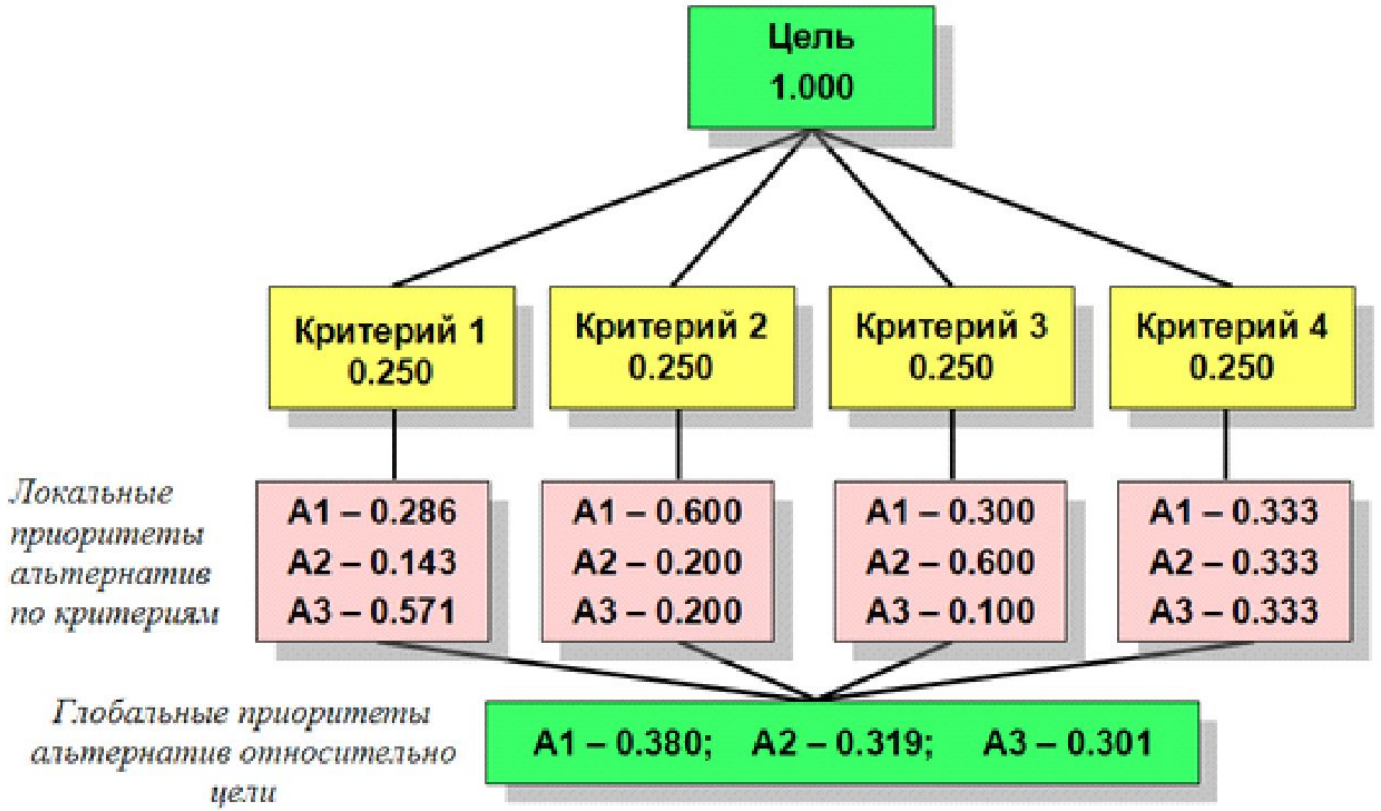
- .



ПОЯСНЕНИЯ К РИС.1

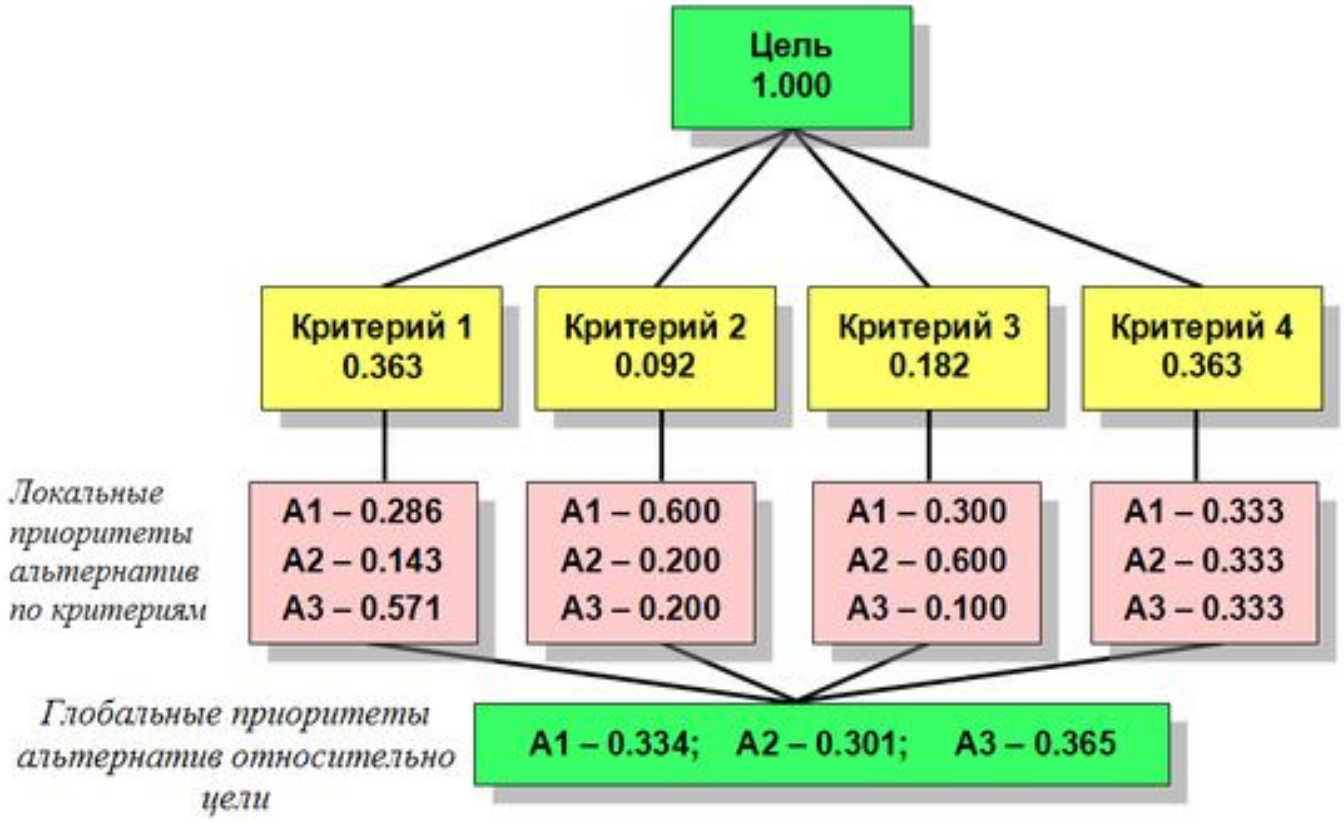
- На рис.1 показана иерархия, в которой приоритеты всех элементов не устанавливались ЛПР. В таком случае по умолчанию приоритеты элементов считаются одинаковыми, т.е.все четыре критерия имеют равную важность с точки зрения цели, а приоритеты всех альтернатив равны по всем критериями. Др.словами, альтернативы в этом примере неразличимы. Сумма приоритетов элементов любого уровня, равна единице. Глобальные приоритеты альтернатив относительно цели вычисляются путем умножения локального приоритета каждой альтернативы на приоритет каждого критерия и суммирования по всем критериям.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С РАЗЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ ДЛЯ АЛЬТЕРНАТИВ



- Предпочтительная альтернатива – A1

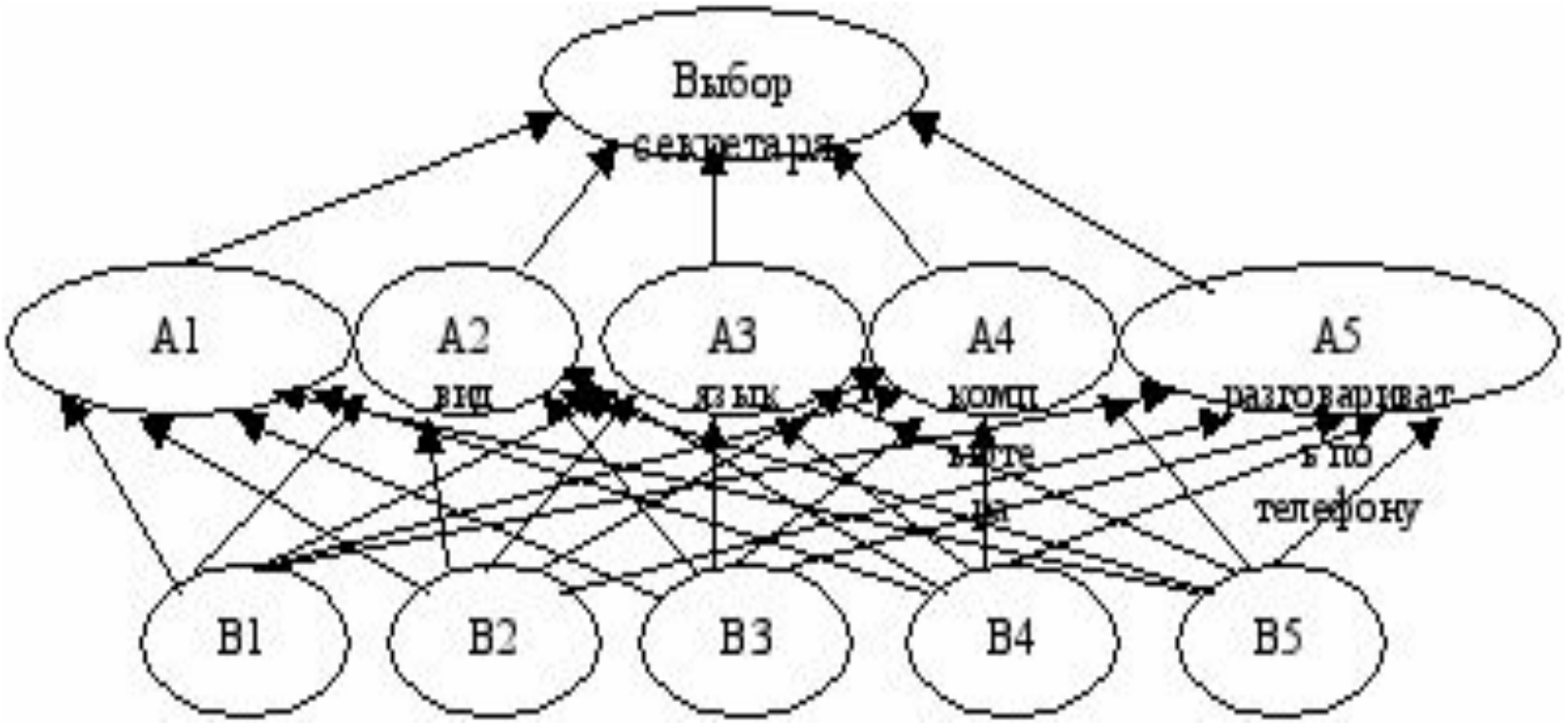
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИЗМЕНИВШИМИСЯ ПРИОРИТЕТАМИ ДЛЯ КРИТЕРИЕВ



Предпочтительная Альтернатива А3

АЛГОРИТМ МЕТОДА МАИ

1 ШАГ – ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОБЛЕМЫ



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИОРИТЕТОВ

- **Второй этап.** После иерархического представления задачи необходимо установить приоритеты критериев и оценить каждую из альтернатив по критериям, определив наиболее важную их них.
- В МАИ элементы сравниваются попарно по отношению к их влиянию на общую для них характеристику.
  Парные сравнения приводят к записи характеристик сравнений в виде квадратной матрицы.
- Эта матрица обратно симметричная, т.е. имеет место свойство: $a_{ij}=1/a_{ji,}$ где индексы i и j - номер строки и номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

ШКАЛА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ

Интенсивность относительной важности	Определение
1	Равная важность
3	Умеренное превосходство одного над другим
5	Существенное или сильное превосходство
7	Значительное превосходство
9	Очень сильное превосходство
2,4,6,8	Промежуточное решение между двумя соседними суждениями

РАСЧЕТ ВЕКТОРА ПРИОРИТЕТОВ

- Для определения относительной ценности каждого элемента необходимо найти геометрическое среднее. С этой целью нужно перемножить n элементов каждой строки и из полученного результата извлечь корни n-й степени. Полученные числа ωi i=1÷n необходимо нормировать. Для этого определяем нормирующий множитель $r = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots + \omega_n$. и каждое из чисел ω_i делим на r
  $q_{2i} = \omega_i / r$, (i = 1,2,3, ... n).
  В результате получаем вектор приоритетов:
  $\mathbf{q}_2 = (q_{21}, q_{22}, q_{23}, \ldots..q_{2n})$, где индекс 2 означает, что вектор приоритетов относится ко второму уровню иерархии.
- Подобную процедуру проделываем для всех матриц парных сравнений.

СОГЛАСОВАННОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИОРИТЕТОВ

- Любая матрица суждений в общем случае не согласована, так как суждения отражают субъективные мнения ЛПР, а сравнение элементов, которые имеют количественные эквиваленты, может быть несогласованным из-за присутствия погрешности при проведении измерений. Нужен способ оценки степени согласованности при решении конкретной задачи.
- Метод анализа иерархий дает возможность провести такую оценку.

.

СОГЛАСОВАННОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИОРИТЕТОВ (продолжение)

- Вместе с матрицей парных сравнений мы имеем меру оценки степени отклонения от согласованности. Когда такие отклонения превышают установленные пределы тем, кто проводит решение задачи, необходимо их пересмотреть.
- С этой целью необходимо определить индекс согласованности и отношение согласованности. Действия для определения ИС
- Определяется сумма каждого j-го столбца матрицы суждений

  $s_j = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + \ldots\ldots\ldots + a_{n\,j}$, j=1,2,3, …. ,n

СОГЛАСОВАННОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИОРИТЕТОВ (продолжение)

- Затем полученный результат умножается на j-ю компоненту нормализованного вектора приоритетов q_2, т.е. сумму суждений первого столбца на первую компоненту, сумму суждений второго столбца - на вторую и т.д.
  $p_j = s_j \cdot q_{2j}$, j=1,2,3, ……, n.
  Сумма чисел p_j отражает пропорциональность предпочтений, чем ближе эта величина к n (числу объектов и видов действия в матрице парных сравнений), тем более согласованы суждения. Вычисляется
  $З_{max} = p_1+p_2+p_3+ \ldots\ldots+p_n$.
  Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ИС

$$ИС = \frac{3_{\max} - n}{n - 1}.$$

ОТНОШЕНИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ ОС

- Для определения того, насколько точно индекс согласованности ИС отражает согласованность суждений его необходимо сравнить со случайным индексом (СИ) согласованности, который соответствует матрице со случайными суждениями, выбранными из шкалы 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, при условии равной вероятности выбора любого из приведённых чисел. Отношение индекса согласованности ИС к среднему значению случайного индекса согласованности СИ называется **отношением согласованности ОС.** Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым.

РАСЧЕТ ОС

$$ОС = \frac{ИС}{СИ}.$$

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ СОГЛАСОВАННОСТИ

Размер матрицы	Среднее значение случайной согласованности	Размер матрицы	Среднее значение случайной согласованности
1	0	8	1,41
2	0	9	1,45
3	0,58	10	1,49
4	0,90	11	1,51
5	1,12	12	1,48
6	1,24	13	1,56
7	1,32	14	1,57
		15	1,59

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИОРИТЕТОВ АЛЬТЕРНАТИВ

- Для определения приоритетов альтернатив необходимо локальные приоритеты умножить на приоритет соответствующего критерия на высшем уровне и найти суммы по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент.

  Обозначим через

  q_{3k} - вектор приоритетов k-й матрицы, расположенной на третьем уровне;

  q_{3ki} - i-й элемент вектор приоритетов k-й матрицы суждений, расположенной на третьем уровне;

  q_{2k}- k-й элемент вектор приоритетов матрицы суждений, расположенной на втором уровне;

  q_j - приоритет j-го элемента третьего уровня.
-

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИОРИТЕТОВ АЛЬТЕРНАТИВ (продолжение)

- Тогда приоритет j-го элемента третьего уровня определяется как
- $q_1 = q_{311} \cdot q_{21} + q_{321} \cdot q_{22} + q_{331} \cdot q_{23} + \ldots + q_{3n1} \cdot q_{2n}$

  $q_2 = q_{312} \cdot q_{21} + q_{322} \cdot q_{22} + q_{332} \cdot q_{23} + \ldots + q_{3n2} \cdot q_{2n}$

  $q_3 = q_{313} \cdot q_{21} + q_{323} \cdot q_{22} + q_{333} \cdot q_{23} + \ldots + q_{3n3} \cdot q_{2n}$

  . . . . . .

  $q_n = q_{31n} \cdot q_{21} + q_{32n} \cdot q_{22} + q_{33n} \cdot q_{23} + \ldots + q_{3nn} \cdot q_{2n}$

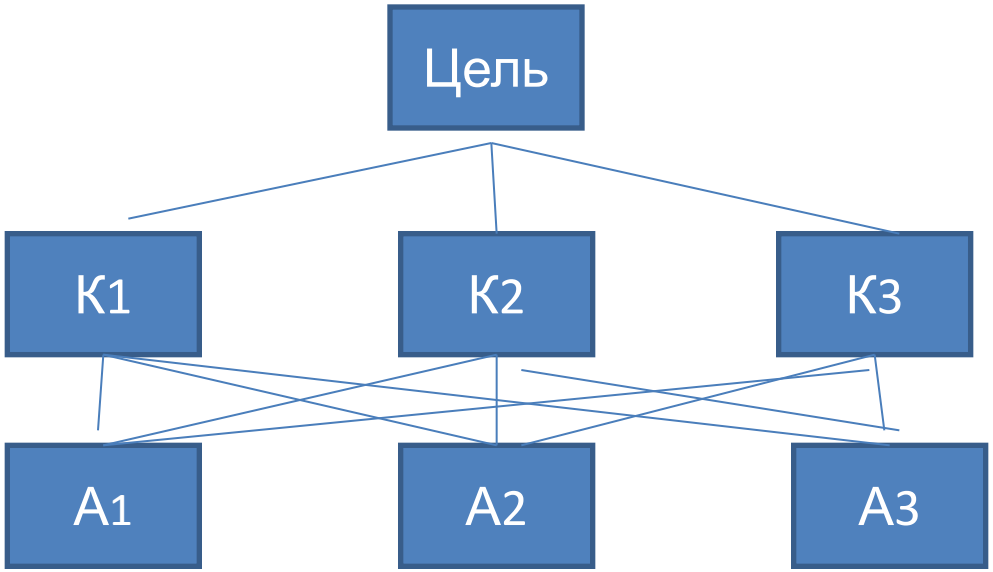
ПРИМЕР МЕТОДА МАИ

УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

- Цель – выбрать лучшую альтернативу из заданных трех А1,А2, А3.
- Каждая альтернатива оценивается по трем критериям К1, К2, К3.

ИЕРАРХИЯ ПРОБЛЕМЫ

- .



МАТРИЦА ПОПАРНОГО СРАВНЕНИЯ КРИТЕРИЕВ

Цель	К1	К2	К3
К1	1	3	7
К2	1/3	1	3
К3	1/7	1/3	1

ПРИОРИТЕТЫ КРИТЕРИЕВ

- Находим произведения элементов, находящихся в каждой строке:
  1-я строка $\omega_1 = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 7} = 2{,}759$; берутся корни 3-й степени (3- матрицы
  2-я строка $\omega_2 = \sqrt{1/3 \cdot 1 \cdot 3} = 1{,}0$; размерность матрицы)
  3-я строка $\omega_3 = \sqrt{1/7 \cdot 1/3 \cdot 1} = 0{,}362$.
  Проводим нормализацию полученных чисел.
  Для этого определяем нормирующий множитель r
  $r = 2{,}759 + 1{,}0 + 0{,}362 = 4{,}121$.
  Вектор приоритетов
  $q_{21} = \omega_1/r = 2{,}759/4{,}121 = 0{,}6697$;
  $q_{22} = \omega_2/r = 1{,}000/4{,}121 = 0{,}243$;
  $q_{23} = \omega_3/r = 0{,}362/4{,}121 = 0{,}088$.
  Числа q_{21}, q_{22} и q_{23} являются компонентами вектора приоритетов критериев К1, К2 и К3 соответственно
  $\mathbf{q}_2 = (0.,67; 0{,}243; 0{,}088)$.

ПРОВЕРКА СОГЛАСОВАННОСТИ

- Вычисляем:
- $s_1 = 1+ 1/3 + 1/7 = 31/21$; $p_1 = s_1 \cdot q_{21} = 31/21 \cdot 0{,}669 = 0{,}988$;

  $s_2 = 3 +1 + 1/3 = 13/3$; $p_2 = s_2 \cdot q_{22} = 13/3 \cdot 0{,}243 = 1{,}051$;

  $s_3 = 7 + 3 + 1 = 11$; $p_3 = s_3 \cdot q_{23} = 11 \cdot 0{,}088 = 0{,}967$.
  $З_{max} = p_1+p_2+p_3 = 0{,}988 + 1{,}051 + 0{,}967 = 3{,}006$;

  $ИС = (З_{max} - n)/(n - 1) = (3{,}006 - 3)/(3 -1) = 0{,}003$;

  $ОС = ИС/СИ = 0{,}003/0{,}58 = 0{,}005 < 0{,}1$

  Суждения экспертов согласованы.

МАТРИЦА ПОПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ И ПРИОРИТЕТЫ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К1

К1	А1	А2	А3	Приоритет
А1	1	1/3	7	0,3
А2	3	1	7	0,65
А3	1/7	1/7	1	0,06
				ОС=0,120

МАТРИЦА ПОПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ И ПРИОРИТЕТЫ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К2

К1	А1	А2	А3	Приоритет
А1	1	1/3	7	0,58
А2	3	1	7	0,35
А3	1/7	1/7	1	0,07
				ОС=0,03

МАТРИЦА ПОПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ И ПРИОРИТЕТЫ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К3

К3	А1	А2	А3	Приоритет
А1	1	2	7	0,67
А2	1/2	1	6	0,23
А3	1/7	1/6	1	0,10
				ОС=0,07

ПРИОРИТЕТЫ АЛЬТЕРНАТИВ

- $q_1 = q_{311} \cdot q_{21} + q_{321} \cdot q_{22} + q_{331} \cdot q_{23} = 0{,}30 \cdot 0{,}67 + 0{,}58 \cdot 0{,}24 + 0{,}67 \cdot 0{,}09 = 0{,}40$;

  $q_2 = q_{312} \cdot q_{21} + q_{322} \cdot q_{22} + q_{332} \cdot q_{23} = 0{,}63 \cdot 0{,}67 + 0{,}35 \cdot 0{,}24 + 0{,}23 \cdot 0{,}09 = 0{,}53$;

  $q_3 = q_{313} \cdot q_{21} + q_{322} \cdot q_{22} + q_{333} \cdot q_{23} = 0{,}06 \cdot 0{,}67 + 0{,}07 \cdot 0{,}24 + 0{,}10 \cdot 0{,}09 = 0{,}07$.
- альтернатива А1 - приоритет равен 0,40;

  альтернатива А2 - приоритет равен 0,53;

  альтернатива А3 - приоритет равен 0,07.
- Лучшая альтернатива А2

ЗАДАЧА НА ДОМ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- Нужно произвести выбор секретаря из девушек, подавших резюме. Отбор девушек происходит по пяти критериям:
- 1. Знание делопроизводства.
  2. Внешний вид.
  3. Знание английского языка.
  4. Знание компьютера.
  5. Умение разговаривать по телефону.
- Собеседование прошли четыре девушки.
  1. 1. Ольга. 2. Елена. 3. Светлана. 4. Жанна
- После собеседования получились следующее описание девушек:

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (продолжение)

- **1. Ольга.** Приятная внешность. Отличное знание английского языка. Хорошее знание делопроизводства. Нет навыков работы на компьютере, посредственное общение по телефону.
- **2. Елена.** Красивая, приятная внешность, хорошее умение общаться по телефону. Незнание английского языка, нет навыков работы на компьютере, делопроизводство знает весьма плохо.
  3. Светлана. Очень хорошее знание делопроизводства, хорошие навыки работы на компьютере, достаточно хорошо общается по телефону. Не очень приятная внешность, посредственное знание английского языка.
  4. Жанна. Приятная внешность, неплохие навыки работы на компьютере, достаточно хорошее знание английского языка. По телефону общается плохо, не знает делопроизводство.

МАТРИЦА ПОПАРНОГО СРАВНЕНИЯ КРИТЕРИЕВ

Критерии	К1	К2	К3	К4	К5
Внешность (К1)	1				
Язык (К2)	5	1			
Делопроизводство (К3)	5	3	1		2
Компьютер (К4)	6	3	2	1	2
Телефон (К5)	6	3			1

ПОПАРНЫЕ СРАВНЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К1

К1	А1	А2	А3	А4
Ольга (А1)	1		5	
Елена (А2)	4	1	6	2
Светлана (А3)			1	
Жанна (А4)	4		5	1

ПОПАРНЫЕ СРАВНЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К2

К2	А1	А2	А3	А4
А1	1	9	7	3
А2		1		
А3		3	1	
А4		7	5	1

ПОПАРНЫЕ СРАВНЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К3

К3	А1	А2	А3	А4
А1	1	5		7
А2		1		4
А3	3	7	1	9
А4				1

ПОПАРНЫЕ СРАВНЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К4

К4	А1	А2	А3	А4
А1	1			
А2	3	1		
А3	9	7	1	4
А4	8	5		1

ПОПАРНЫЕ СРАВНЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КРИТЕРИЮ К5

К5	А1	А2	А3	А4
А1	1			3
А2	4	1	2	6
А3	2		1	5
А4				1