

«Системы счисления»

Система счисления – это способ записи чисел с помощью специальных знаков (цифр).

$\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ – 10 цифр
(десятичная система счисления)

$\{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$ – 16 цифр
шестнадцатеричная система счисл.

Основание с.с.(q) это число цифр
используемых для записи числа.

В информатике используют с.с.
с основанием $k=2, 8, 10, 16$

Пример 1: 56 – 5 десятков, 6 единиц,
65 - 6 десятков, 5 единиц.

Пример 2: Разложение числа 35748

$$\begin{aligned} 35748 &= 3 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 = \\ &= 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Виды систем счисления



позиционная

значение каждой
цифры (ее вес)
изменяется в
зависимости от ее
положения (позиции) в
последовательности
цифр, изображающих
число (56_{10})

непозиционная

римская
алфавит: I, V, X, L,
C, D, M

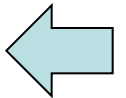
Например,

$$MMIV = 1000 + 1000 + (5 - 1)$$

$I=1; V=5; X=10, L=50;$
 $C=100; D=500; M=1000.$

1988=MCMXXCVIII

1958=MCMLVIII



Существует ли какая-либо другая позиционная система счисления, отличная от десятичной?

Примеры:

Троичная. Ее алфавит: 0, 1, 2

Пятиричная. Ее алфавит: 0, 1, 2, 3, 4

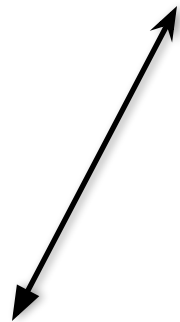
Одиннадцатиричная: 0, 1, 2, ..., 9, A

или 0, 1, 2, ..., 9, 

или 0, 1, 2, ..., 9, 



Будем рассматривать позиционные системы счисления (с.с.) в которых вес цифры зависит от ее позиции в числе.

$$n; n-1; \dots; 2; 1; 0 \downarrow -1; -2; \dots; -m$$



Место q -ичной запятой

В старину на Руси широко применялась система счисления отдаленно напоминающая римскую. С ее помощью сборщики податей заполняли квитанции об уплате податей. Для записи чисел употреблялись следующие знаки:

 - тысяча рублей,  - десять рублей,

 сто рублей, X – один рубль,

IIIIIIII – десять копеек, I – одна копейка.

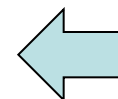
А какая система счисления лучше?

Какие системы счисления используют специалисты для общения с компьютером?

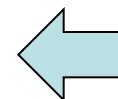
Почему люди пользуются десятичной системой, а компьютеры – двоичной?

Почему в компьютерах используются также восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления?

- **двоичная** (используются цифры 0, 1)
- **восьмеричная** (используются цифры 0, 1, ..., 7)
- **шестнадцатеричная**
(для первых целых чисел от 0 до 9 используются цифры 0, 1, ..., 9, а для следующих чисел – от десяти до пятнадцати – в качестве цифр используются символы A, B, C, D, E, F)



(10)	(16)	(8)	(2)	(10)	(16)	(8)	(2)
0	0	0	0	9	9	11	1001
1	1	1	1	10	A	12	1010
2	2	2	10	11	B	13	1011
3	3	3	11	12	C	14	1100
4	4	4	100	13	D	15	1101
5	5	5	101	14	E	16	1110
6	6	6	110	15	F	17	1111
7	7	7	111	16	10	20	10000
8	8	10	1000				



$$537, 1_8 = 101\ 011\ 111, 001_2 ; 1A3, F_{16} = 1\ 1010\ 0011, 1111_2$$

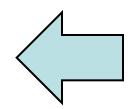
5 3 7 1 1 A 3 F

$$10101001, 10111_2 = 10\ 101\ 001, 101\ 110_2 = 251, 56_8$$

2 5 1 5 6

$$10101001, 10111_2 = 1010\ 1001, 1011\ 1000_2 = A9, B8_{16}$$

A 9 B 8

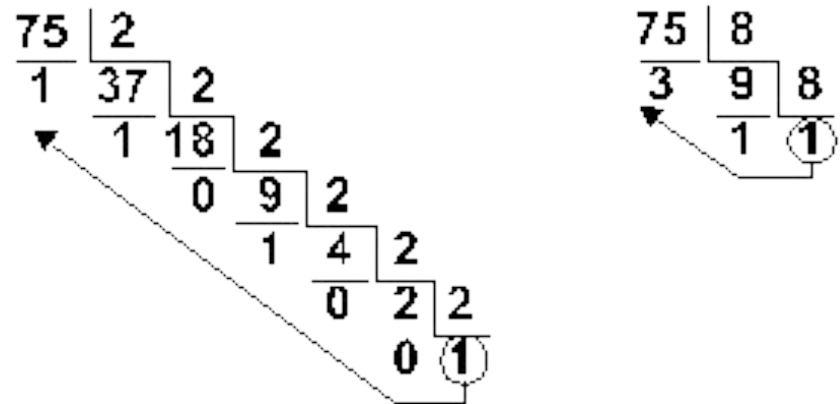


Цифры числа записывались, начиная с больших значений и заканчивая меньшими, слева направо. Если какого-либо разряда не было, то его пропускали. Интереснее всего записывались числа второго десятка: **ДІ - 14**. Дословно «четырнадцать» - «четыре на десять», т.е. не $10+4$, а $4+10$. И так для всех чисел от 11 до 19.

Как перевести целое число из десятичной системы в любую другую позиционную систему счисления?

При переводе целого десятичного числа в систему с основанием q его необходимо последовательно делить на q до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный $q-1$.

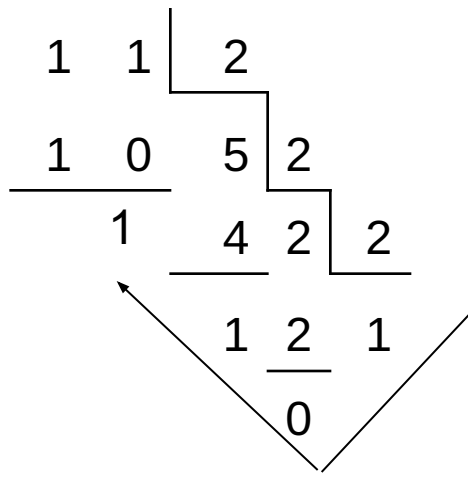
Число в системе с основанием q записывается как последовательность остатков от деления, записанных в обратном порядке, начиная с последнего.



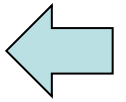
$$75_{10} = 1\ 001\ 011_2 = 113_8$$

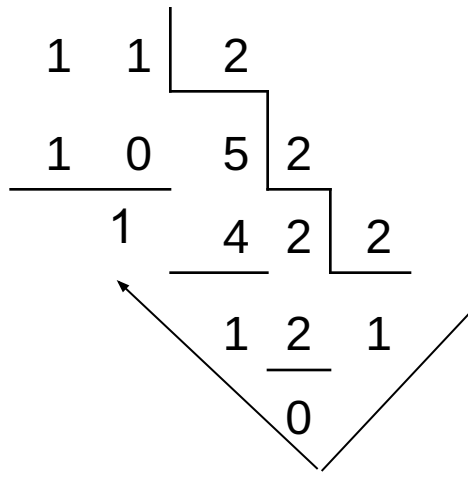
Задачи

Перевести числа 11, 89, 75 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную (восьмеричную и шестнадцатеричную - дома).

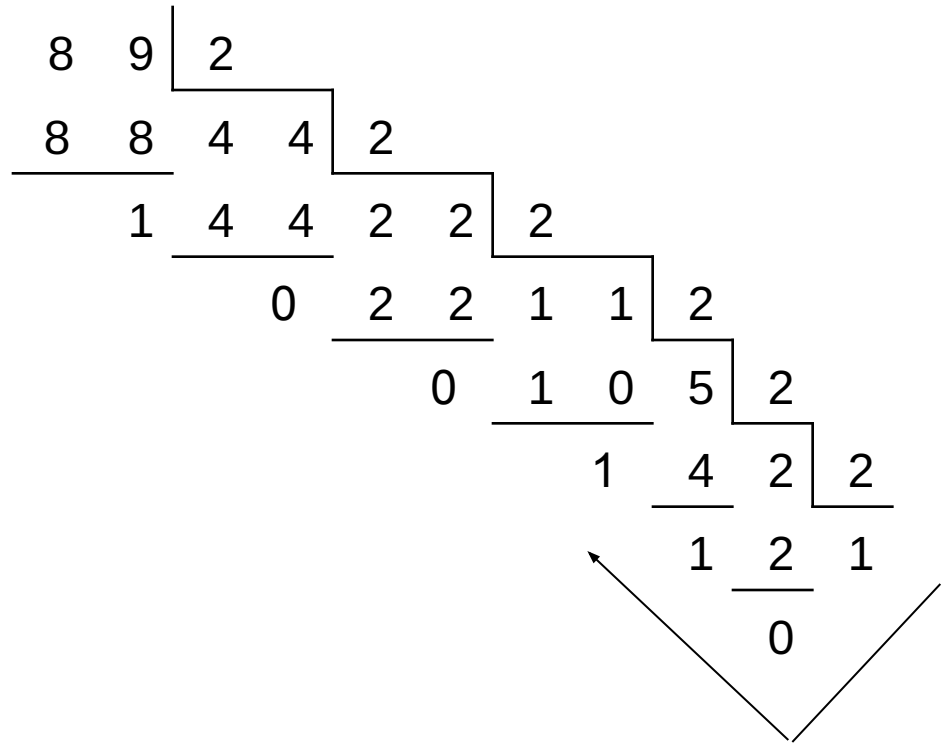


$$11_{10} = 1011_2$$

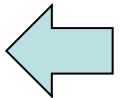


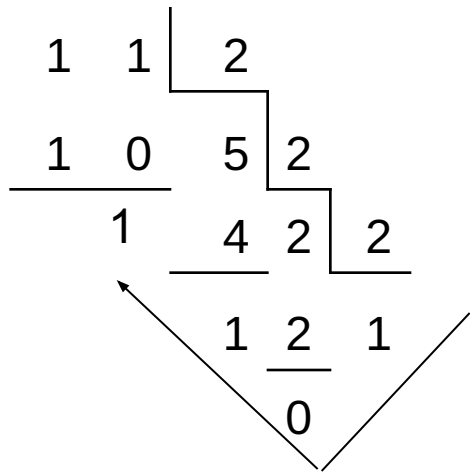


$$11_{10} = 1011_2$$

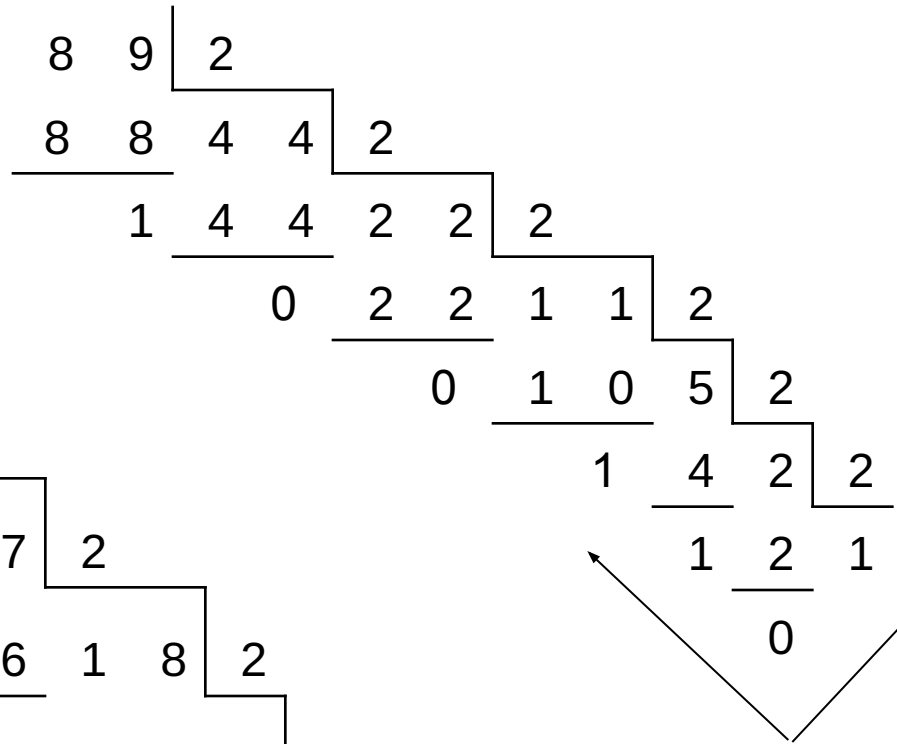


$$89_{10} = 1011001_2$$

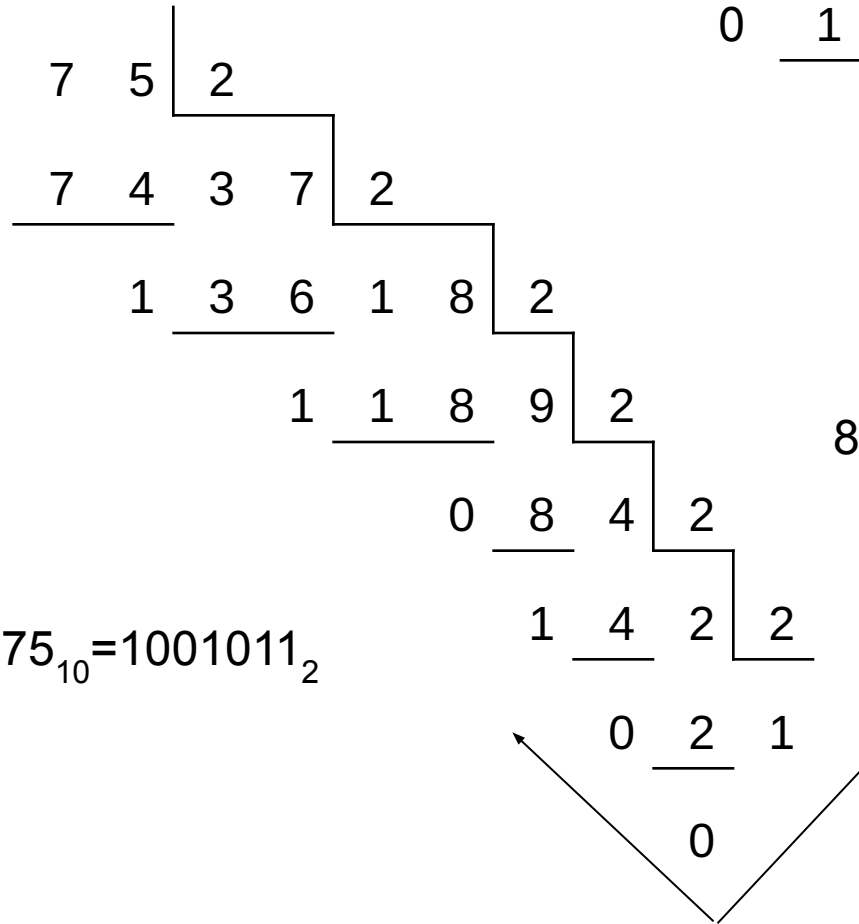




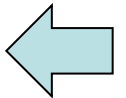
$$11_{10} = 1011_2$$



$$89_{10} = 1011001_2$$



$$75_{10} = 1001011_2$$



$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 & 8 \\ \hline & 8 & 1 \\ \hline & 3 & \end{array}$$

$$11_{10} = 13_8$$

$$\begin{array}{r|llll} 8 & 9 & 8 & & \\ \hline 8 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ \hline & 1 & 8 & 1 & \\ \hline & & 3 & & \end{array}$$

$$89_{10} = 131_8$$

$$\begin{array}{r|ll} 7 & 5 & 8 \\ \hline 7 & 2 & 9 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & 1 \\ \hline & & 1 & \end{array}$$

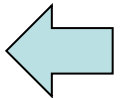
$$75_{10} = 113_8$$

$$\begin{array}{r|ll} 8 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 8 & 0 & 5 & \\ \hline & & 9 & \end{array}$$

$$89_{10} = 59_{16}$$

$$\begin{array}{r|ll} 7 & 5 & 1 & 6 \\ \hline 6 & 4 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & & \end{array}$$

$$75_{10} = 4B_{16}$$



Арифметические операции в позиционных системах счисления

Рассмотрим основные арифметические операции: *сложение, умножение*. Правила выполнения этих операций в десятичной системе хорошо известны — это *сложение и умножение столбиком*. Эти правила применимы и ко всем другим позиционным системам счисления. Только *таблицами сложения и умножения надо пользоваться особыми для каждой системы*.

Сложение

Таблицы сложения легко составить, используя Правило Счета.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Сложение в двоичной системе счисления

Задание. Сложить в двоичной системе счисления числа: 15 и 6.

Решение.

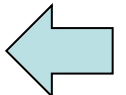
Решение

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 15 \\ + 6 \\ \hline 21 \end{array}$$

$5+6=11=10+1$
 $1+1=2$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1111 \\ + 0110 \\ \hline 10101 \end{array}$$

$1+0=1$
 $1+1=2=2+0$
 $1+1+1=3=2+1$
 $1+1=2=2+0$



Сложение в восьмеричной системе счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Задание. Сложить в восьмеричной системе счисления числа: 15 и 6.

Решение.

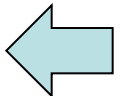
Решение

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 15 \\ \hline 6 \\ \hline 21 \end{array}$$

$5+6=11=10+1$
 $1+1=2$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ \hline 6 \\ \hline 25 \end{array}$$

$7+6=13=8+5$
 $1+1=2$



Умножение

Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел необходимо заимствовать из соответствующих рассматриваемой системе таблиц умножения и сложения.

Ввиду чрезвычайной простоты таблицы умножения в двоичной системе, умножение сводится лишь к сдвигам множимого и сложениям.

Умножение в двоичной и восьмеричной системах счисления

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Задание.
Перемножить
числа 5 и 6.

Решение.

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Решение

Десятичная: $5_{10} \cdot 6_{10}$

Двоичная: $101_2 \cdot 110_2$

Восьмеричная: $5_8 \cdot 6_8$

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 110 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11110 \end{array}$$

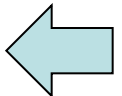
$$\begin{array}{r} \times 5 \\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ответ: $5 \cdot 6 = 30_{10} = 11110_2 = 36_8$.

Проверка. Преобразуем полученные произведения к десятичному виду:

$$11110_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30;$$

$$36_8 = 3 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 30.$$



Итоги

1. Определение системы счисления.
2. Виды систем счисления.
3. Удобство позиционной системы счисления.
4. Алфавит и основание позиционной системы счисления.
5. Разложение чисел в позиционной системе счисления.

Итоги

6. Системы счисления используемые специалистами для общения с компьютером.
7. Причины использования двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной систем счисления в компьютерах.
8. История систем счисления.
9. Правило перевода целого числа из десятичной системы в любую другую позиционную систему счисления.

Домашнее задание

§ 45

1. Перевести числа 11, 89, 75 из десятичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную.

2. Сложить и умножить двоичные числа:

1110_2 и 101_2 (проверить правильность своих действий).