НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Для студентов ФБФО

- Чертеж – международный язык общения техников.
- Начертательная геометрия – грамматика этого языка (чертежа).
- Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости, а также способы преобразования полученных изображений для упрощения решения различных инженерных задач.

Базовые геометрические элементы начертательной геометрии

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Нульмерный объект (не имеет измерений).
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек). Непрерывная последо-вательность положений точки, перемещаю-щейся в пространстве по определенному закону (траектории). Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное мно-жество точек. Непрерывная последователь-ность положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Измерения : длина,

Проективное пространство

Для устранения неоднородности Евклидова пространства

условно принято -

параллельные между собой прямые ***пересекаются*** *в бесконечно удаленной точке* F^{∞} *- несобственной точке пространства.*

$$(a \parallel b \parallel c\ldots) \Rightarrow (a \cap b \cap c\ldots = F^{\infty})$$

Евклидово пространство, дополненное несобственными элементами, называют проективным.

Метод проецирования

Метод проецирования

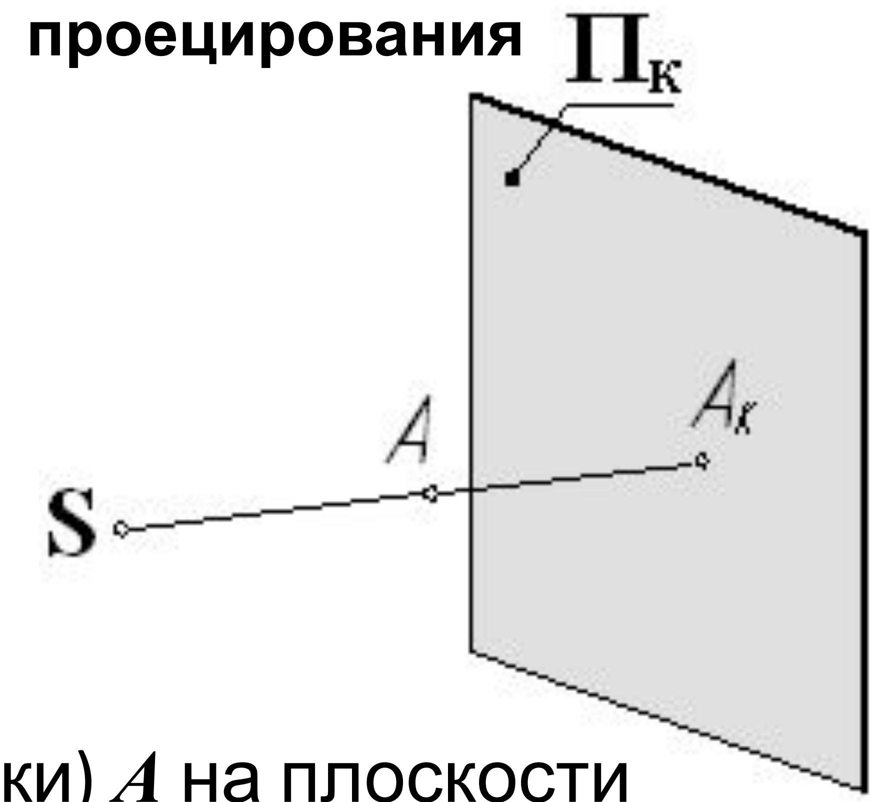
$П_к$ – плоскость проекций

S – центр проецирования

- Аппарат проецирования

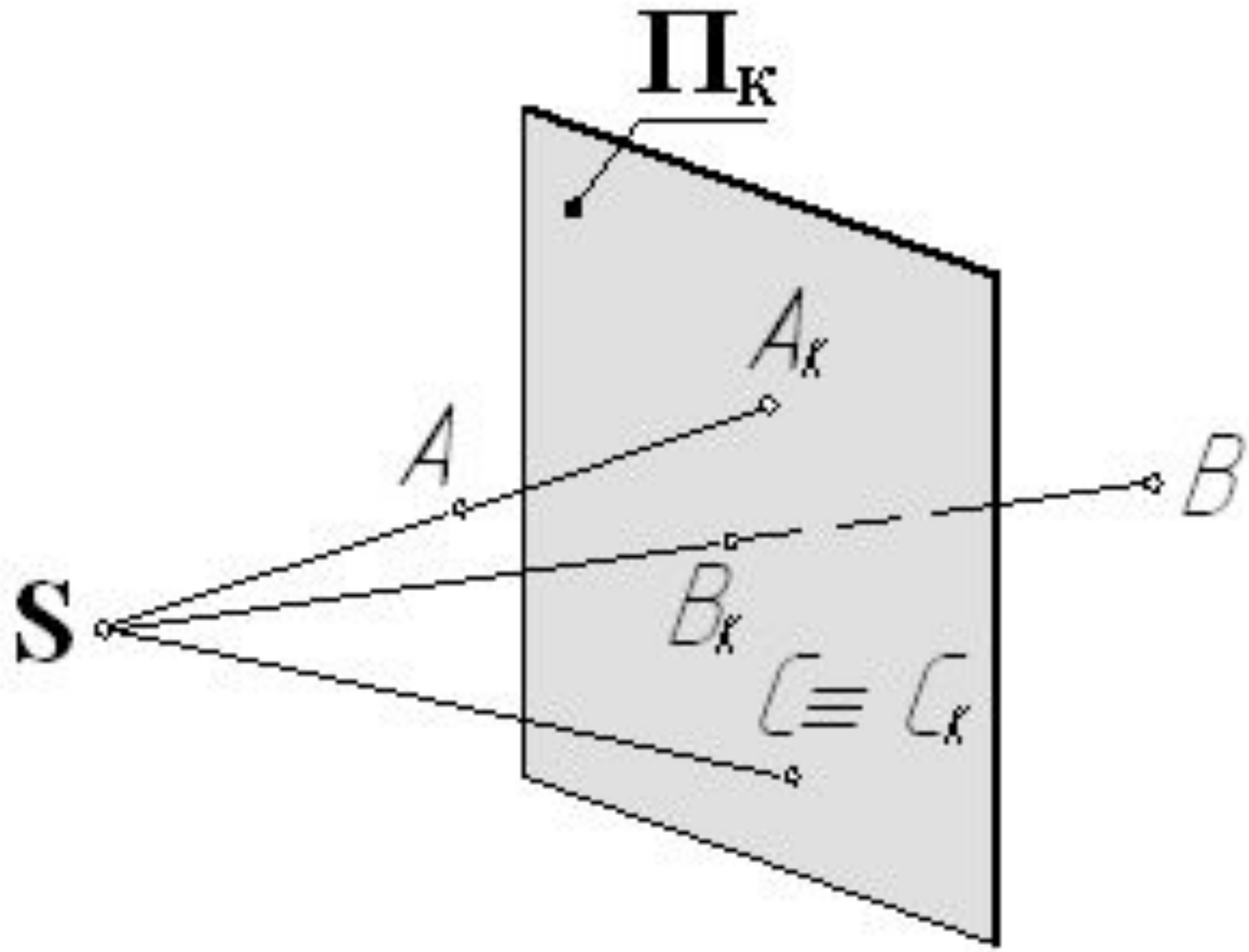
A – объект (точка)

SA – проецирующая прямая



$$SA \cap П_К = A_К$$

$A_К$ – проекция объекта (точки) *A* на плоскости проекций $П_к$



Для любой точки пространства

$$SA \cap П_к = A_к \quad SB \cap П_к = B_к \quad SC \cap П_к = C_к$$

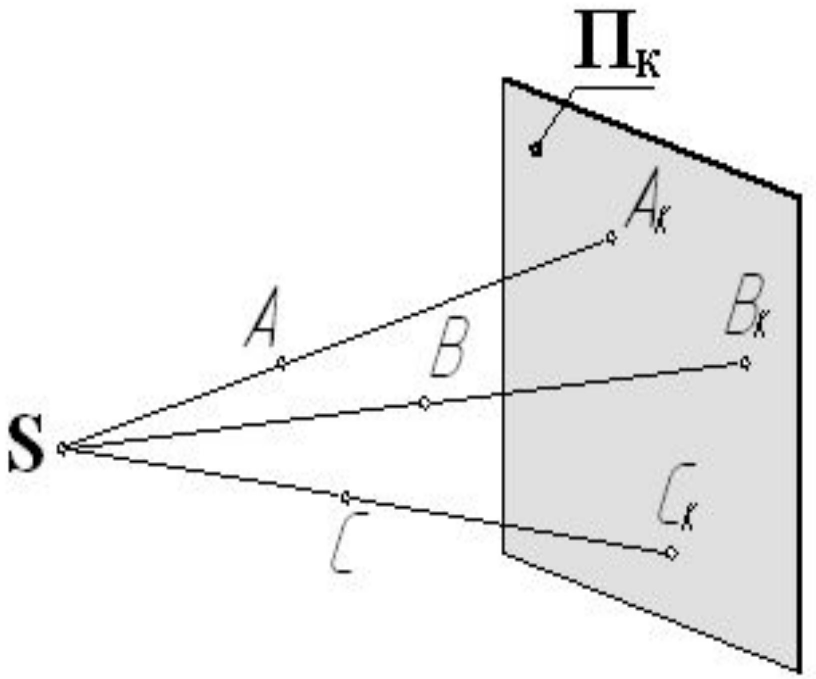
$$SA \cap SB \cap SC \cap \ldots = S$$

Варианты метода проецирования

Центральное проецирование (коническое)

S (*центр проецирования*) -– **<u>реальная точка</u>**.

$$SA \cap SB \cap SC \ldots = S$$

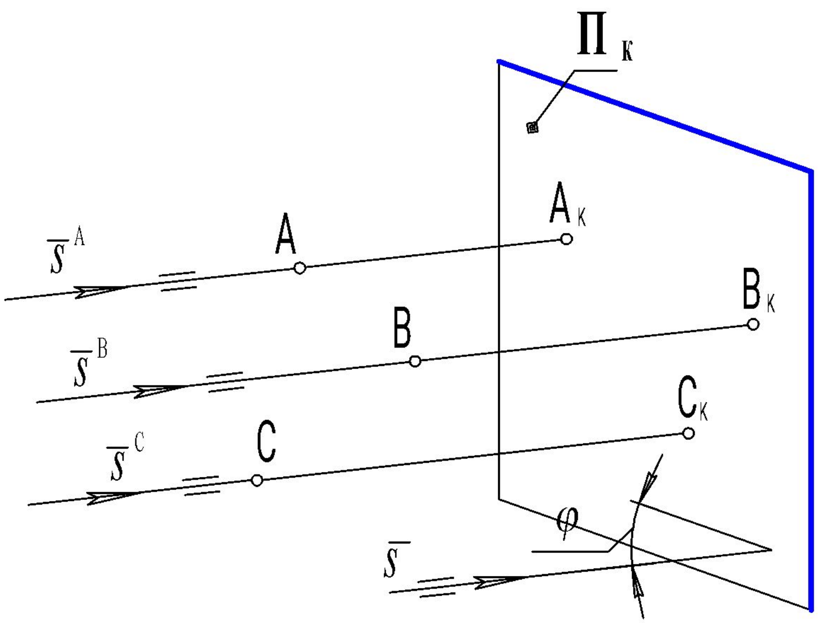


Параллельное проецирование
(цилиндрическое)

S *(центр проецирования)* – **<u>несобственная точка</u>**.

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{\infty}$$

$$\boldsymbol{SA} \cap \boldsymbol{SB} \cap \boldsymbol{SC} \ldots = \mathbf{S}^{\infty}$$

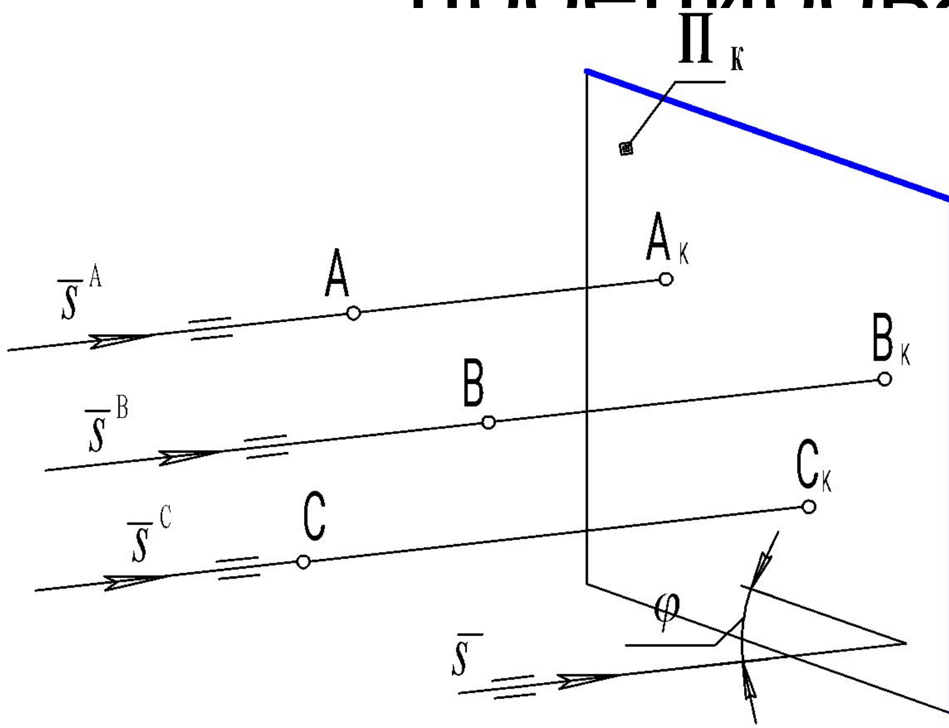


следовательно

$$\mathbf{S}^{\infty}\boldsymbol{A} \parallel \mathbf{S}^{\infty}\boldsymbol{B} \parallel \mathbf{S}^{\infty}\boldsymbol{C} \parallel \ldots \parallel \overline{\mathrm{s}}$$

$\overline{s}$ *– направление проецирования;* $\mathbf{S}^{\infty} \in \overline{s}$

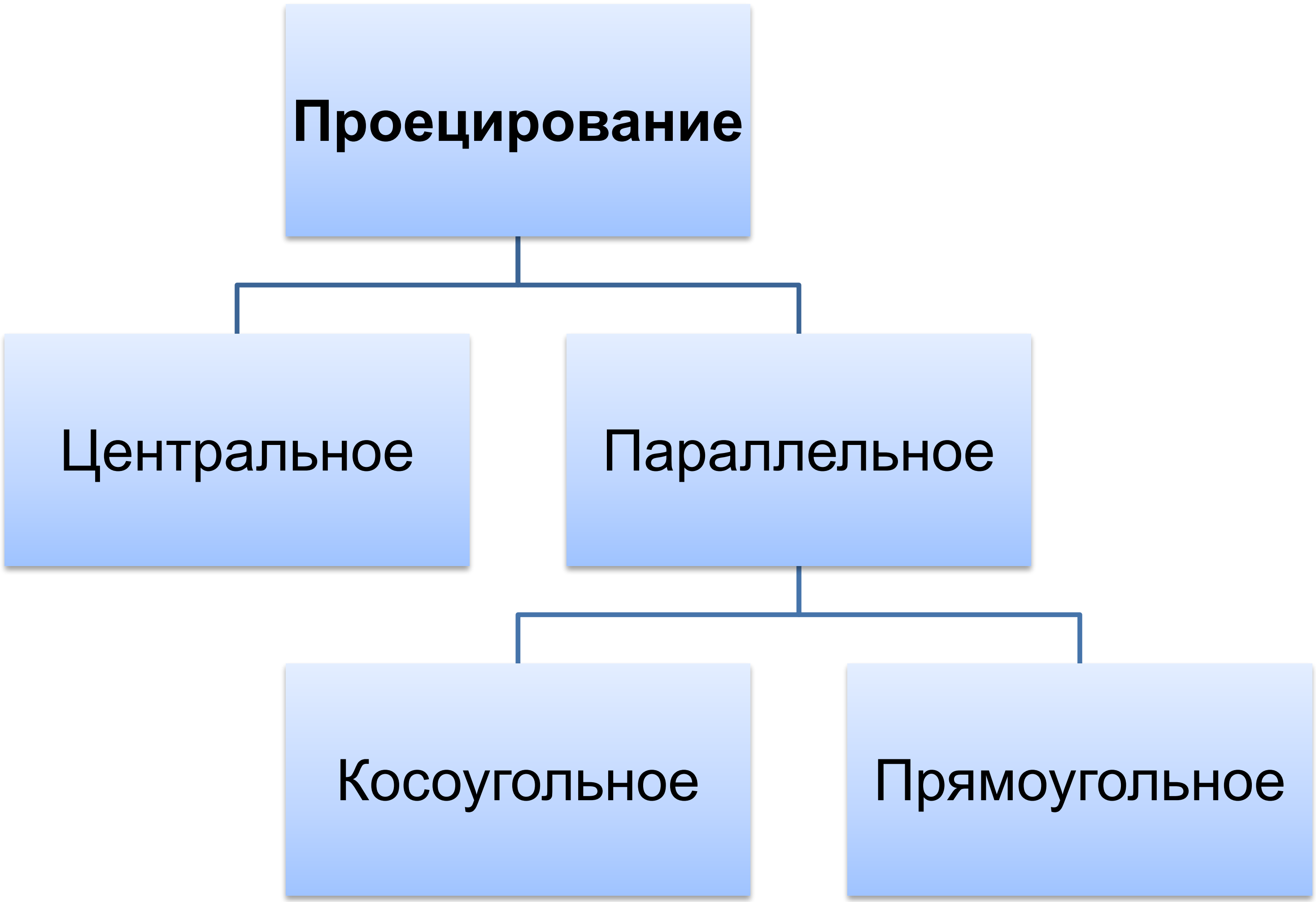
Виды параллельного проецирования



$(\bar{s}\wedge\Pi_к)=\angle\varphi$

$\angle\varphi=90^\circ \vee (\bar{s}\perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование прямоугольное (ортогональное)

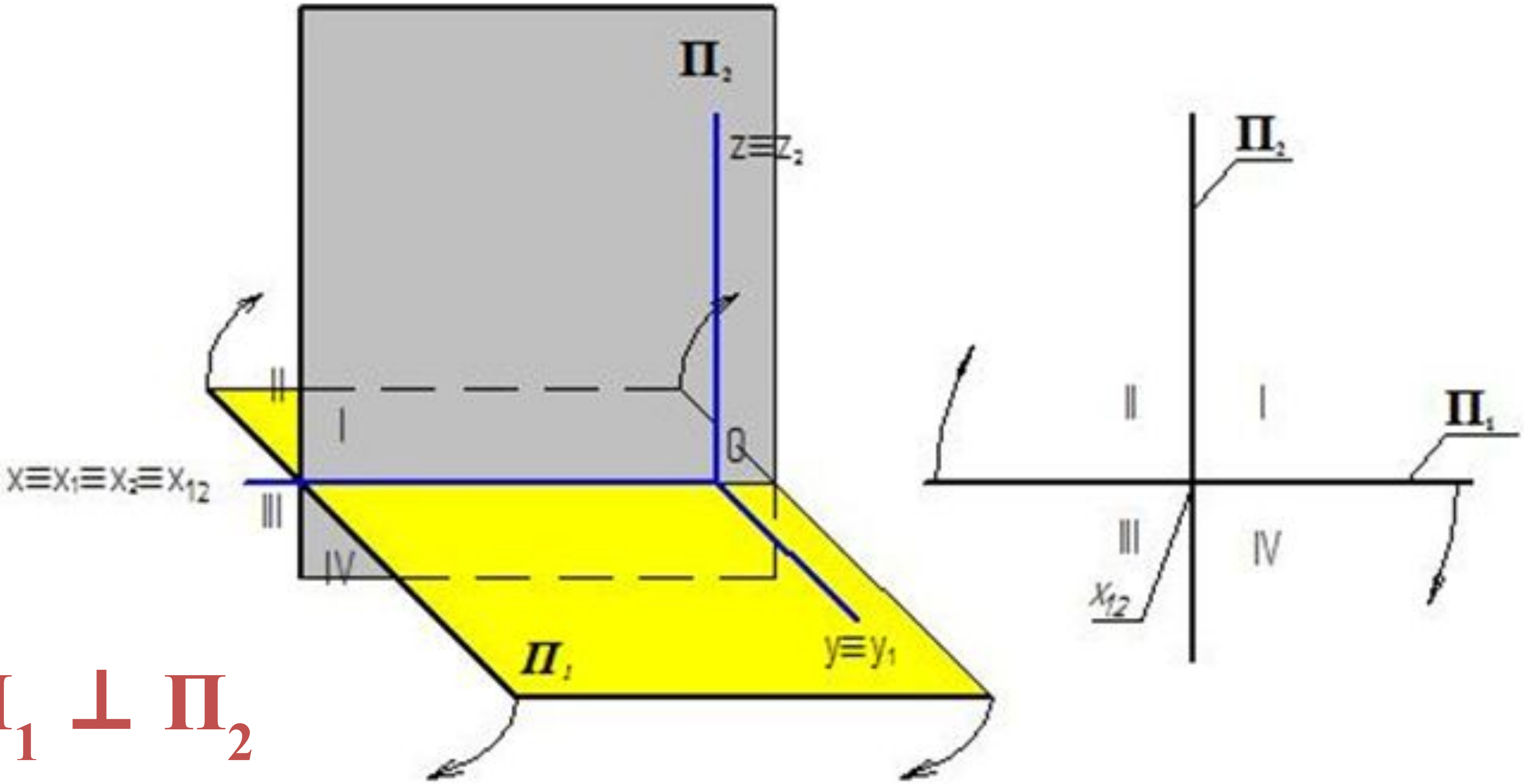
$\angle\varphi\neq90^\circ \vee (\bar{s}\not\perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование косоугольное


Проецирование
Центральное
Параллельное
Косоугольное
Прямоугольное

Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

Метод Монжа

Ортогональная система двух плоскостей проекций



$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

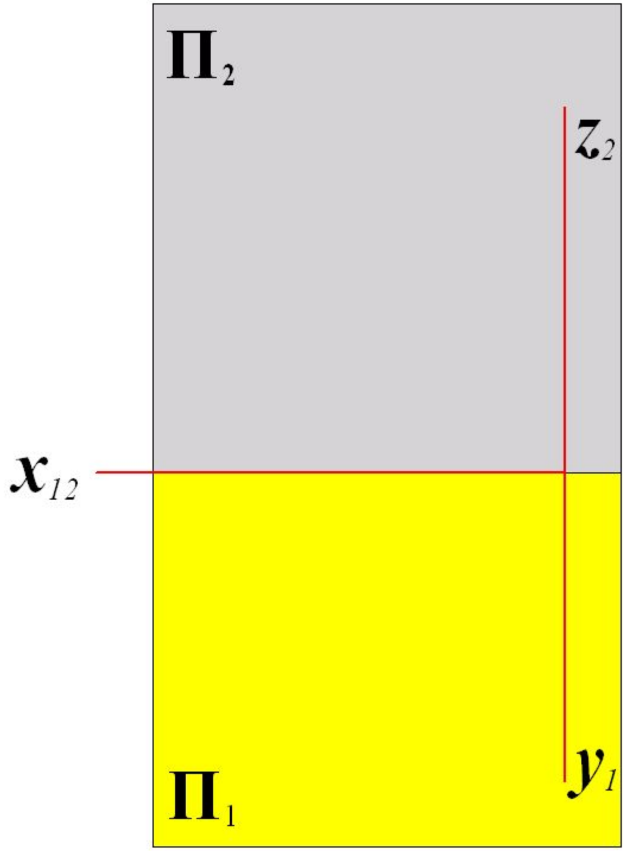
$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$$

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

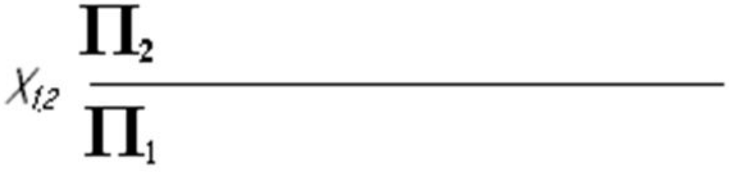
Π_2 – фронтальная плоскость проекций

I, II, III, IV – четверти пространства

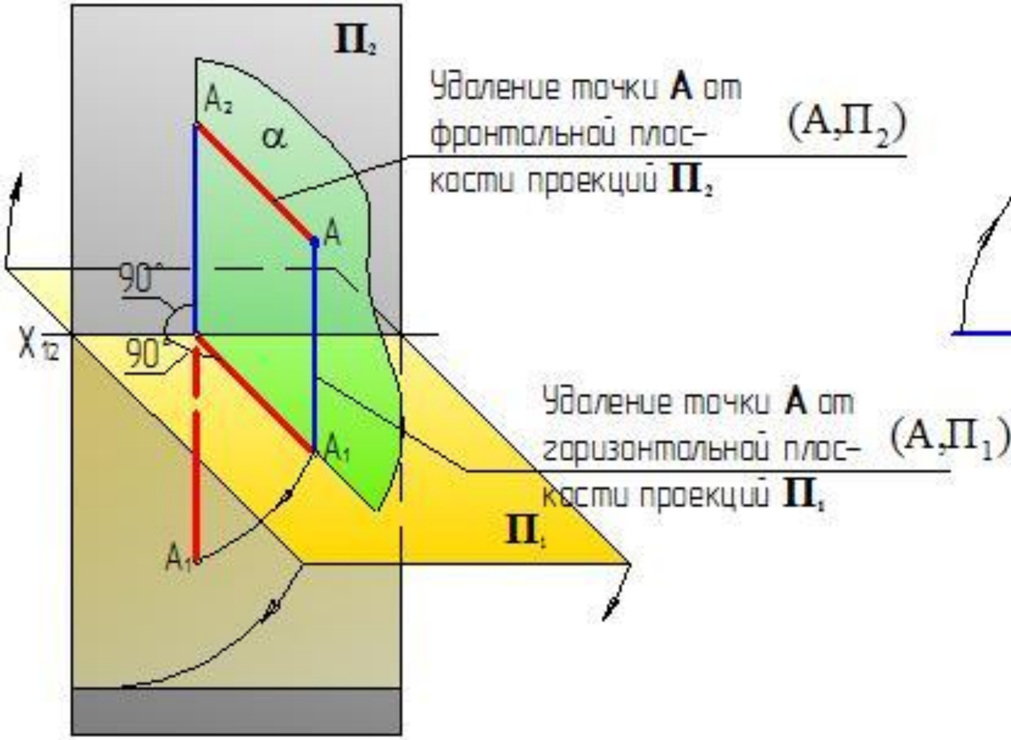
Плоскости проекций Π_1 и Π_2 совмещены в одну общую плоскость.

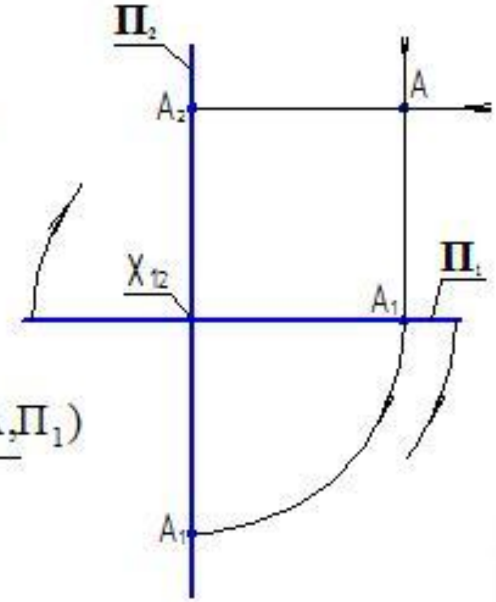


Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не показывают и координатные оси y и z также не показывают.

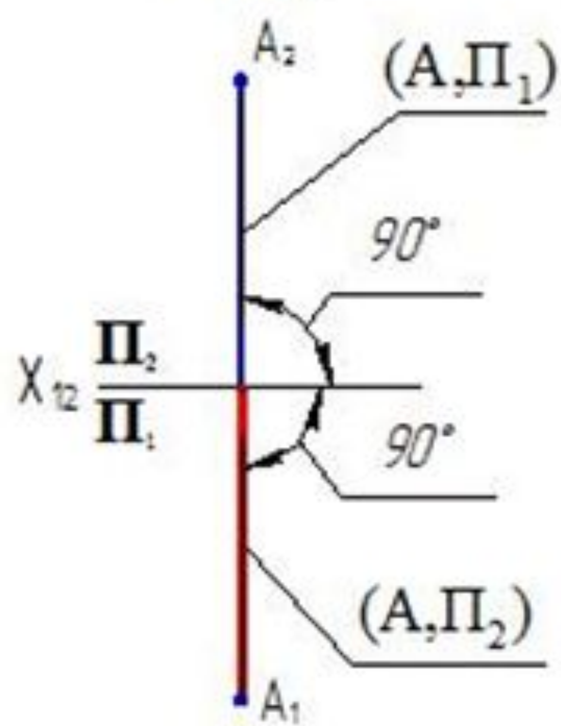


Проецирование точки





Эпюр



Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси x_{12}

$$A_1A_2 \perp x_{12}$$

Расстояние от оси x_{12} до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

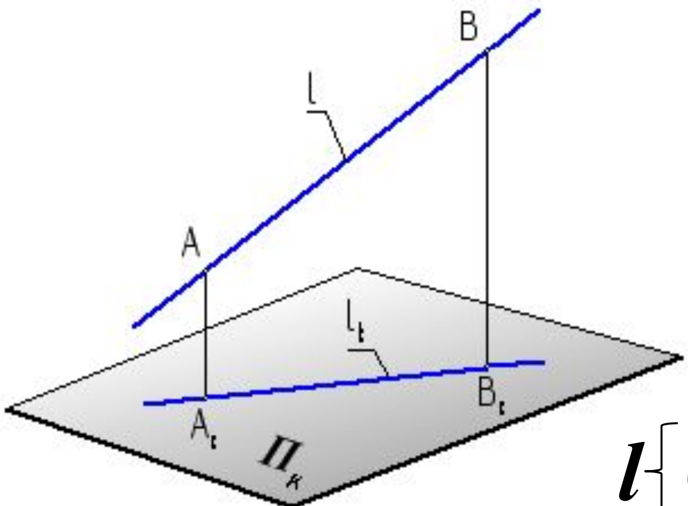
$(x_{12}, A_1) = (A, П_2)$ - ***глубина***

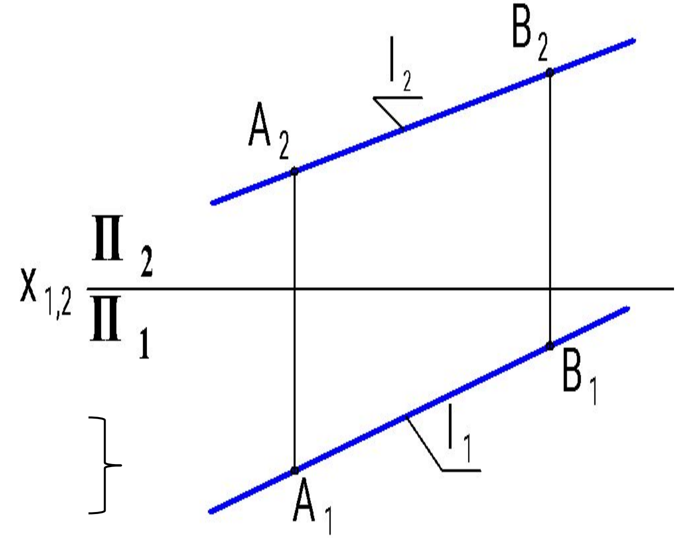
Расстояние от оси x_{12} до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

$(x_{12}, A_2) = (A, П_1)$ - ***высота***

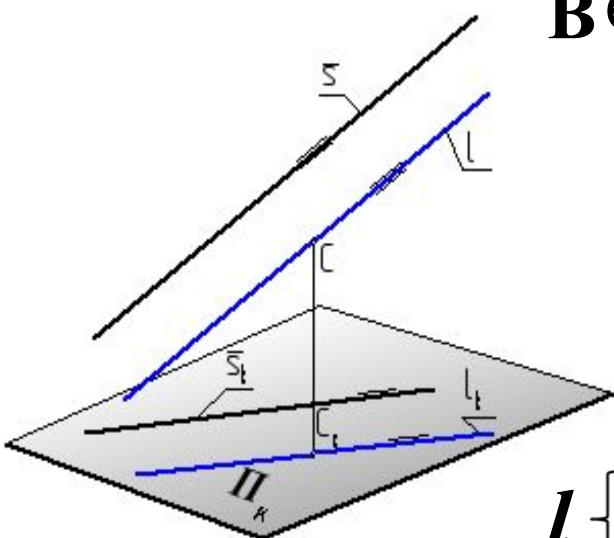
Проецирование прямой линии

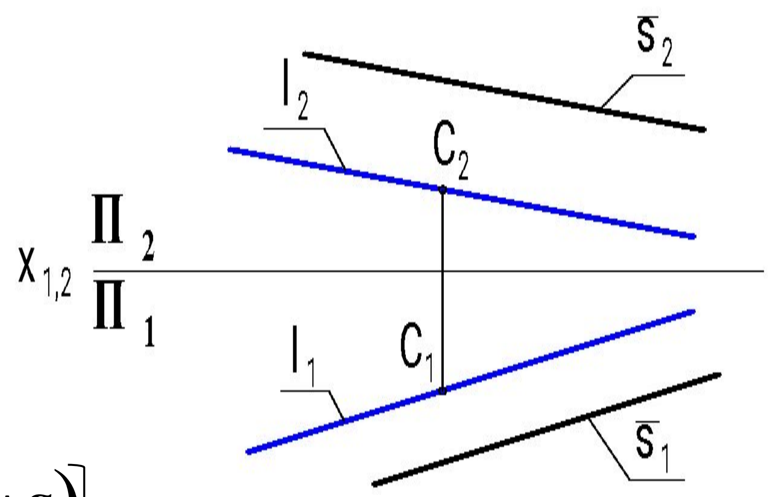
Способы задания прямой на эпюре





$$l\left\{(A,B)(A\in l;\ B\in l)\right\}$$





$$l\left\{(C,s)(C\in l;\ l\parallel s)\right\}$$

Положение прямой относительно плоскости проекций

Прямая
общего положения

$l \nparallel \Pi_k$ и $l \not\perp \Pi_k$

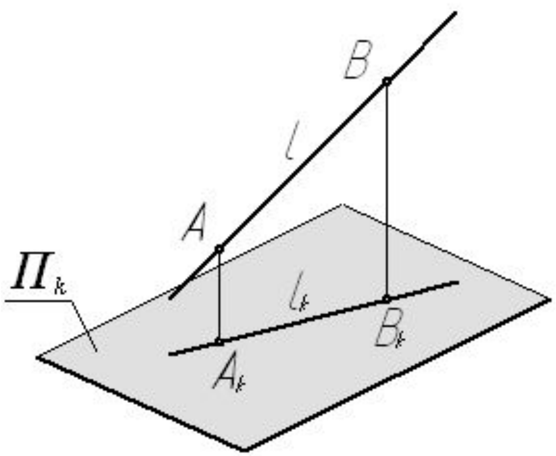
Прямые частного положения

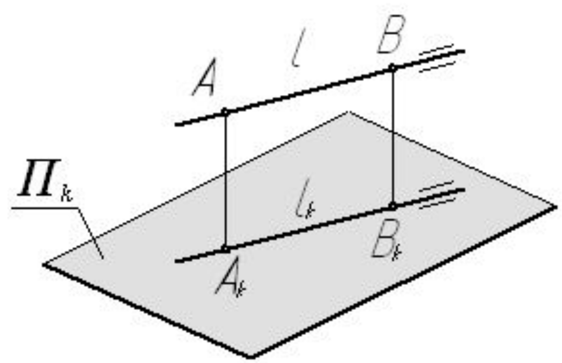
Прямая уровня

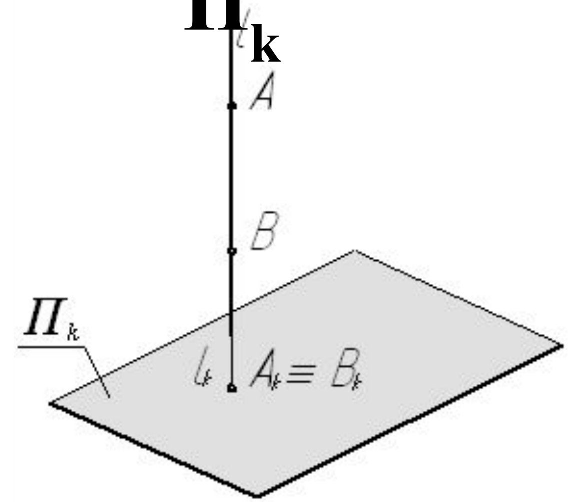
$l \parallel \Pi_k$

Проецирующая
прямая

$l \perp \Pi_k$

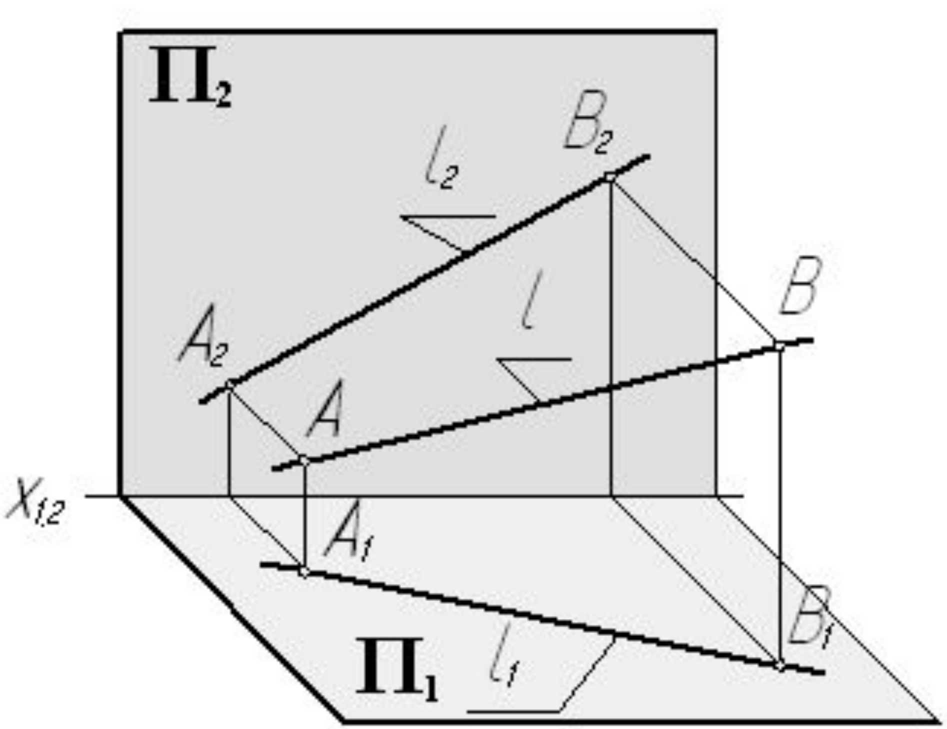


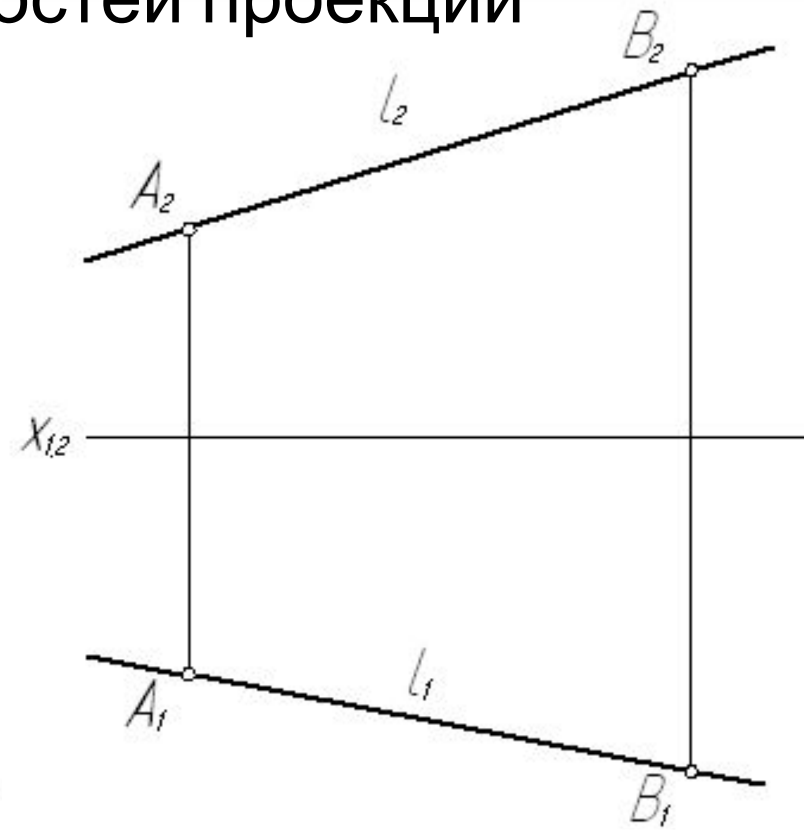




Прямая общего положения

Это прямая не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций





$l \nparallel \Pi_1$ и $l \nparallel \Pi_2$

$l \not\perp \Pi_1$ и $l \not\perp \Pi_2$

$l_1 \nparallel x_{1,2}$ и $l_2 \nparallel x_{1,2}$

$l_1 \not\perp x_{1,2}$ и $l_2 \not\perp x$

Характерная особенность эпюра прямой общего положения – **горизонтальная и фронтальная проекции прямой не параллельны и не перпендикулярны координатной оси x_{12}**

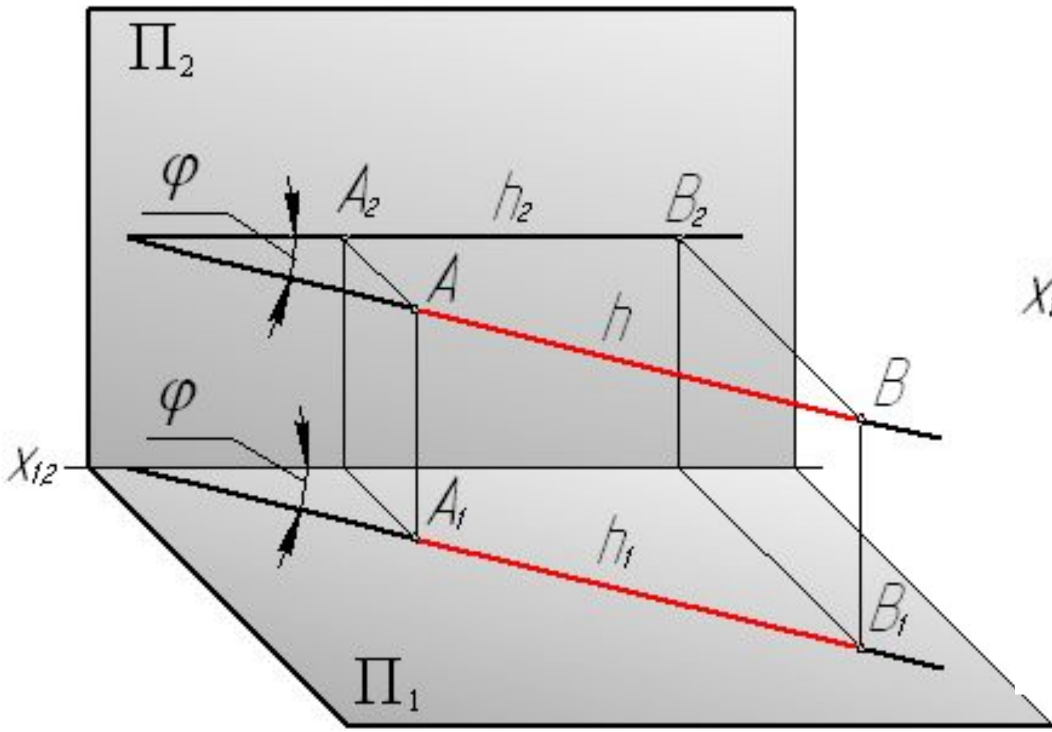
Прямые уровня

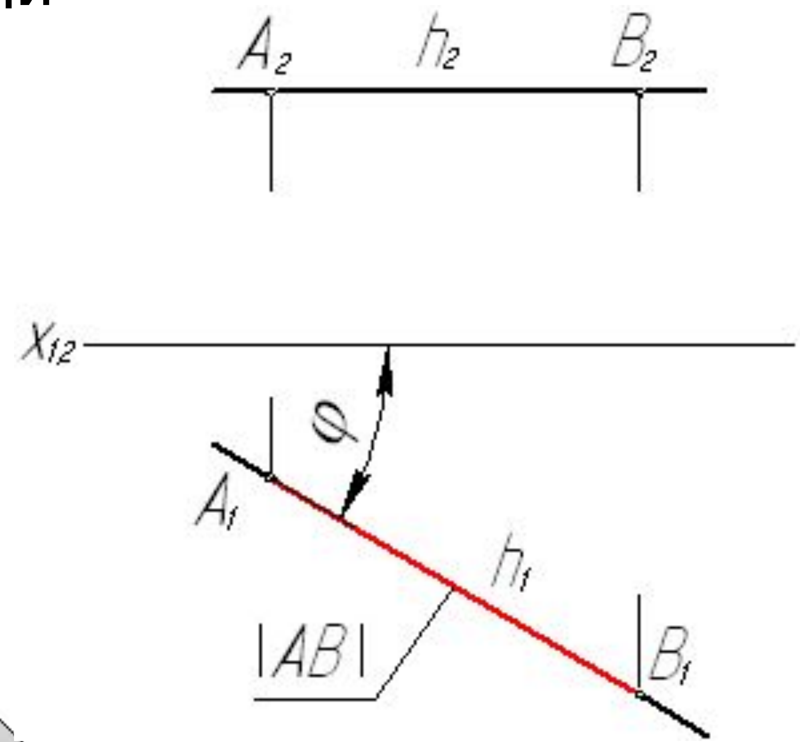
Это прямые параллельные какой-либо одной плоскости проекций

$$l \parallel \Pi_к$$

Горизонталь – *h*

Это прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций





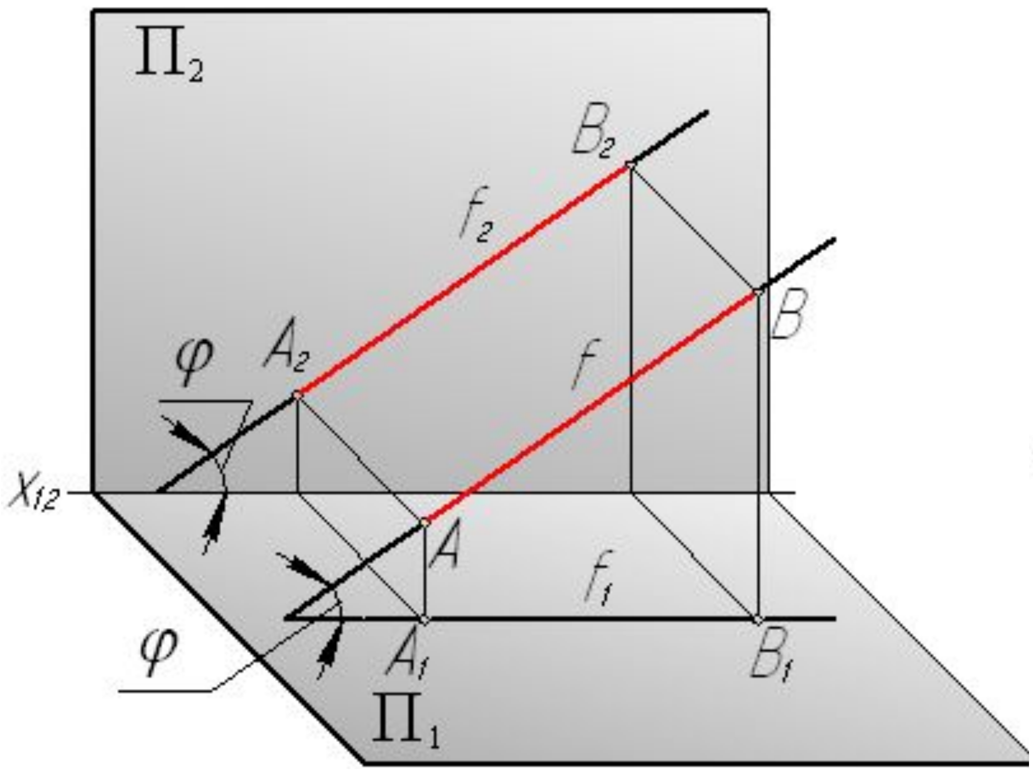
$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

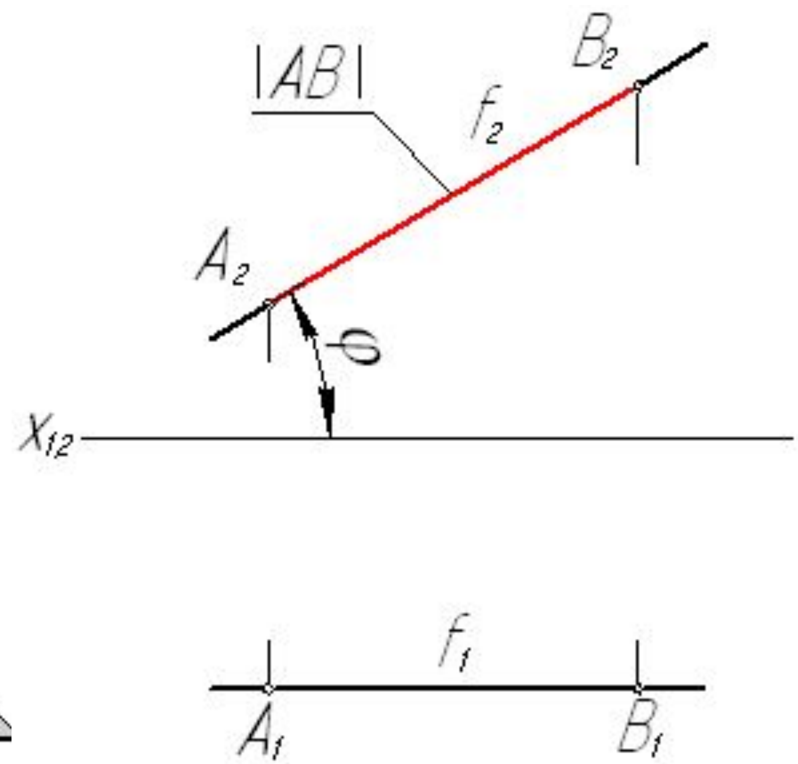
$AB \subset h \Rightarrow AB \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \cong |AB|$

$\angle\phi = h_1(A_1B_1)$ ^

Фронталь – f

Это прямая параллельная фронтальной плоскости проекций





$$f \parallel \Pi_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 \parallel x_{1,2}$$

$$AB \subset f \Rightarrow AB \parallel \Pi_2 \Rightarrow \quad A_2B_2 \cong |AB|$$

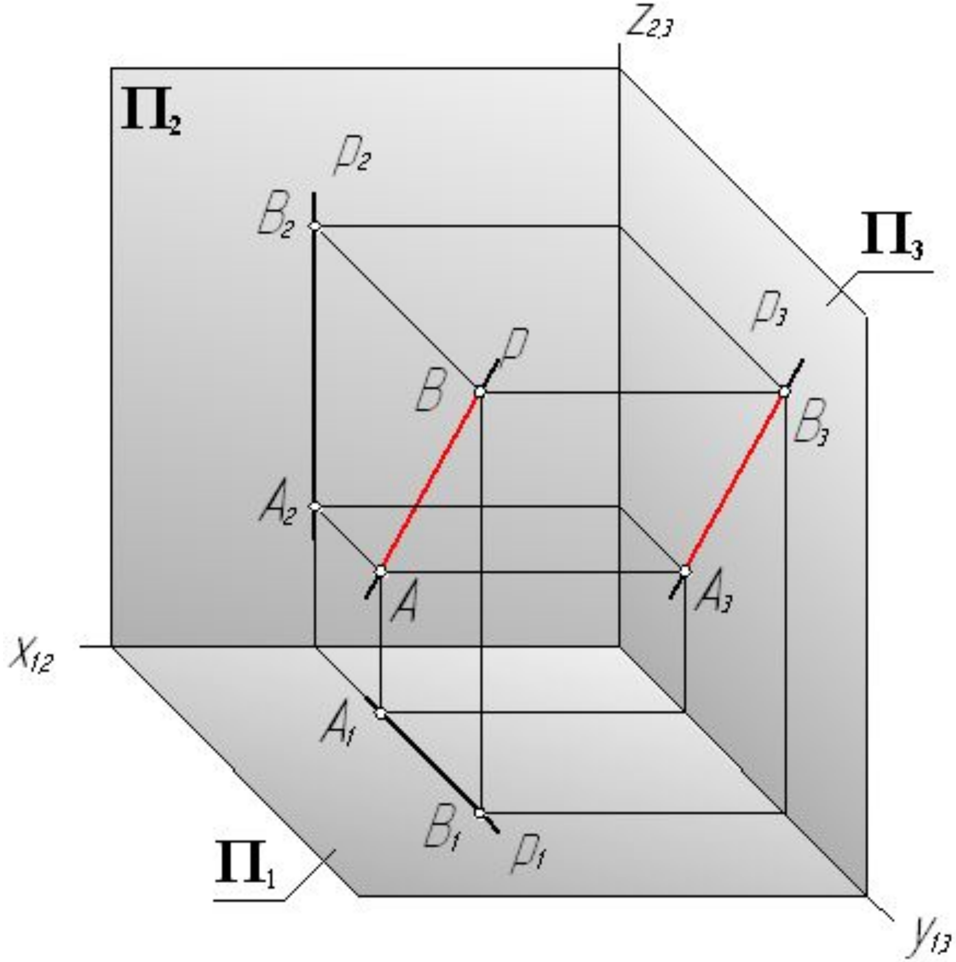
$$\angle\phi = f(AB)\wedge\Pi_1 \qquad \angle\phi = f_2(A_2B_2)\wedge x_{1,2}$$

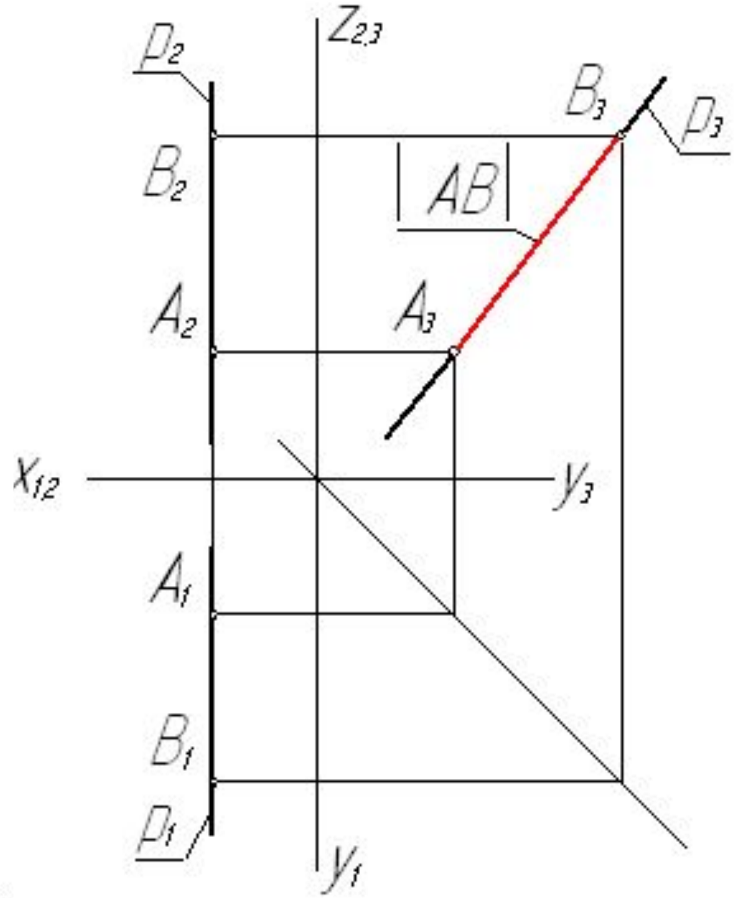
Характерная особенность эпюра горизонтали и фронтали –

одна из проекций параллельна координатной оси $x_{1,2}$

Профильная прямая - *p*

Это прямая параллельная профильной плоскости проекций Π_3





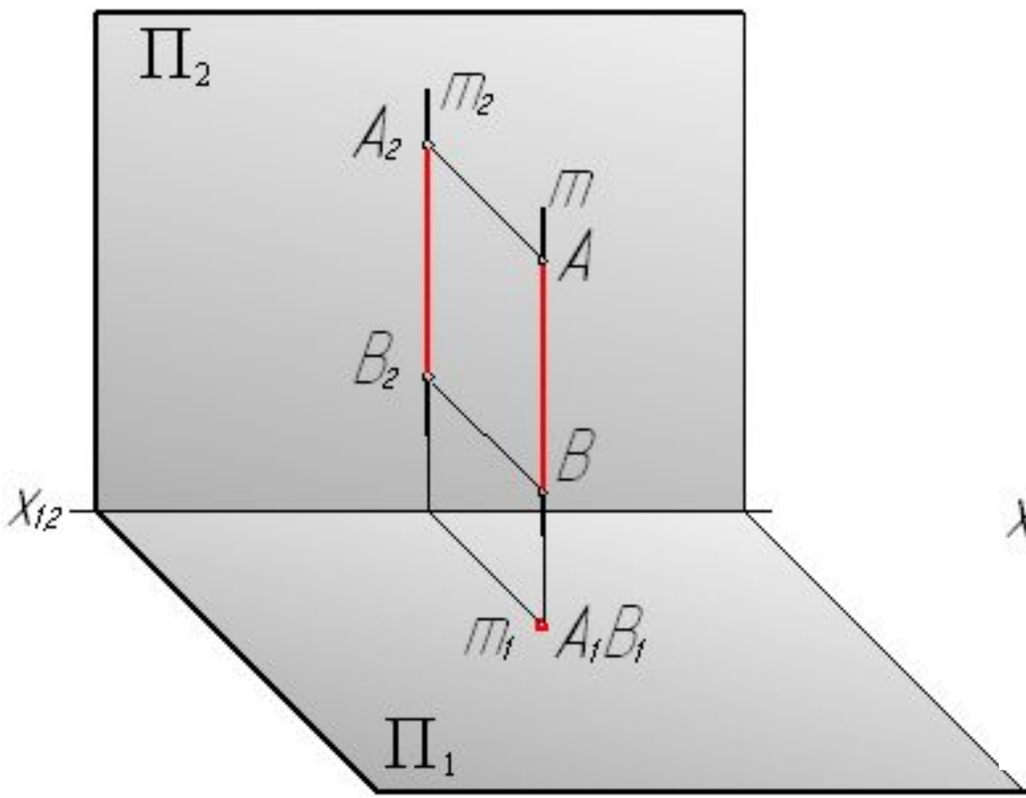
Проецирующие прямые

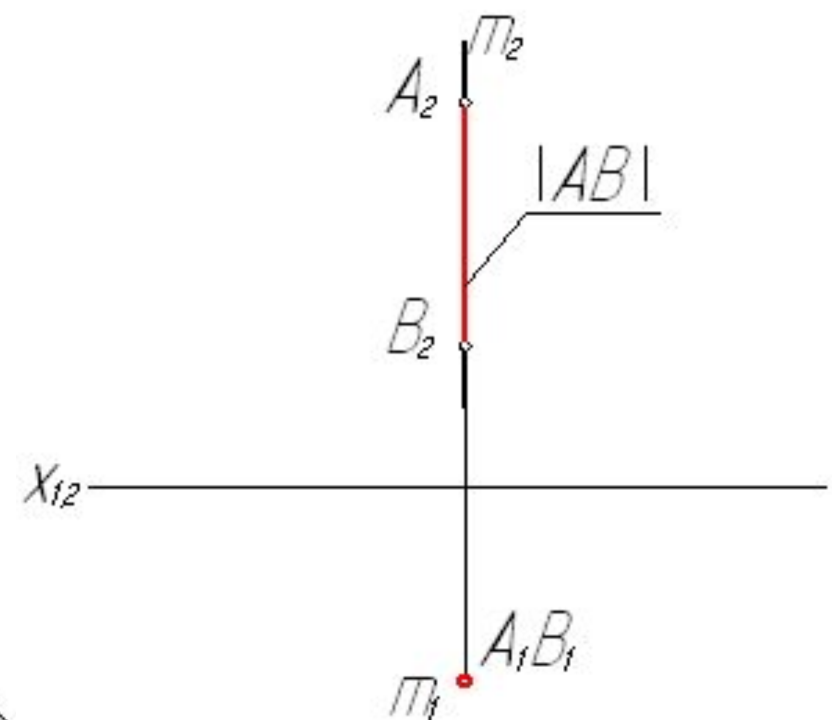
Это прямые перпендикулярные какой-либо одной плоскости проекций

$l \perp \Pi_к$

Горизонтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций





$\boldsymbol{m \perp \Pi_1 \wedge m \parallel \Pi_2}$

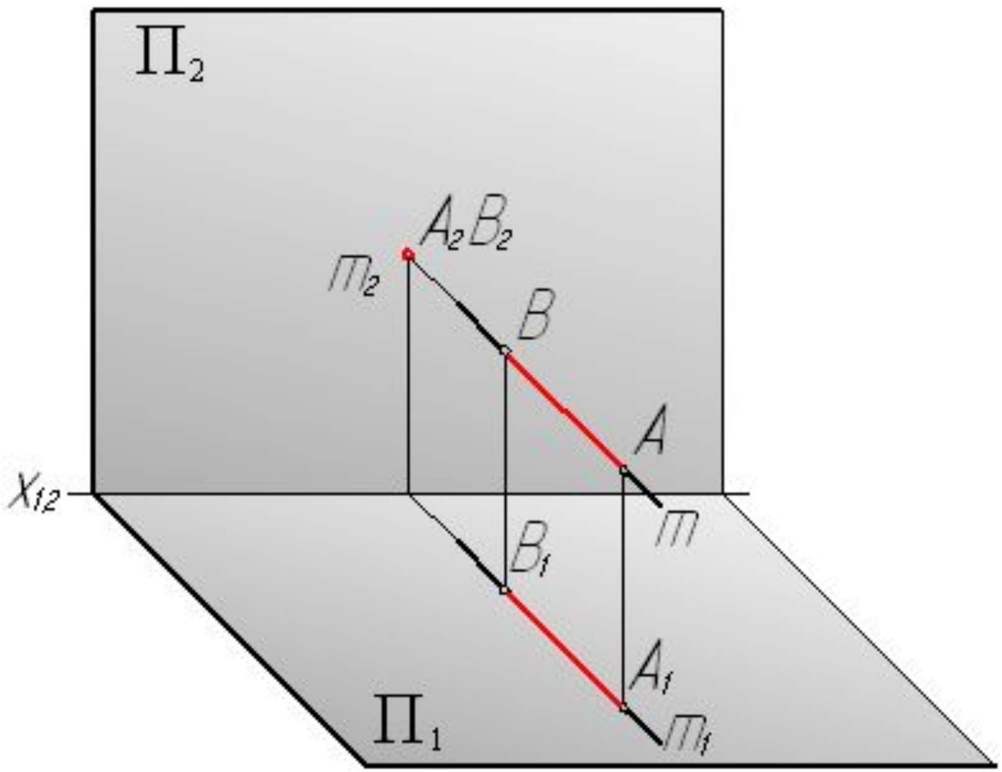
$\boldsymbol{AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \Pi_2}$

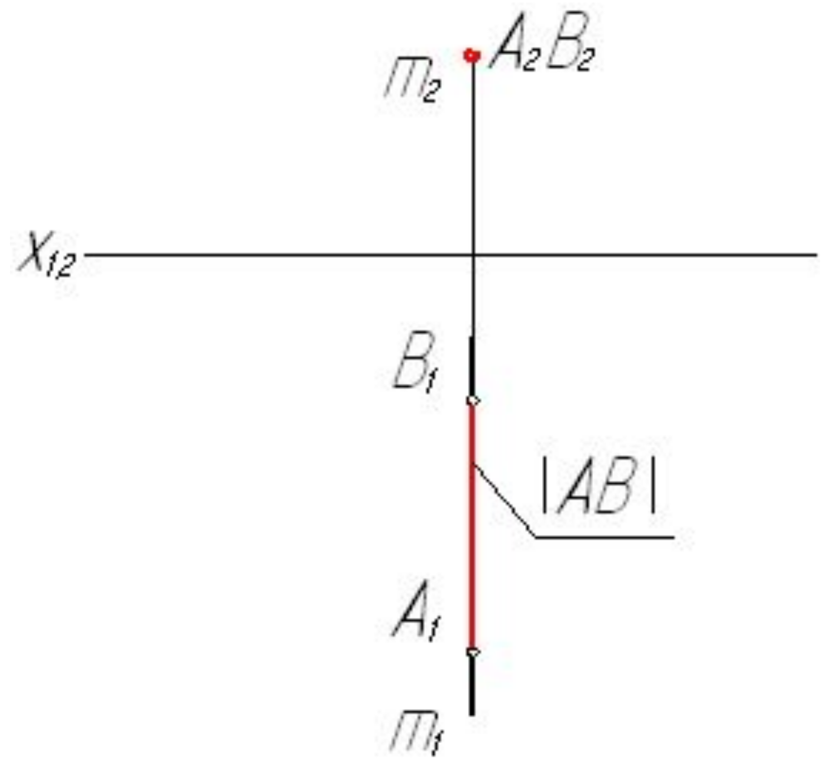
$\Rightarrow m_1$ – точка $\wedge$ $m_2 \perp x_{1,2}$

$\Rightarrow A_1B_1$ - точка $\wedge$ $A_2B_2 \cong |AB|$

Фронтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций





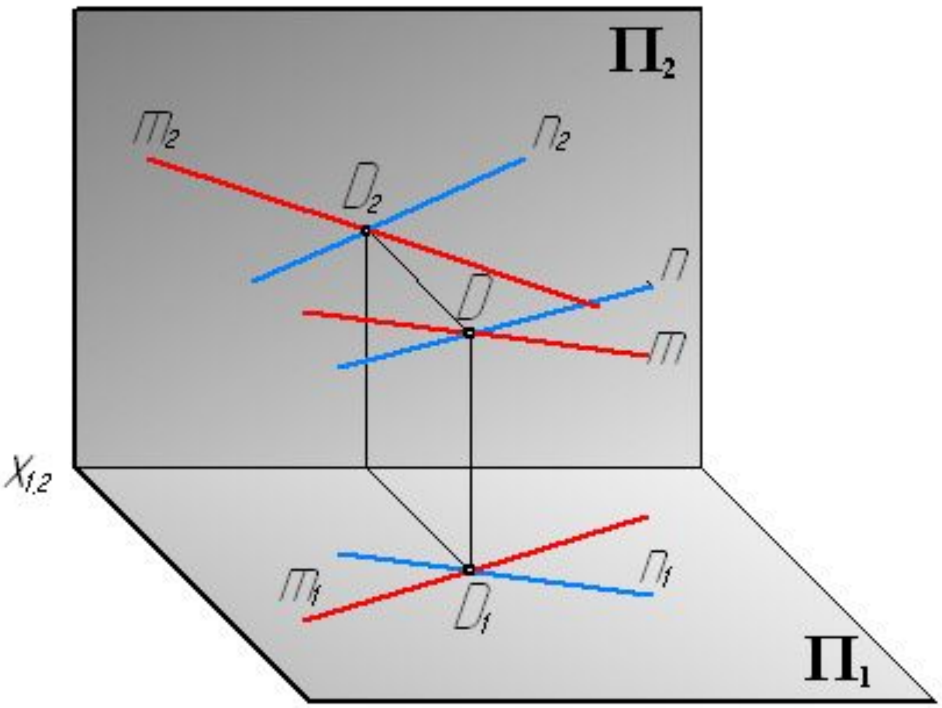
$\boldsymbol{m} \perp \Pi_2 \wedge \boldsymbol{m} \parallel \Pi_1$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{m_2}$ – точка $\wedge$ $\boldsymbol{m_1} \perp \boldsymbol{x_{1,2}}$

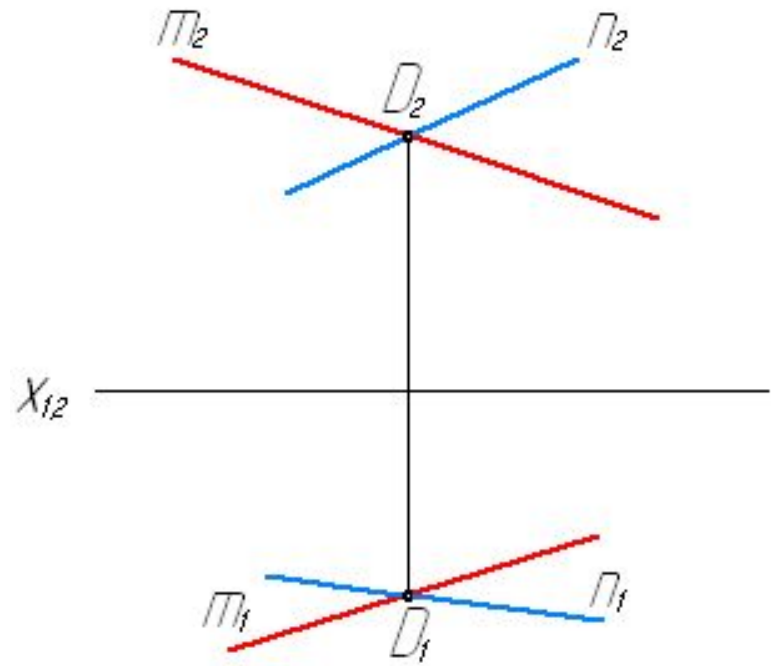
$\mathbf{AB} \subset \boldsymbol{m} \Rightarrow \mathbf{AB} \parallel \Pi_1$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A_2B_2}$ - точка $\wedge$ $\boldsymbol{A_1B_1} \cong \mathbf{|AB|}$

Характерная особенность эпюра проецирующей прямой – **одна из проекций прямой точка**

Взаимное положение двух прямых

Пересекающиеся прямые

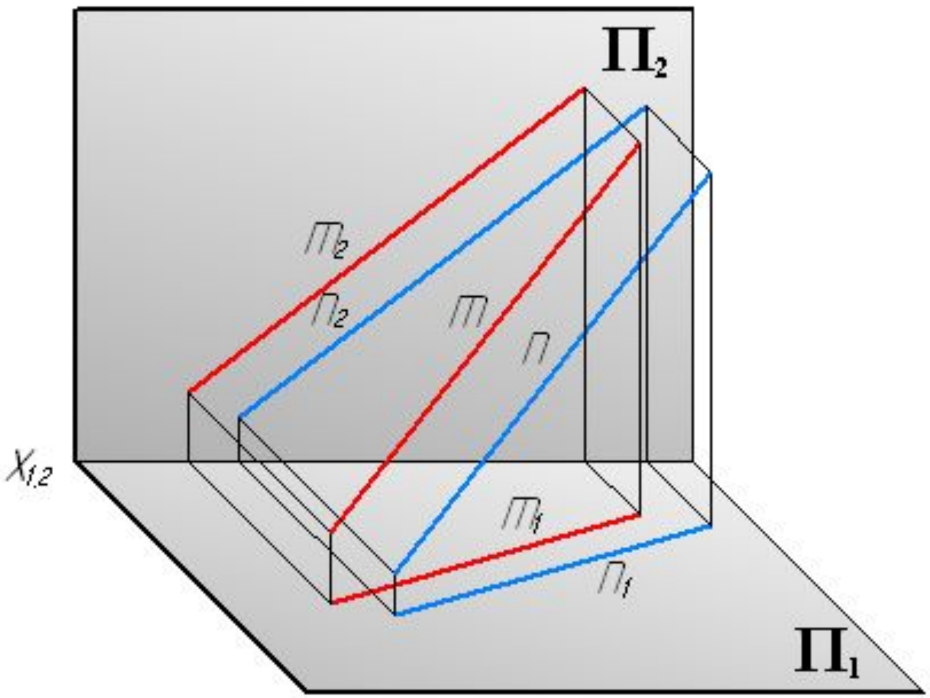


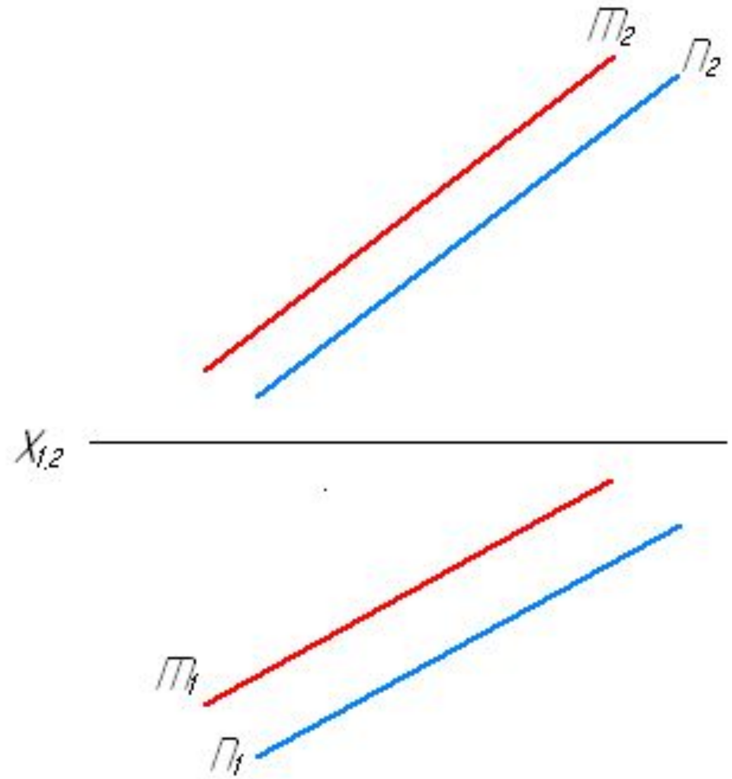


$$m \cap n = D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_k \cap n_k = D_k$$

$$m_1 \cap n_1 = D_1$$
$$m_2 \cap n_2 = D_2$$
$$D_1D_2 \perp x_{1,2}$$

Параллельные прямые





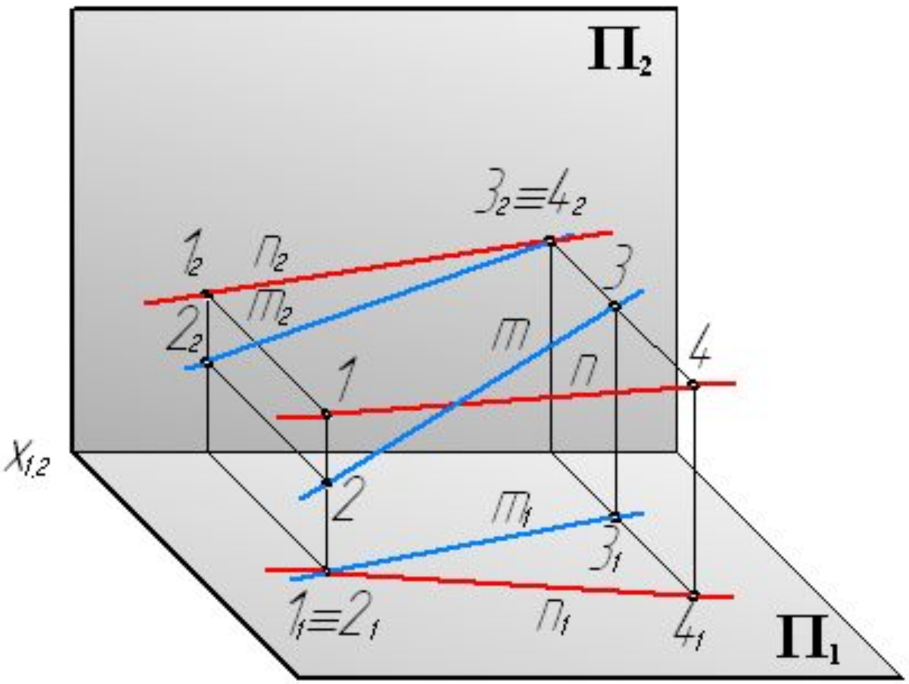
$m \parallel n \Rightarrow$

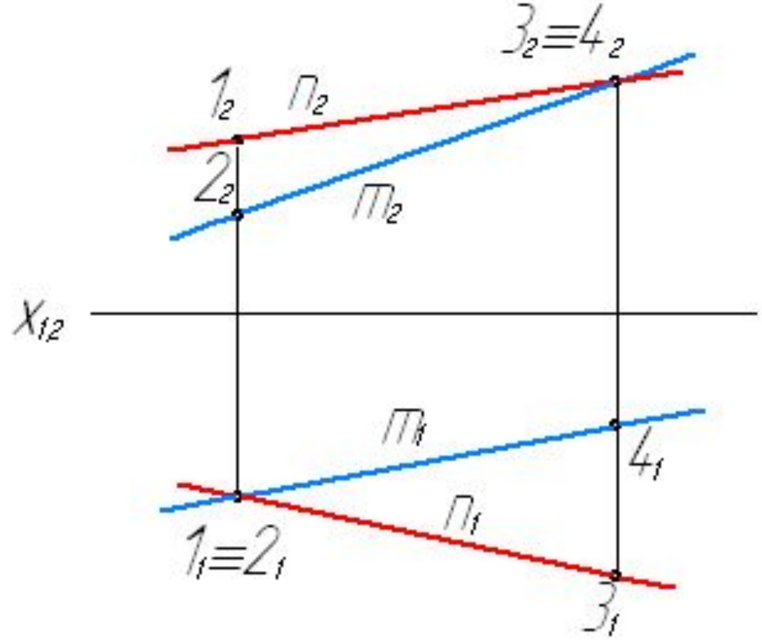
$\Rightarrow m_k \parallel n_k$

$m_1 \parallel n_1$

$m_2 \parallel n_2$

Скрещивающиеся прямые





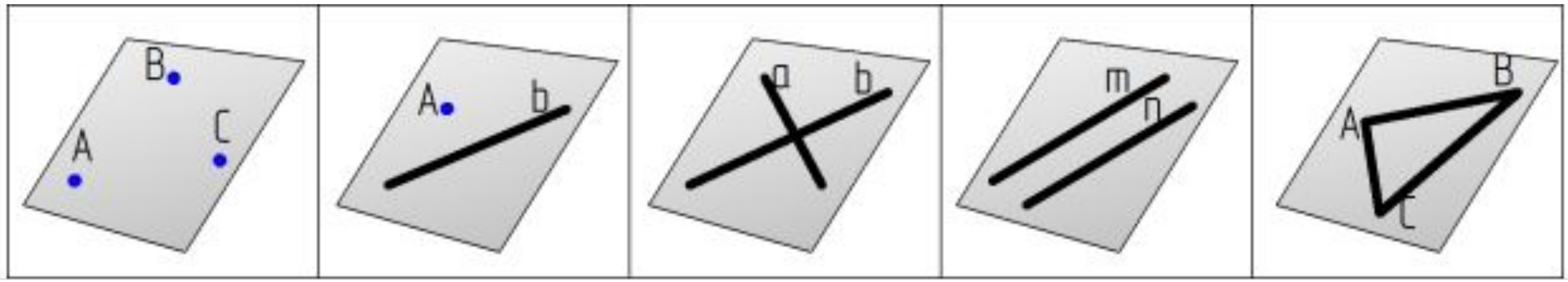
$$m \dot{-} n \Rightarrow m \nparallel n \wedge m \not\cap n$$

Пары точек (1,2) и (3,4) – конкурирующие точки

Плоскость

Плоскость - это один из видов поверхности (плоская поверхность).

Способы задания плоскости



Три точки
$\alpha(A,B,C)$

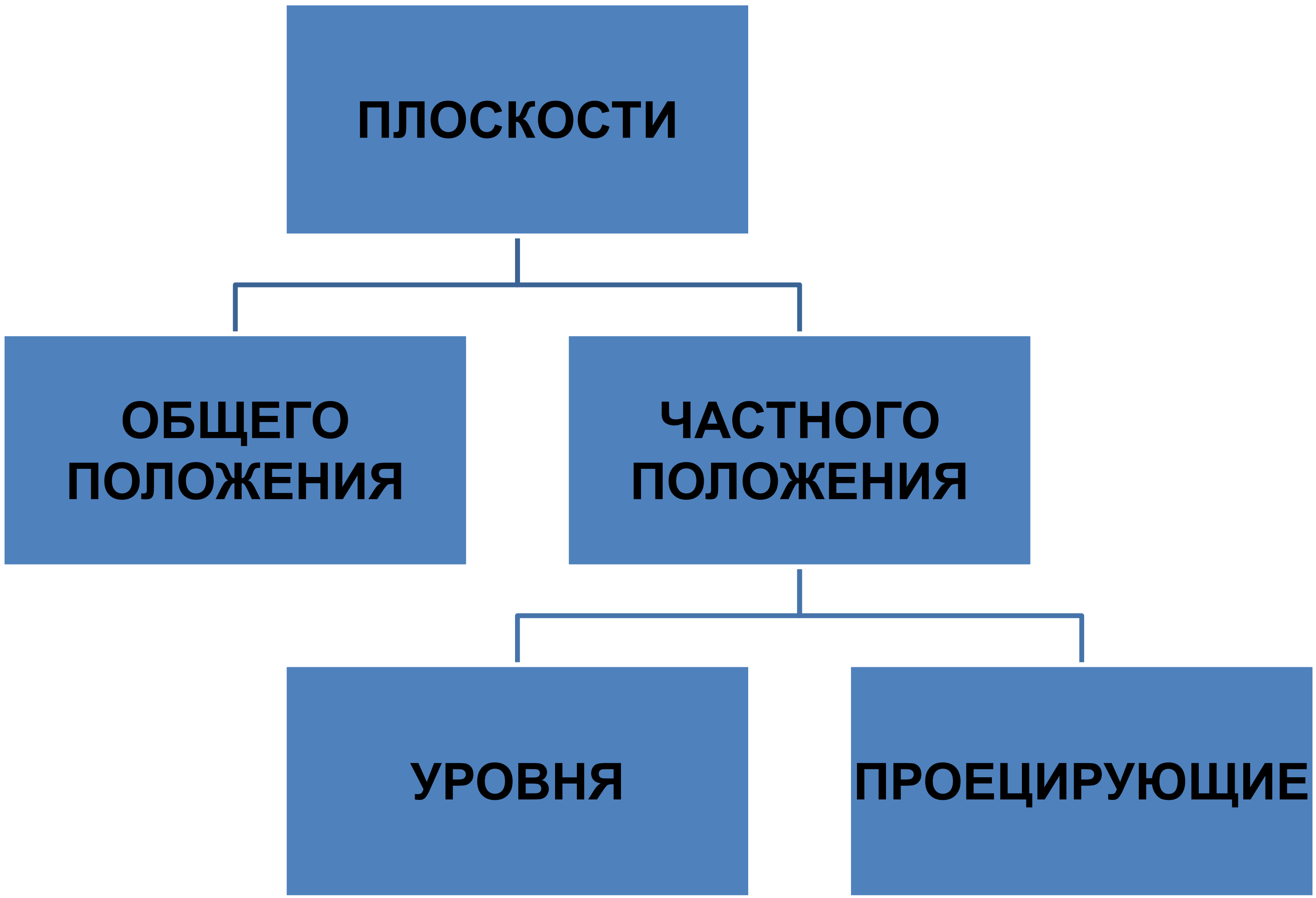
Точка и прямая
$\beta(A,b)$

Две пересекающиеся прямые
$\gamma(a \cap b)$

Две параллельные прямые
$\delta(m \parallel n)$

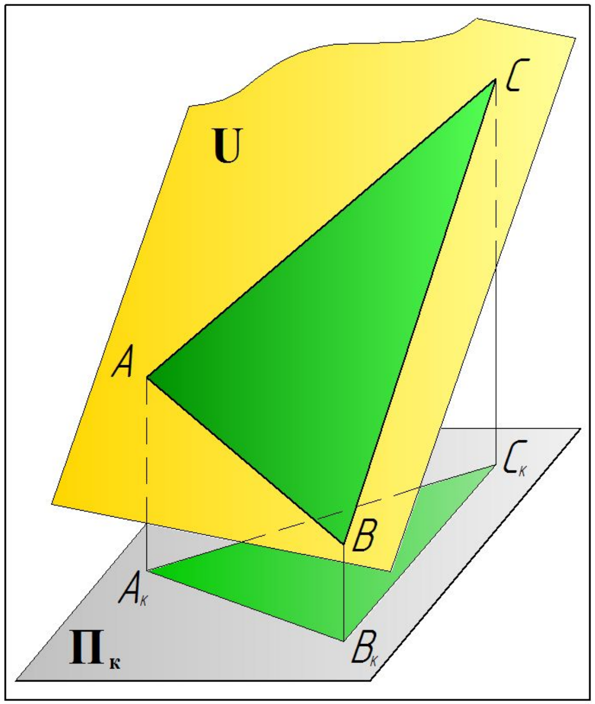
Плоская фигура
$\varepsilon(\triangle ABC)$

Положение плоскости относительно плоскостей проекций



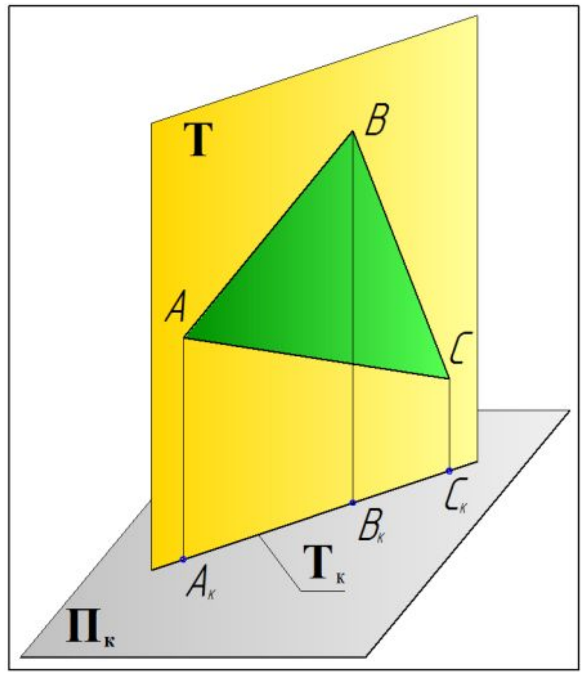
Общее положение

Частное положение



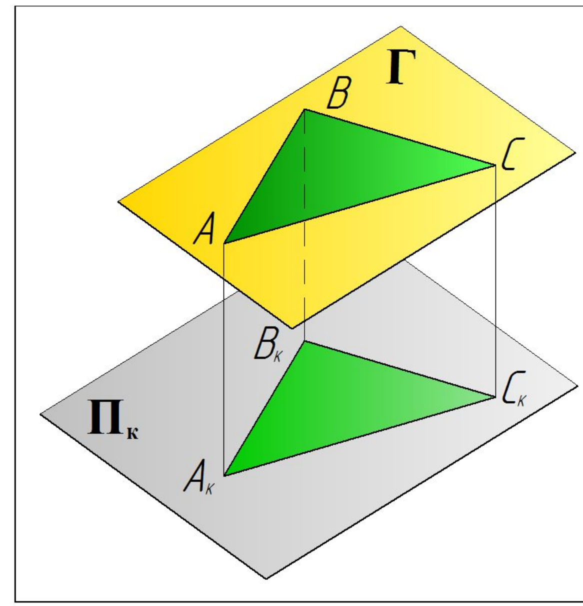
$\alpha \nparallel П_к \wedge \alpha \not\perp П_к$

Проецирующая плоскость



$\beta \perp П_к$

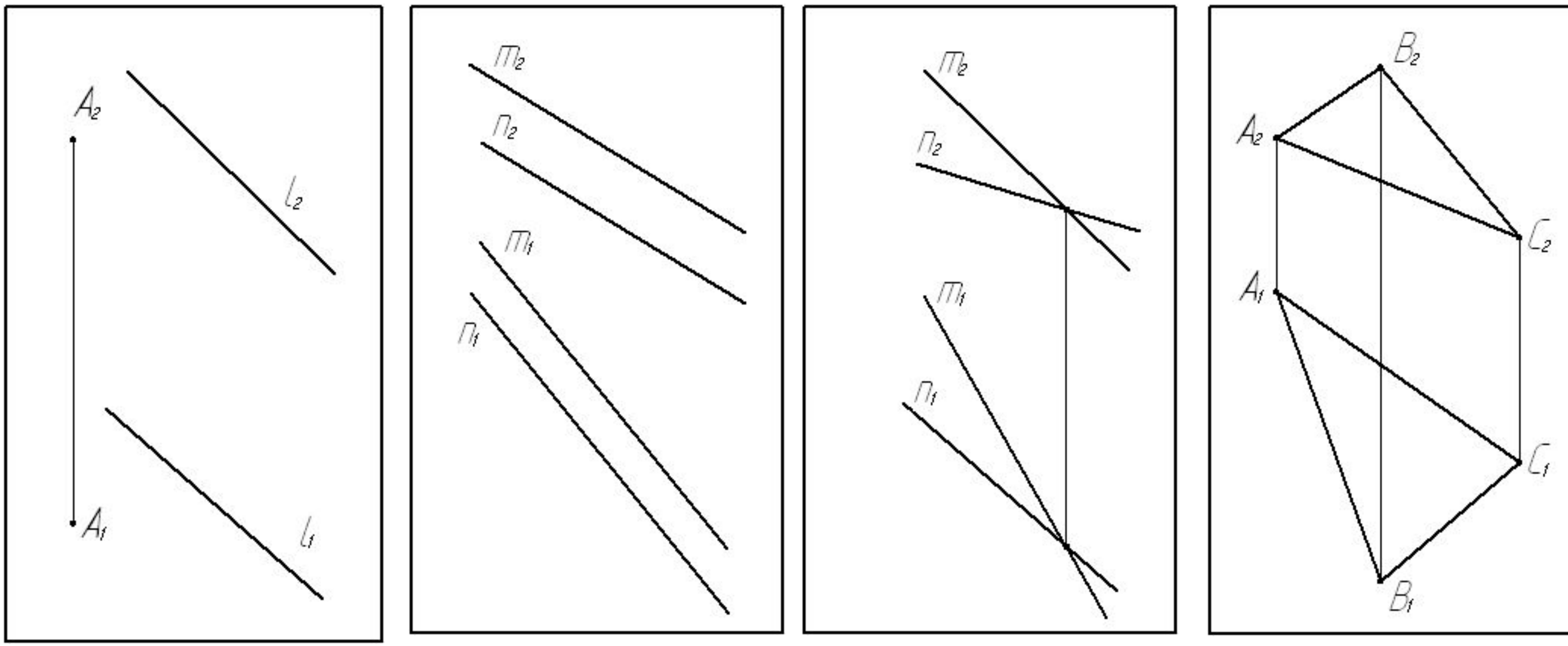
Плоскость уровня



$\gamma \parallel П_к$

Плоскость общего положения

Плоскость непараллельная и неперпендикулярная плоскостям проекций



Вывод: Ни одна из проекций плоскости не имеет форму прямой линии

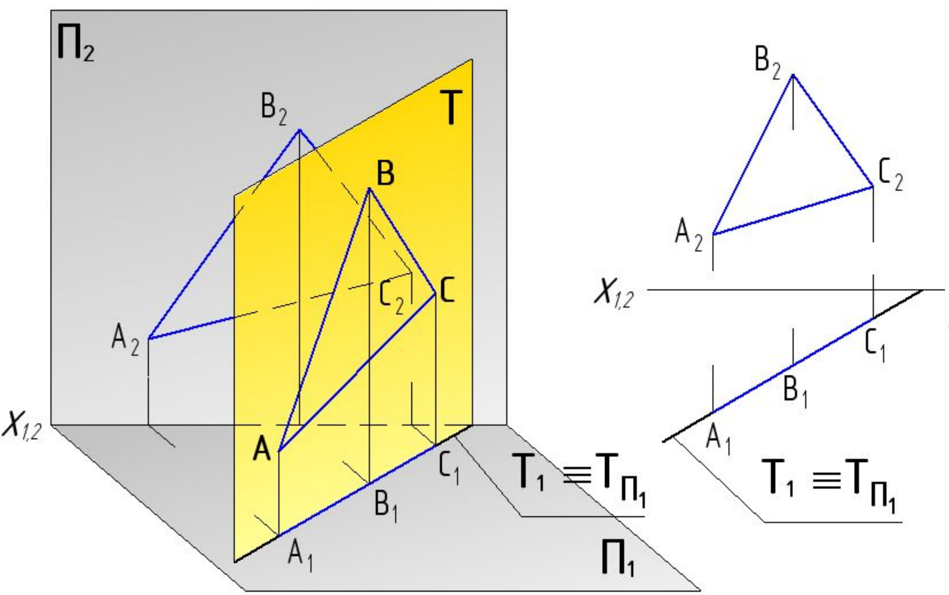
Плоскости частного положения

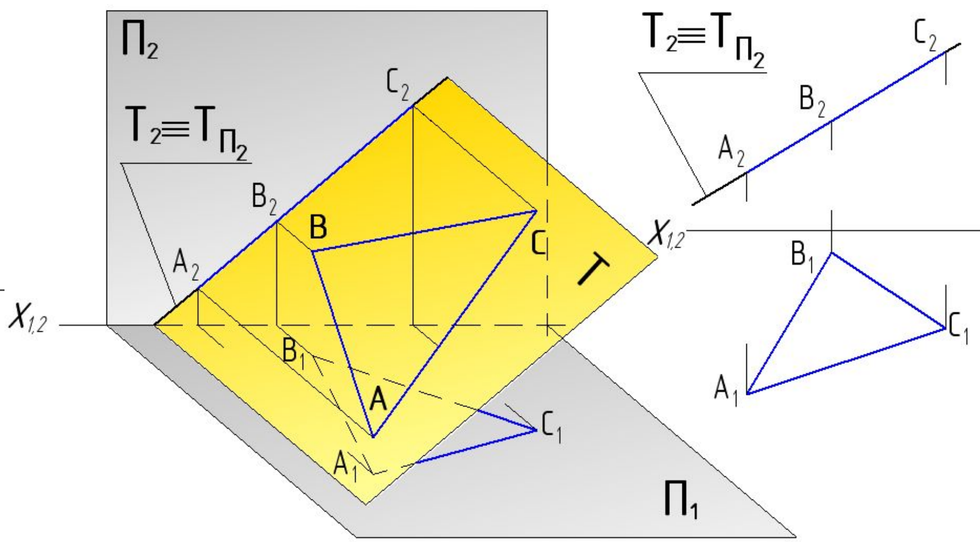
Проецирующие плоскости

Это плоскости перпендикулярные одной из плоскостей проекций

Горизонтально-проецирующая | **Фронтально-проецирующая**

T ⊥ | **T ⊥**





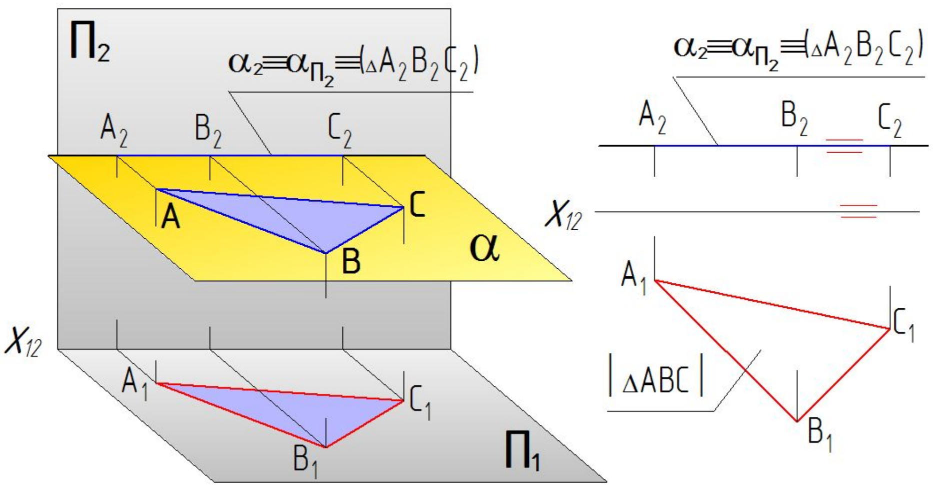
T_1 – прямая и $T_1 \equiv T_{П^1}$ | **T_2 – прямая и $T_2 \equiv T_{П^2}$**

Плоскости уровня

Это плоскости параллельные одной из плоскостей проекций

Горизонтальная плоскость

$\alpha \parallel П_1$

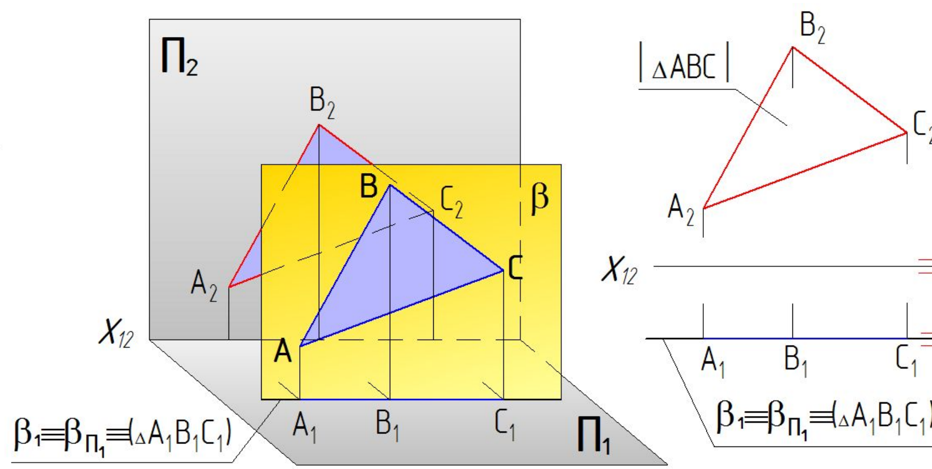


α_2 – прямая и $\alpha_2 \equiv \alpha_{П^2}$ и $\alpha_2 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset \alpha \Rightarrow \Delta ABC \parallel П_1 \Rightarrow A_1B_1C_1 \cong ABC$

Фронтальная плоскость

$\beta \parallel П_2$



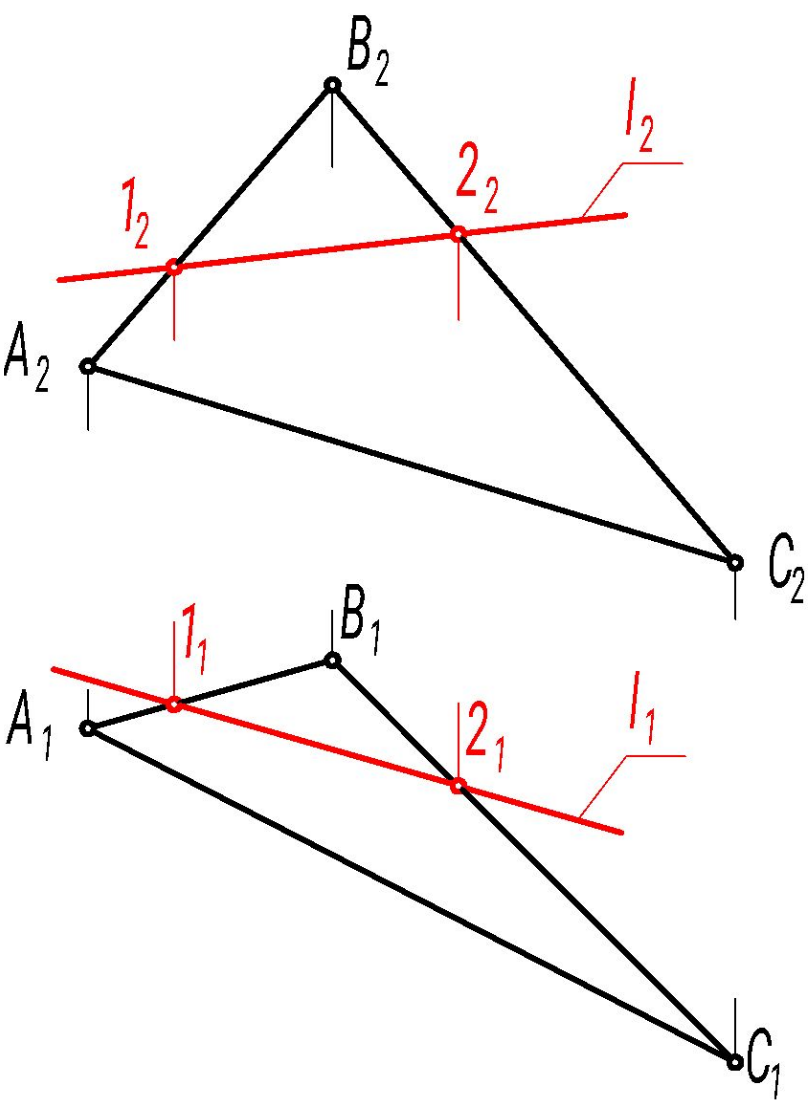
β_1 – прямая и $\beta_1 \equiv \beta_{П^1}$ и $\beta_1 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset \beta \Rightarrow \Delta ABC \parallel П_2 \Rightarrow A_2B_2C_2 \cong ABC$

Вывод:

У плоскости частного положения одна из проекций обязательно имеет форму прямой линии.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПЛОСКОСТИ



Прямая принадлежит плоскости, если две точки прямой принадлежат этой плоскости.

$\boldsymbol{l}\,(1,2);\ (1 \in \boldsymbol{T}) \wedge (2 \in \boldsymbol{T}) \Leftrightarrow \boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{T}$

<u>Дано</u>: плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.

<u>Построить</u>: $\boldsymbol{l} \subset \alpha$.

Первый вариант

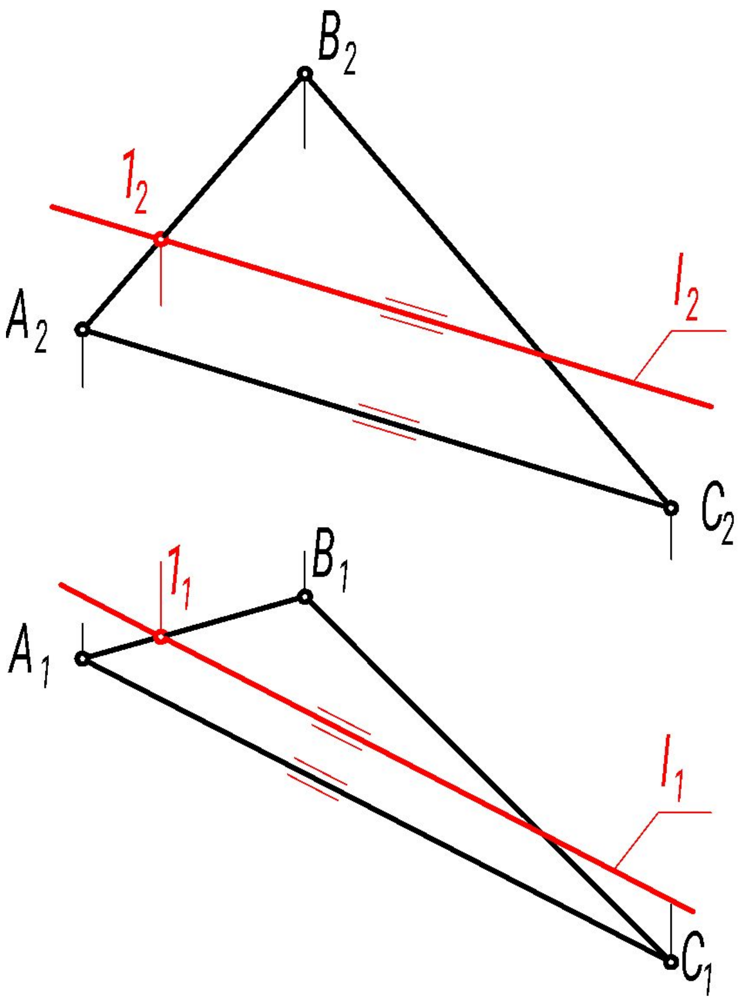
Задаем:

точка 1 принадлежит стороне AB,

точка 2 принадлежит стороне BC.

$(1 \in AB) \wedge (2 \in BC)$

Строим $\boldsymbol{l}\,(1,2)$



Второй вариант

Задаем: точка 1 принадлежит стороне AB, а точка 2 принадлежит стороне AC, но является ее несобственной точкой.

$$(1 \in AB)\ ;\ (2 \in AC;\ 2 \equiv 2^{\infty})$$

Следовательно, прямая ***l*** параллельна стороне AC. $(\boldsymbol{l} \parallel AC)$

Данный вариант построения прямой следует рассматривать как задание прямой одной точкой и направлением

$$\boldsymbol{l}\,(1,s) \Rightarrow 1 \in \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} \parallel s$$

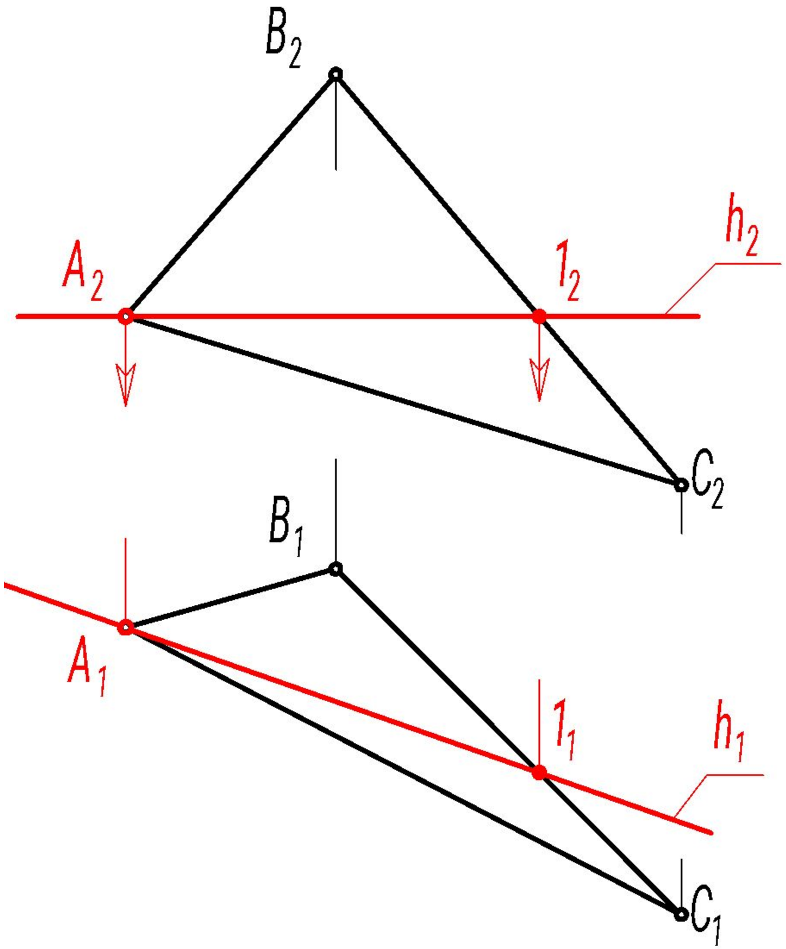
В качестве направления может быть выбрана любая прямая, принадлежащая плоскости.

В нашем примере $s \equiv AC$, т.е. $\boldsymbol{l} \parallel AC$

Прямые уровня плоскости

Горизонталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций



Дано: Плоскость α (ΔABC)

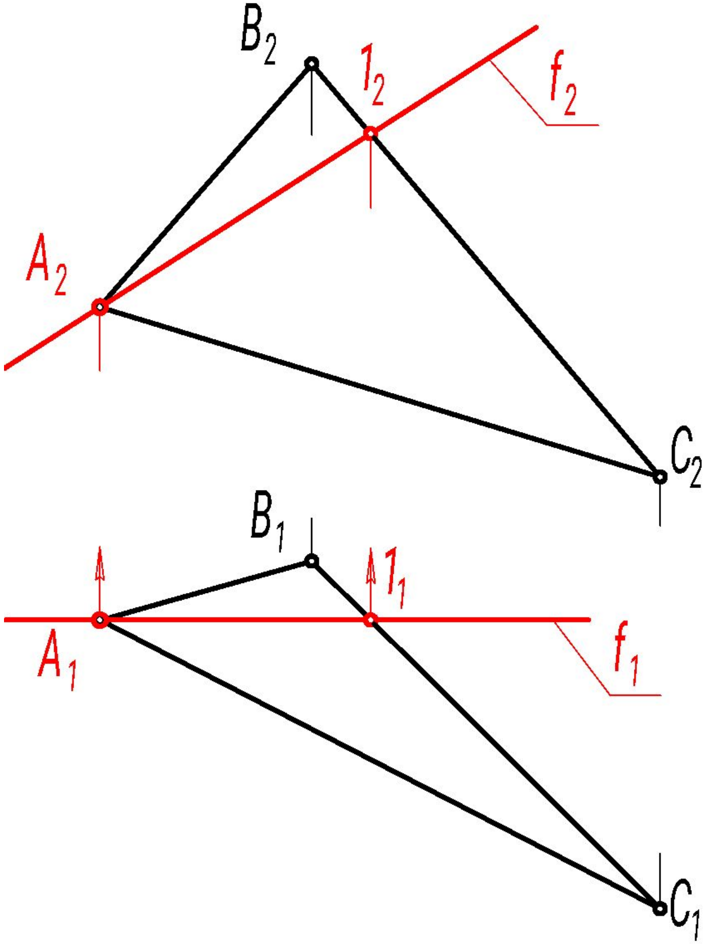
Построить: $h \subset \alpha$

Задаем $h\ (A,1)$; $1 \in BC$

$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

Фронталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций



Дано: Плоскость α (ΔABC)

Построить: $f \subset \alpha$

Задаем $f\,(A,1)$; $1 \in BC$

$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$

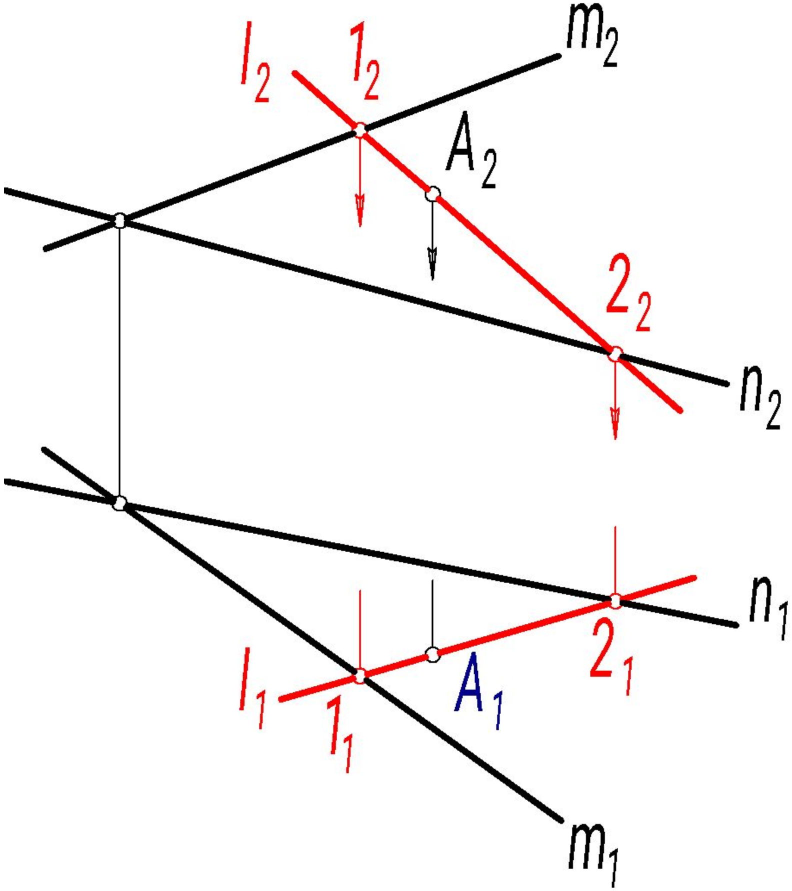
ТОЧКА В ПЛОСКОСТИ

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости

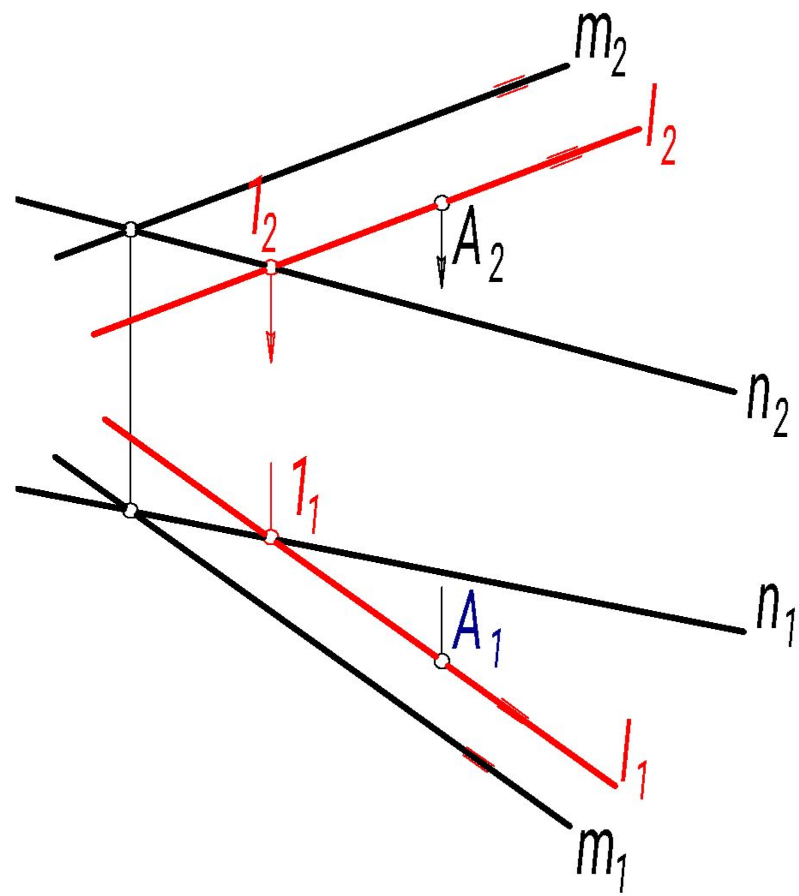
$$\mathbf{A} \in \alpha \Leftrightarrow \mathbf{A} \in l,\, l \subset \alpha$$

Дано: плоскость $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$; точка $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_2}) \in \boldsymbol{\alpha}$.
Построить $\boldsymbol{A_1}$.

$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$ **;** $\boldsymbol{l}$ (1,2) $\subset \boldsymbol{\alpha}$; задаем (1 $\in \boldsymbol{m}$) ; (2 $\in \boldsymbol{n}$)

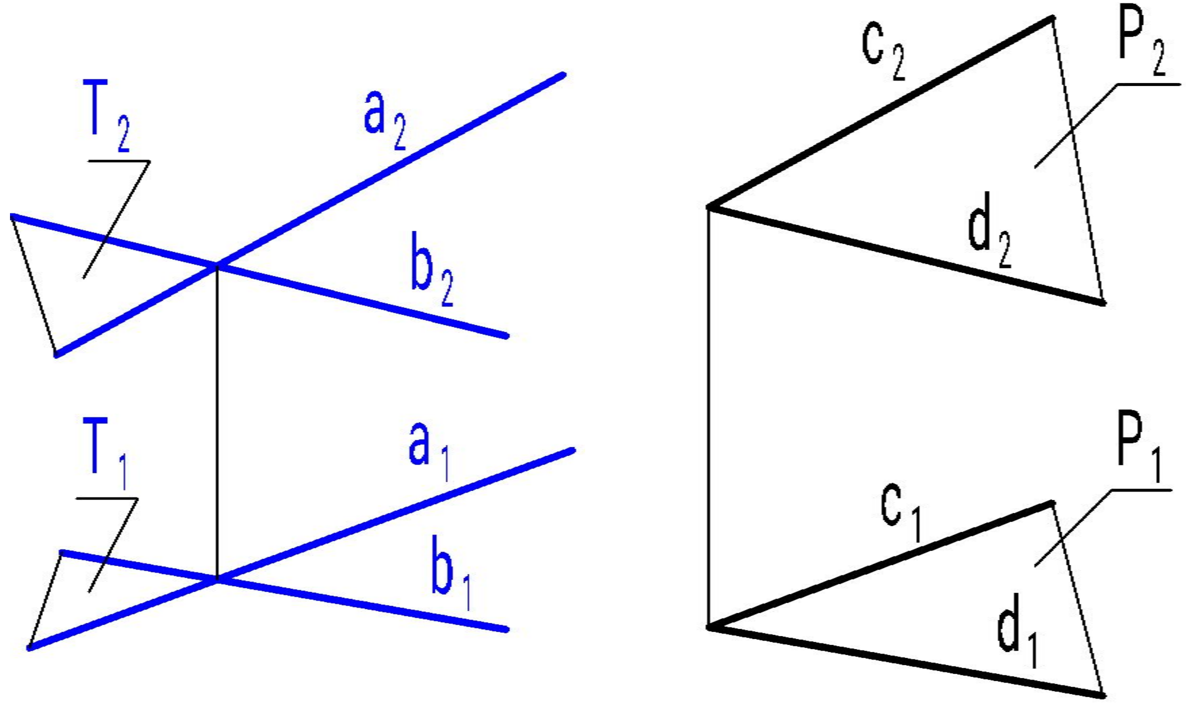


$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$ **;** $\boldsymbol{l}$ (1,s); задаем (1 $\in \boldsymbol{n}$) ; ($\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}$)



Взаимное положение двух плоскостей

Параллельные плоскости



Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

$$T(a \cap b);$$
$$P(c \cap d);$$
$$a \parallel c;\ b \parallel d;$$
$$\Rightarrow T \parallel P$$

Пересечение двух плоскостей

Линией пересечения плоскостей является прямая, которая должна быть задана двумя точками.

Любая из этих двух точек может быть получена:

- пересечением двух прямых (в каждой из двух заданных плоскостей выбирается по одной прямой и находится точка их пересечения);
- пересечением прямой с плоскостью (в одной из двух заданных плоскостей выбирается прямая и определяется точка ее пересечения с другой плоскостью);
- пересечением трех плоскостей (вводится дополнительная третья плоскость, и строится точка пересечения двух заданных плоскостей и дополнительной).

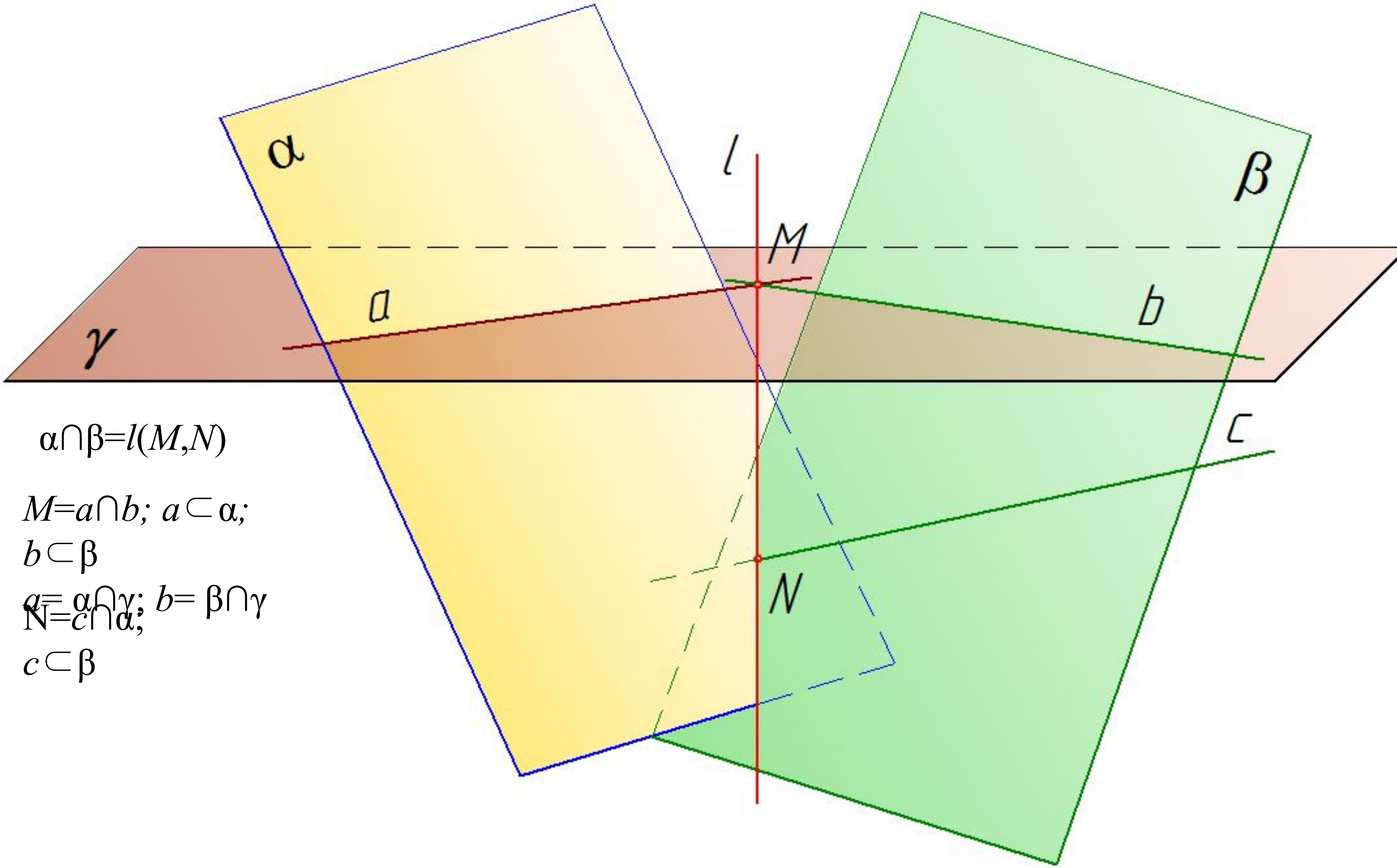
В первом варианте для выполнения пересечения двух прямых должно быть обеспечено условие: обе прямые должны лежать в одной плоскости. Т.е. должна быть введена третья дополнительная плоскость, которая при пересечении с исходными плоскостями и создает эти прямые. Тем самым мы переходим к третьему варианту.

При определении точки пересечения прямой линии с плоскостью также должна быть введена дополнительная секущая плоскость.

Следовательно, реально используются третий вариант.

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Пространственная модель построения линии пересечения двух плоскостей



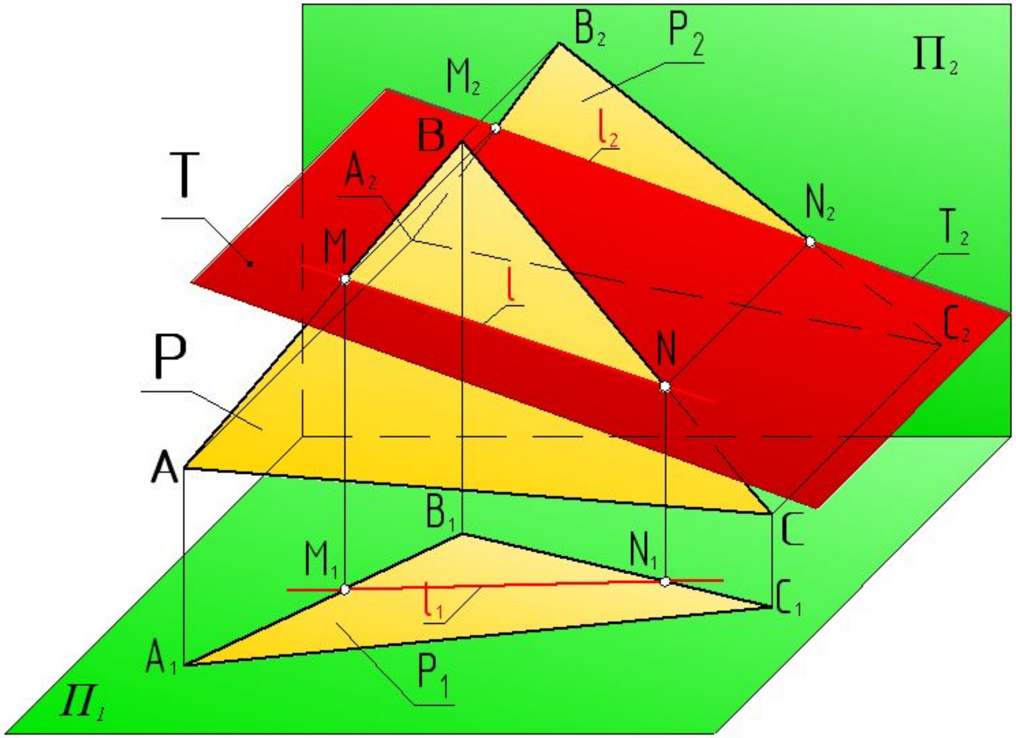
$\alpha \cap \beta = l(M,N)$

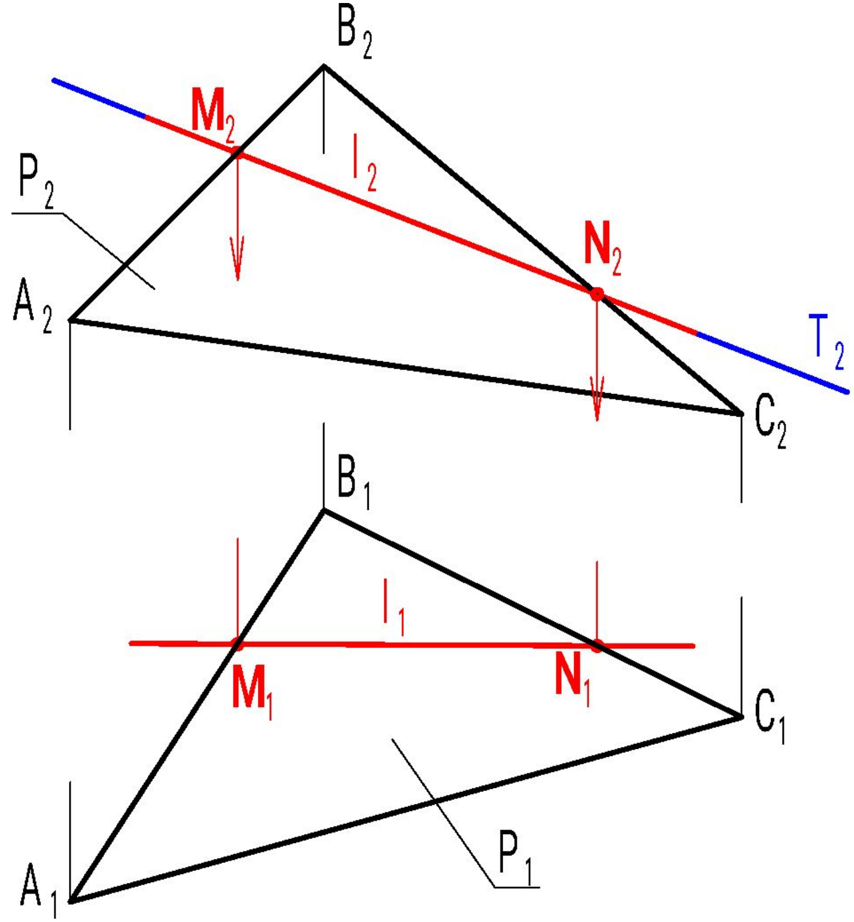
$M = a \cap b;\ a \subset \alpha;$
$b \subset \beta$

$a = \alpha \cap \gamma;\ b = \beta \cap \gamma$

$N = c \cap \alpha;$
$c \subset \beta$

<u>Частный случай</u>: одна из двух плоскостей плоскость частного положения, например фронтально-проецирующая, а другая –общего положения.





$T \cap P(\triangle ABC) = l \Rightarrow l \subset T$ и $l \subset P(\triangle ABC)$

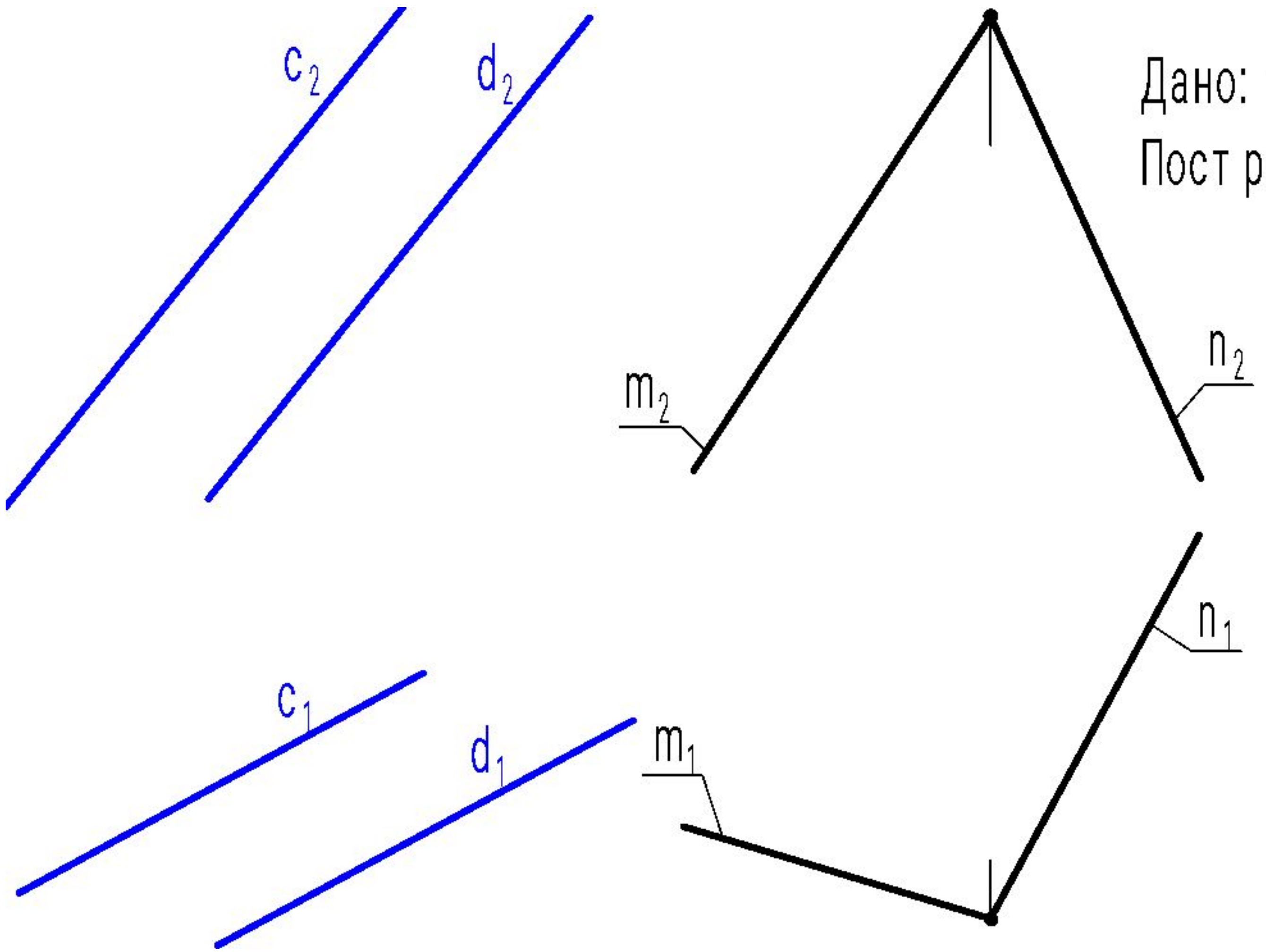
$T \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2$ – *прямая*; $l \subset T \Rightarrow T_2 \equiv l_2$

$l \subset P(\triangle ABC) \Rightarrow l(M,N)$, $M = T \cap AB$; $N = T \cap BC$

Если одна из двух пересекающихся плоскостей является плоскостью частного положения, то задача на построение линии их пересечения решается очень просто.

Следовательно, при построении линии пересечения двух плоскостей, для упрощения построений вспомогательные секущие плоскости должны быть только плоскостями частного положения – проецирующими или уровня.

Исходное условие

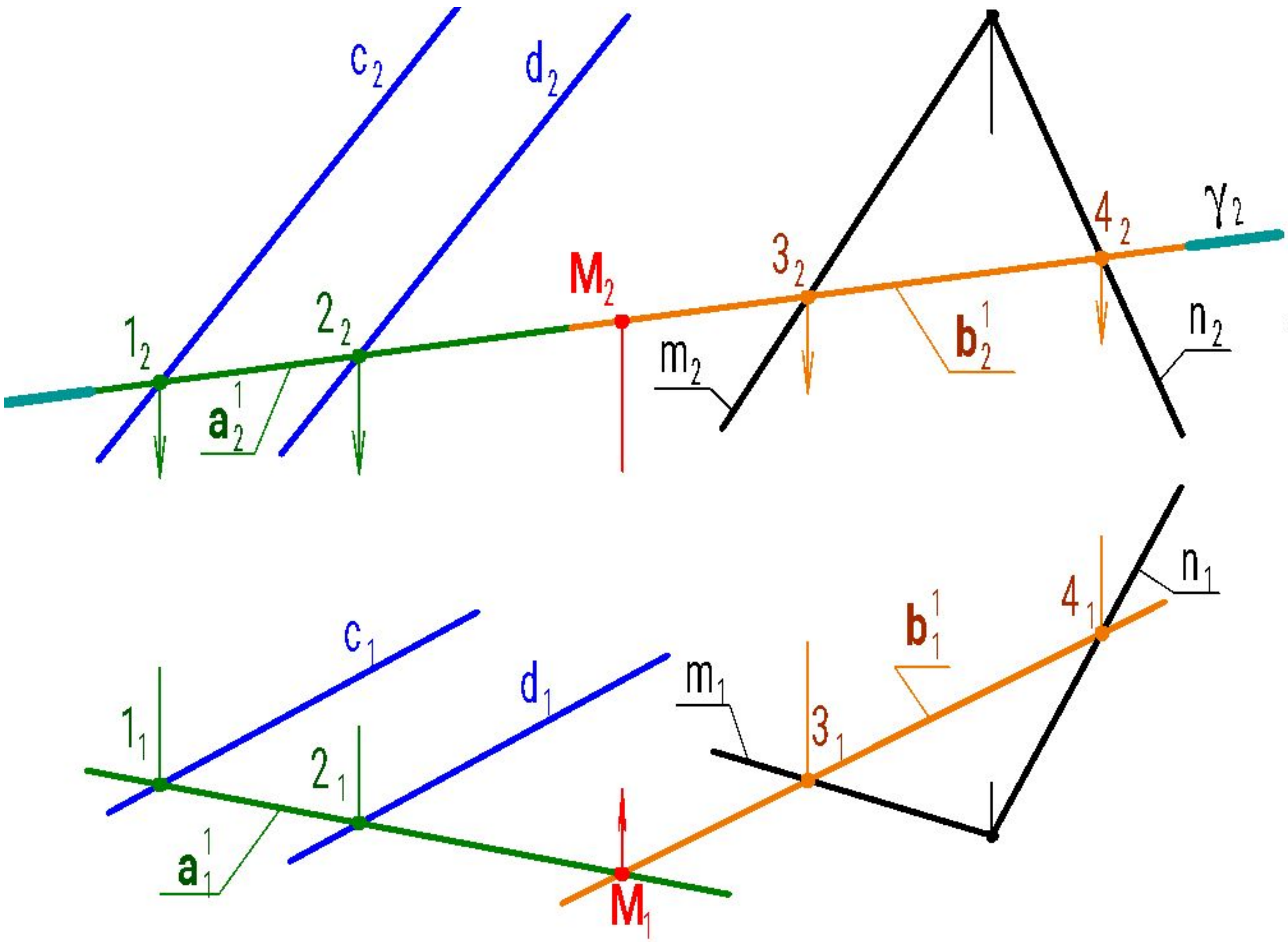


Дано: пл. $\alpha(c \| d)$; пл. $\beta(m \cap n)$.

Построить: $l = \alpha \cap \beta$; $l(M,N)$

Построение точки, принадлежащей линии пересечения двух плоскостей, введением дополнительной секущей плоскости

γ – дополнительная секущая плоскость (проецирующая)

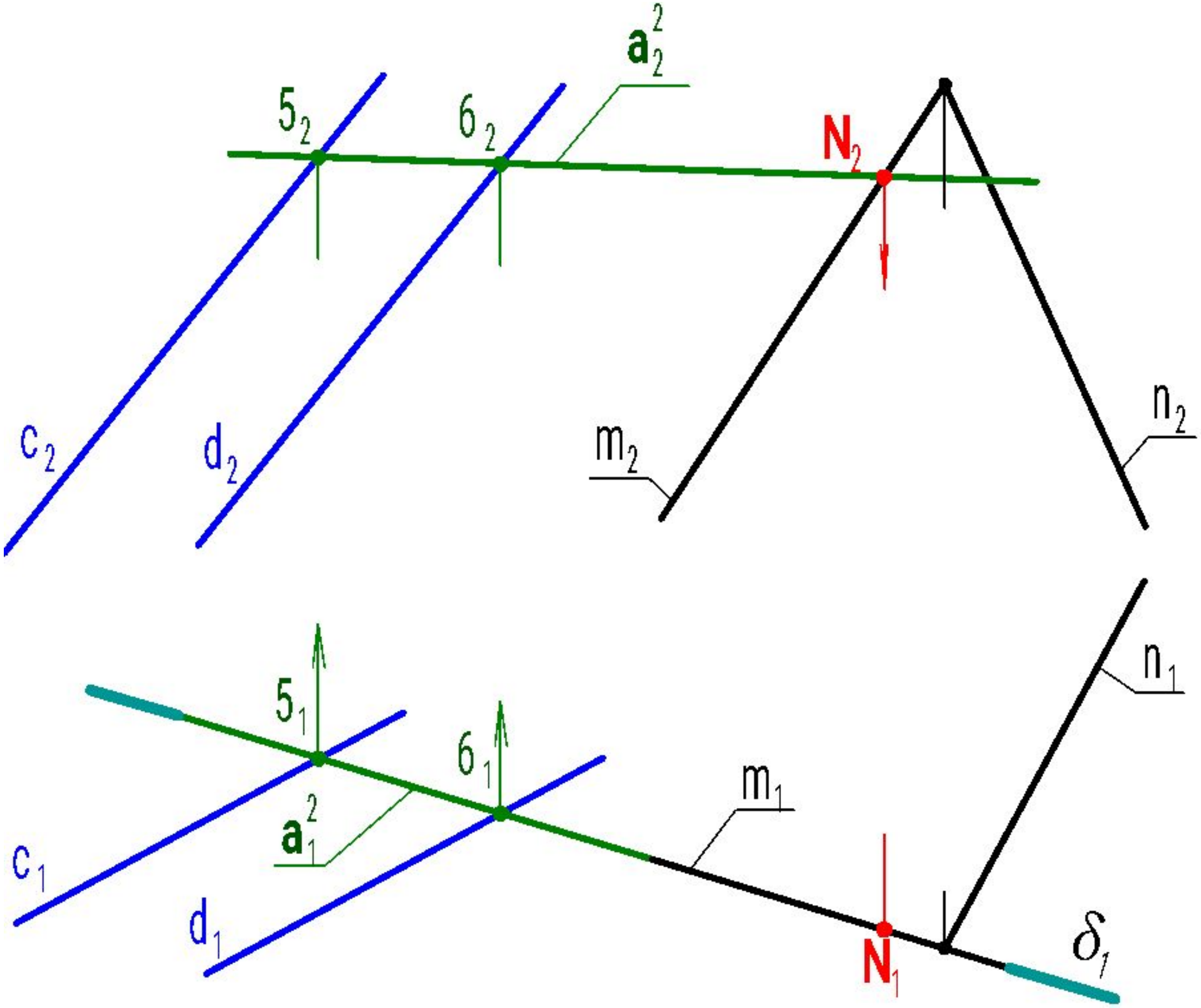


$\gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow \gamma_2$ - прямая

$\gamma \cap \alpha = a^1; \gamma \cap \beta = b^1;$

$\Rightarrow a^1 \cap b^1 = M$

Построение точки, принадлежащей линии пересечения двух плоскостей, как точки пересечения прямой, принадлежащей одной из заданных плоскостей, с другой заданной плоскостью



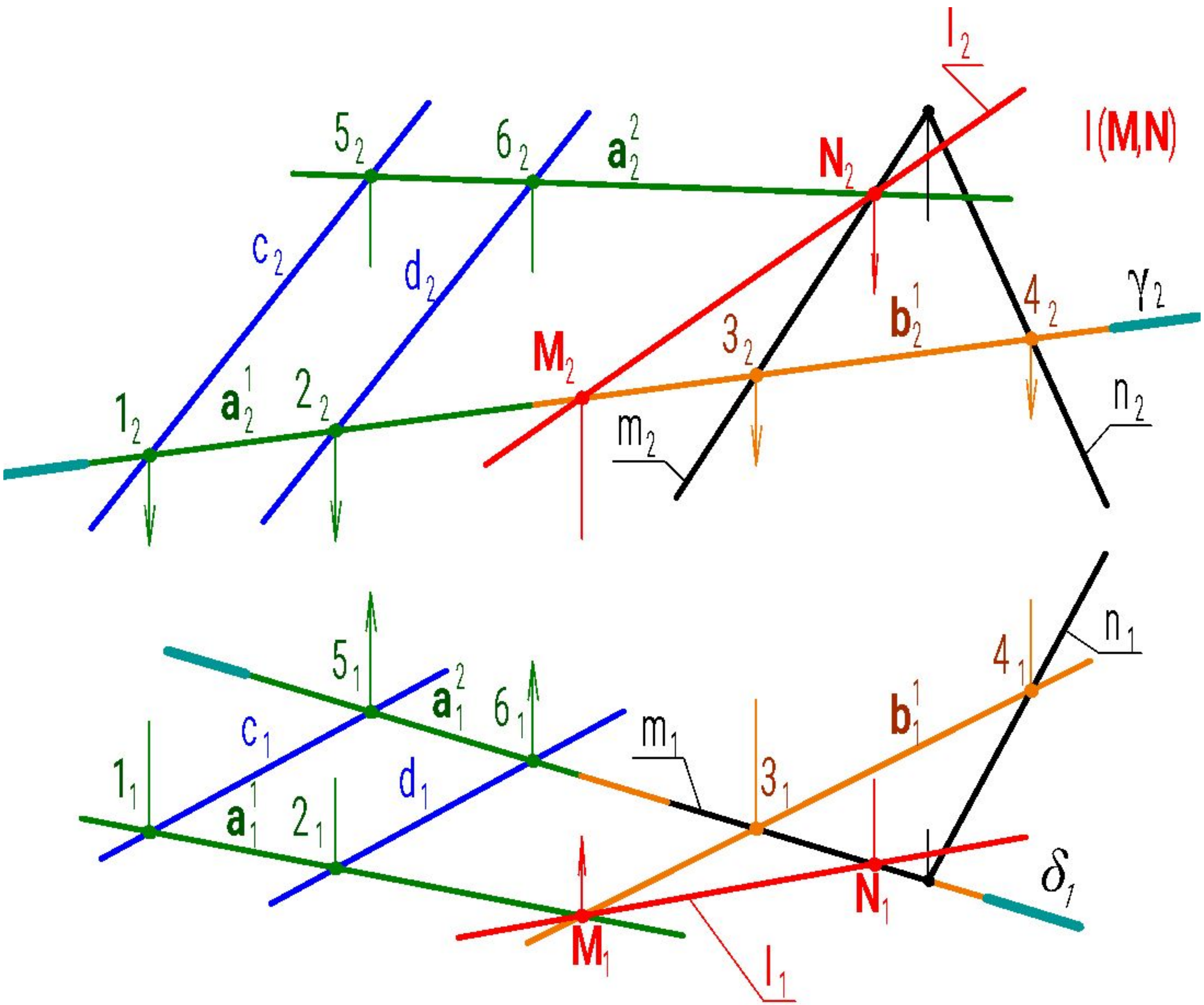
$m \cap \alpha = N$

$m \cup \delta;\ \delta \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 \equiv \delta_1$

$\delta \cap \beta = m;\ \delta \cap \alpha = a^2$

$\Rightarrow m \cap a^2 = N$

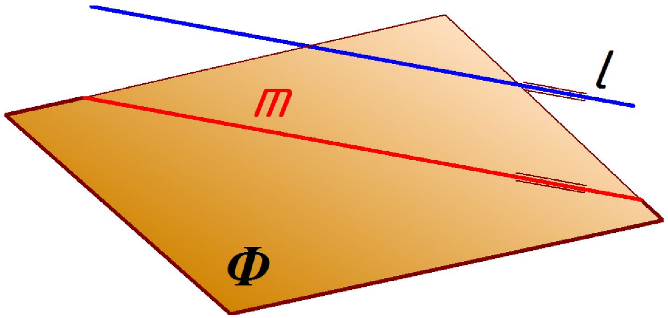
Окончательный вид решения поставленной задачи на построение линии пересечения двух плоскостей



Взаимное положение прямой линии и плоскости

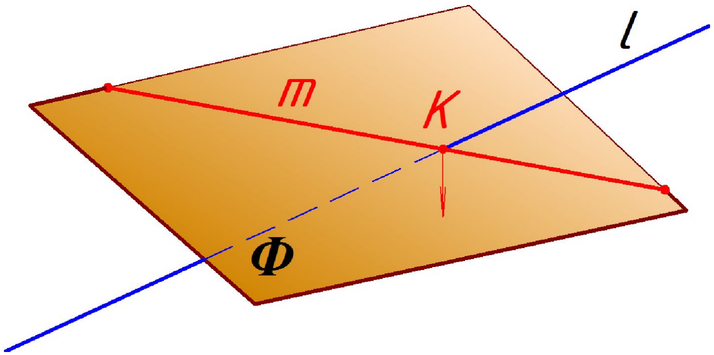
Прямая по отношению к плоскости может занимать следующие положения:

- Принадлежать;
- Быть параллельной;
- Пересекать;
- Быть перпендикулярной.



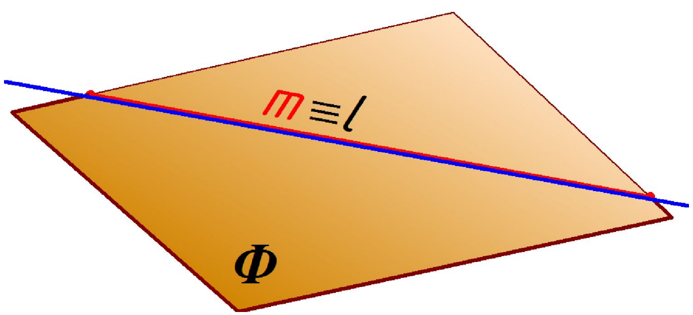
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

$$l \parallel \Phi \Leftrightarrow l \parallel m\ ;\ m \subset \Phi$$



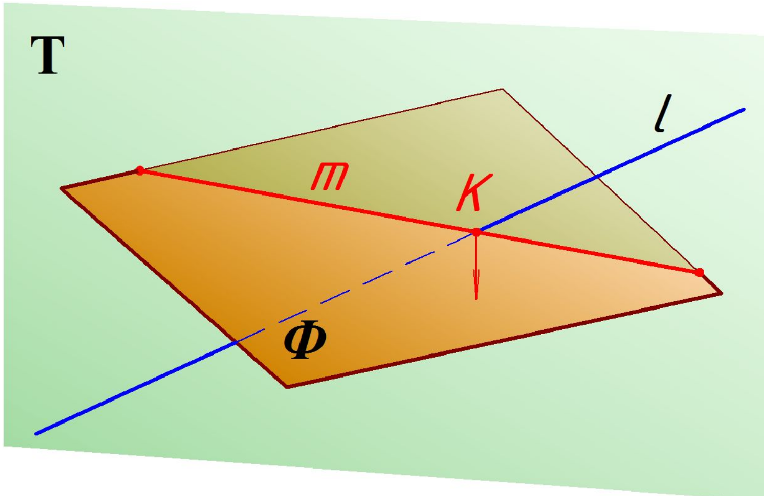
Прямая пересекает плоскость, если она пересекает какую-либо прямую, принадлежащую этой плоскости.

$$l \cap \Phi \Leftrightarrow l \cap m\ ;\ m \subset \Phi$$



Прямая принадлежит плоскости, если она тождественна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

$$l \subset \Phi \Leftrightarrow l \equiv m\ ;\ m \subset \Phi$$



Если $\begin{cases} l \parallel m \\ l \cap m \\ l \equiv m \end{cases}$,

то прямые l и m должны принадлежать какой-то другой плоскости, например T.

$l \subset T$ и $m \subset T$

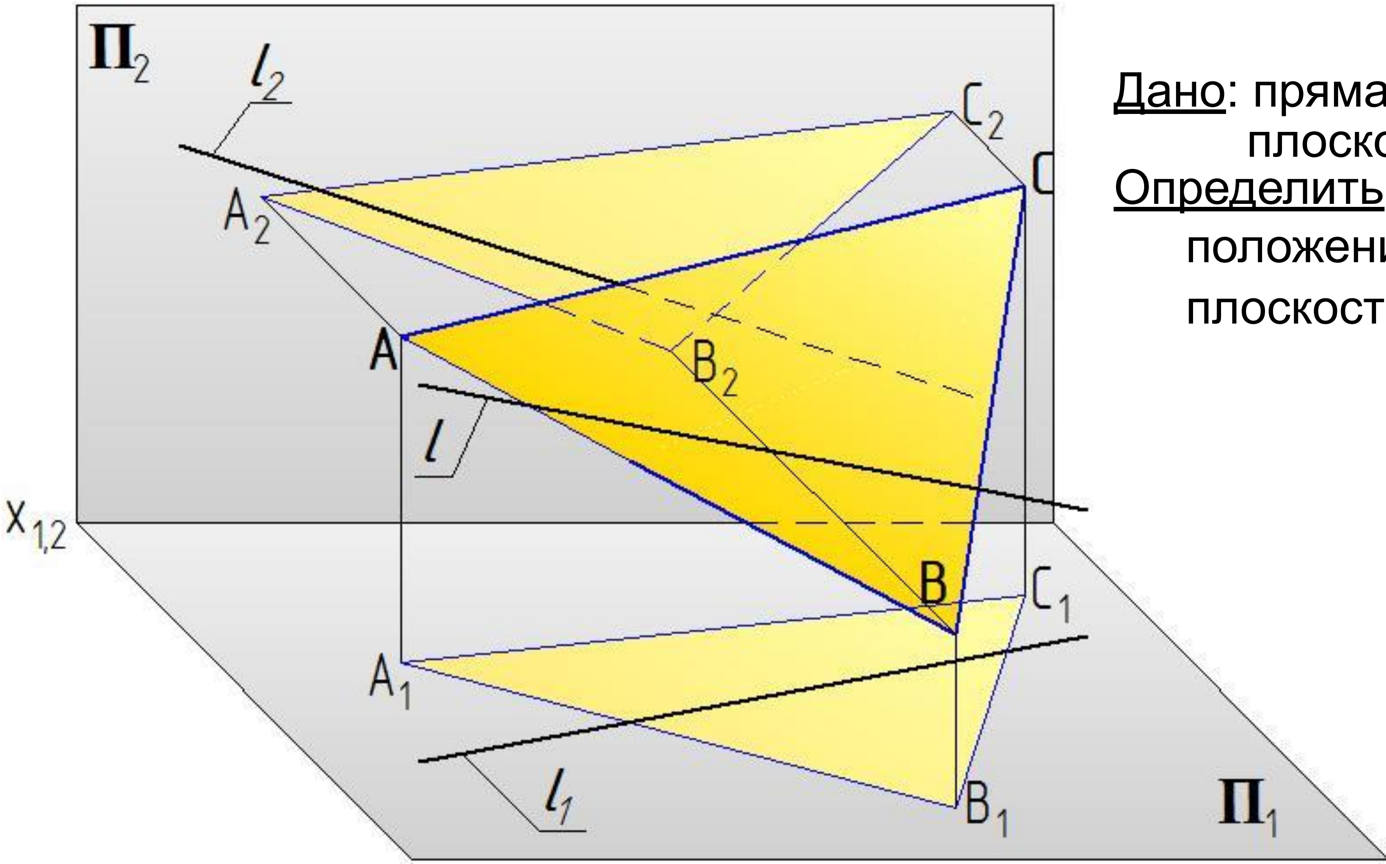
T – вспомогательная секущая плоскость

Но $m \subset \Phi$ $m \subset T$. Следовательно, $m = \Phi \cap T$

При определении взаимного положения прямой линии и плоскости вспомогательная секущая плоскость всегда выбирается проецирующей.

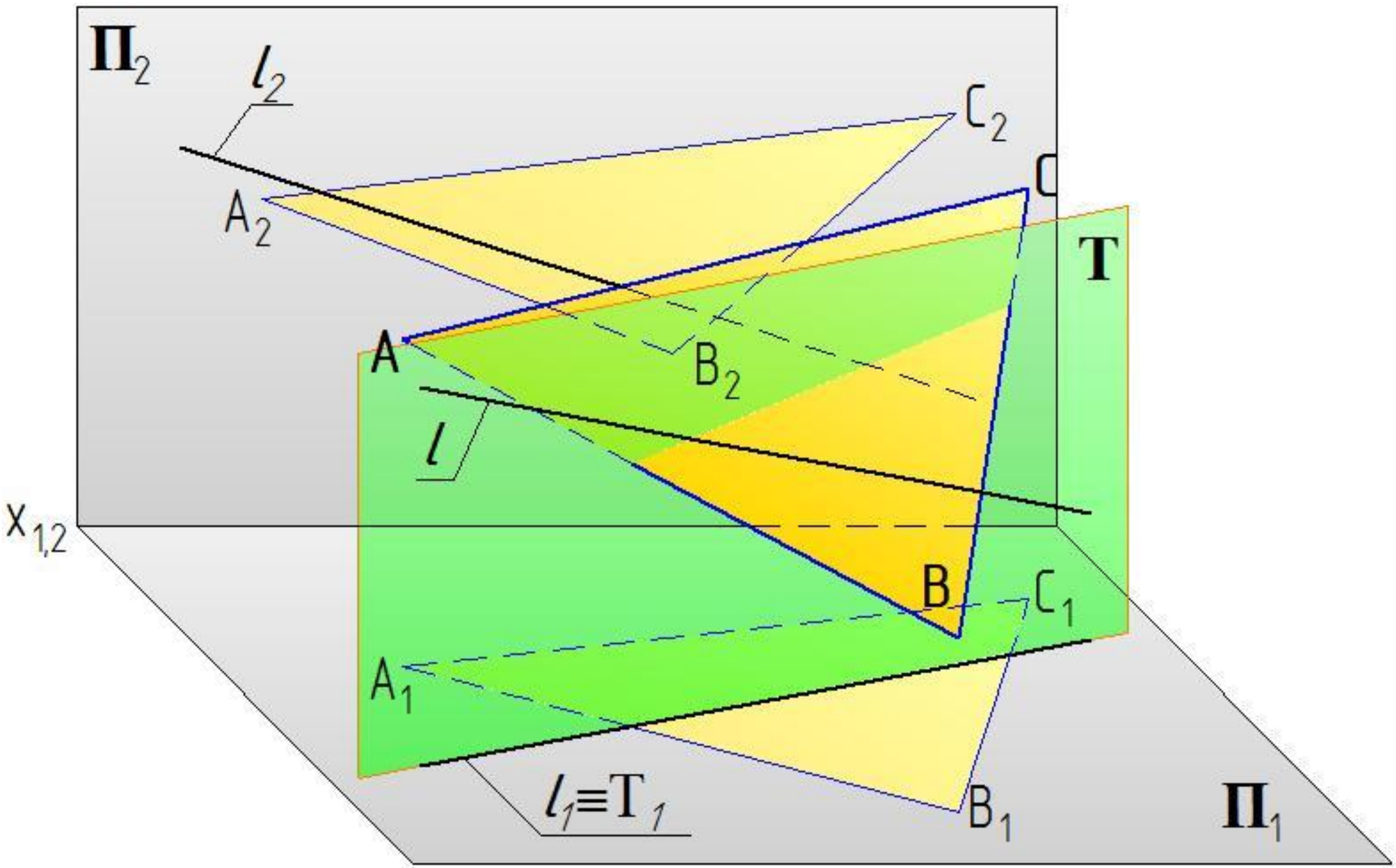
В этом случае, если $T \perp \Pi_к$, то на эпюре $T_к \equiv l_к \equiv m_к$

Общий алгоритм определения взаимного положения прямой линии и плоскости



Дано: прямая l и плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.

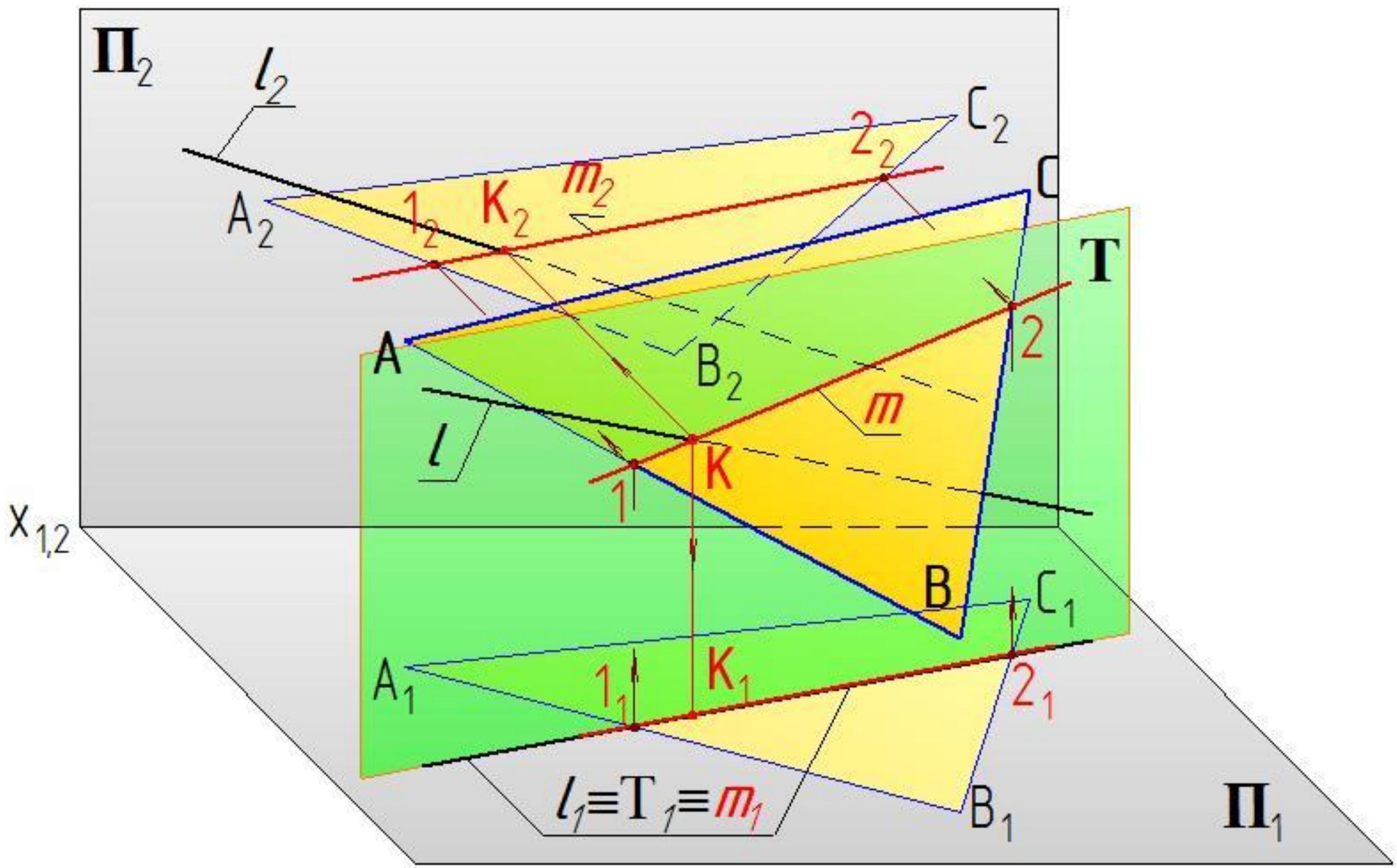
Определить: взаимное положение прямой l и плоскости α



1. Прямую *l*, заключить в какую-либо вспомогательную проецирующую плоскость.

$l \cup T;\ T \perp \Pi_к$. Тогда $T_к \perp l_к$

На примере $T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \perp l_1$



2. Построить линию пересечения заданной плоскости α и вспомогательной T.

$$m = \alpha \cap T$$

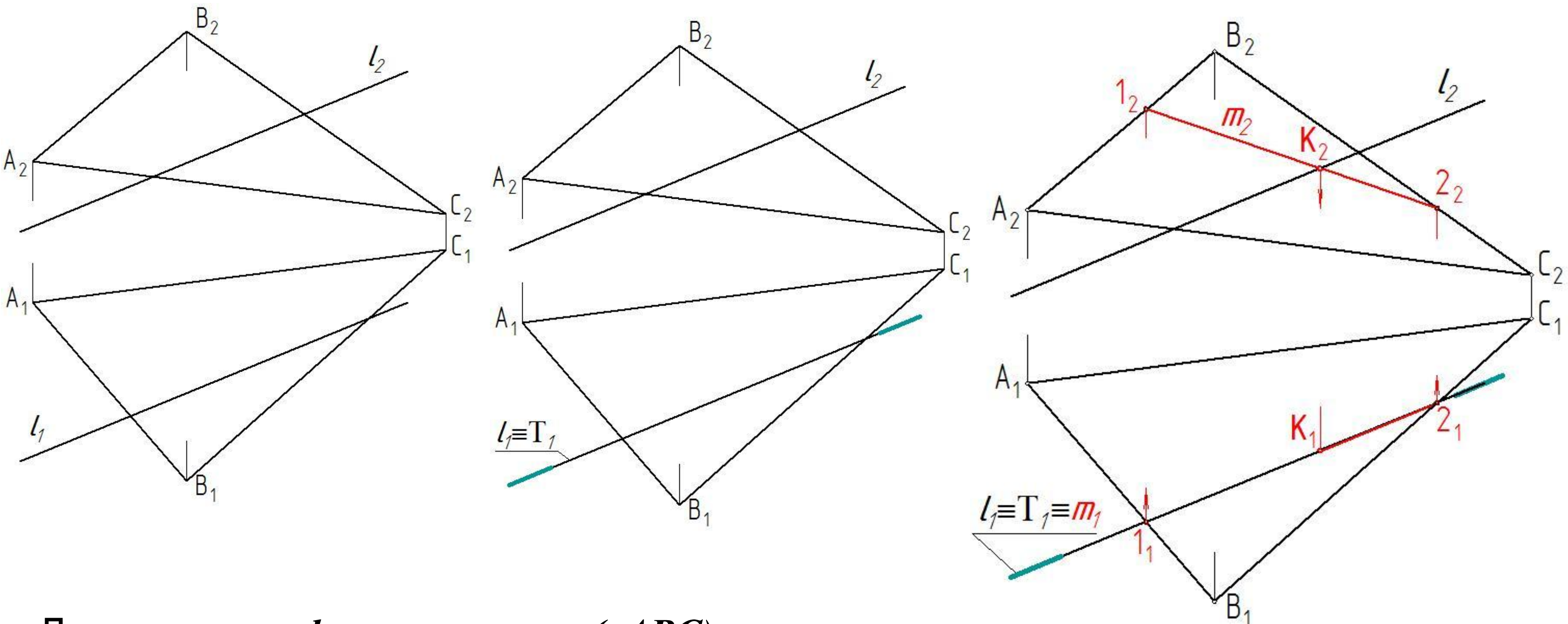
$$m \subset T \Rightarrow m_k \equiv T_k;\quad m \subset \alpha \Rightarrow m\,(1,2)$$

На примере. $m_1 \equiv T_1;\quad m \subset \alpha \Rightarrow m\,(1,2),\ 1 = m \cap AB,\ 2 = m \cap CB$

3. Определить **взаимное положение прямой l и плоскости α.**

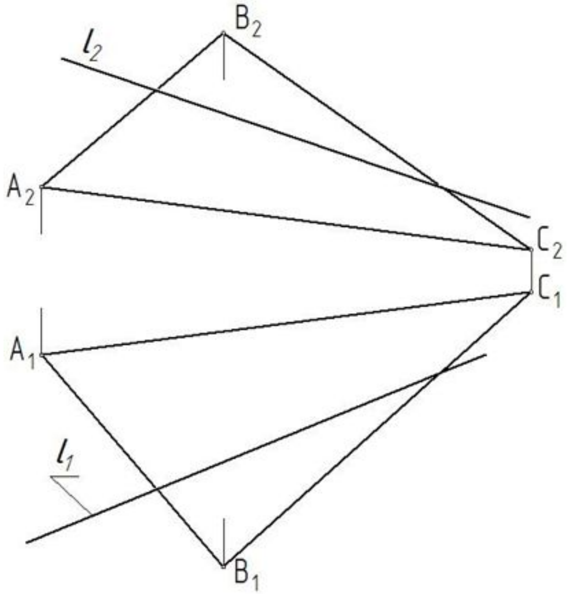
Решение рассмотренной задачи на эпюре

Пример 1



Дано: прямая l и плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.
Определить: взаимное положение прямая l и плоскость α

1. $l \cup T;\ T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$
2. $m = \alpha \cap T \Rightarrow m \subset T \Rightarrow m_1 \equiv T_1 \equiv l_1;$
   $m \subset \alpha\ (\Delta\ ABC) \Rightarrow m(1,2);\ 1 = m \cap AB;\ 2 = m \cap BC;$
3. $l_2 \cap m_2 = K_2 \Rightarrow l \cap m = K, \Rightarrow K = l \cap \alpha$



Пример 2

1.Выбрано $l_1 \equiv m_1$

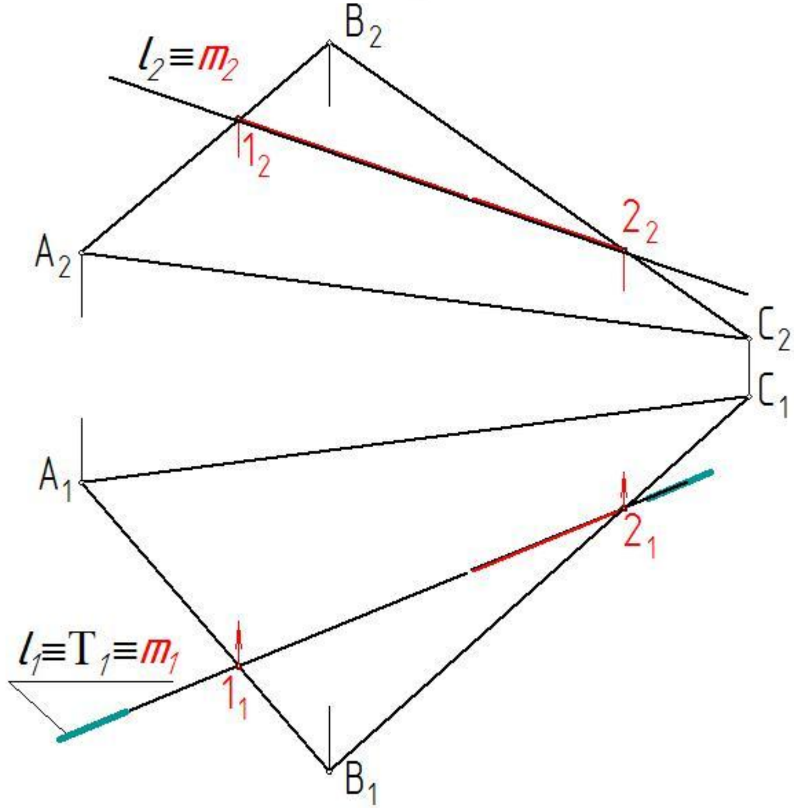
2. $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;

3. Строим m_2.

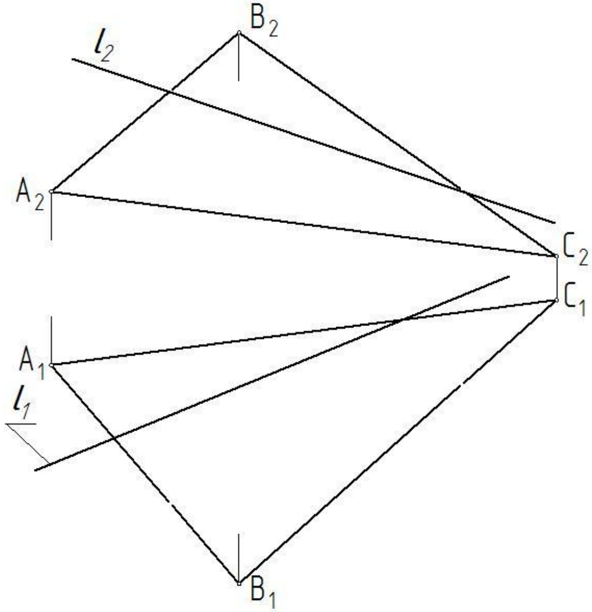
4. Определяем взаимное положение прямых m_2 и l_2

$m_2 \equiv l_2$

5. Следовательно, $l \subset \alpha$



Пример 3



1.Выбрано $l_2 \equiv m_2$

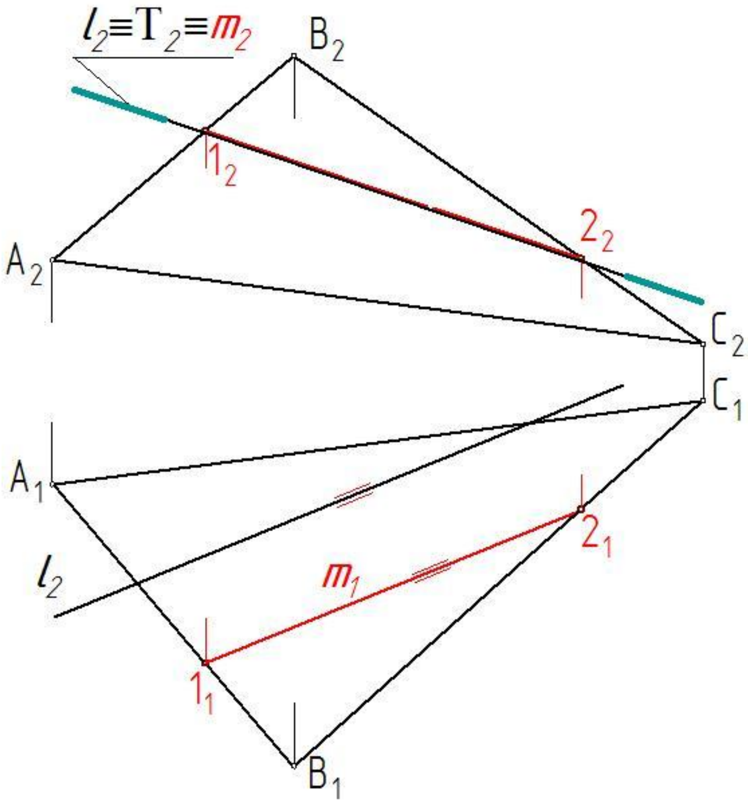
2. $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;

3. Строим m_1.

4. Определяем взаимное положение прямых m_1 и l_1

$m_1 \parallel l_1$

5. Следовательно, $l \parallel \alpha$



Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей этой поверхности

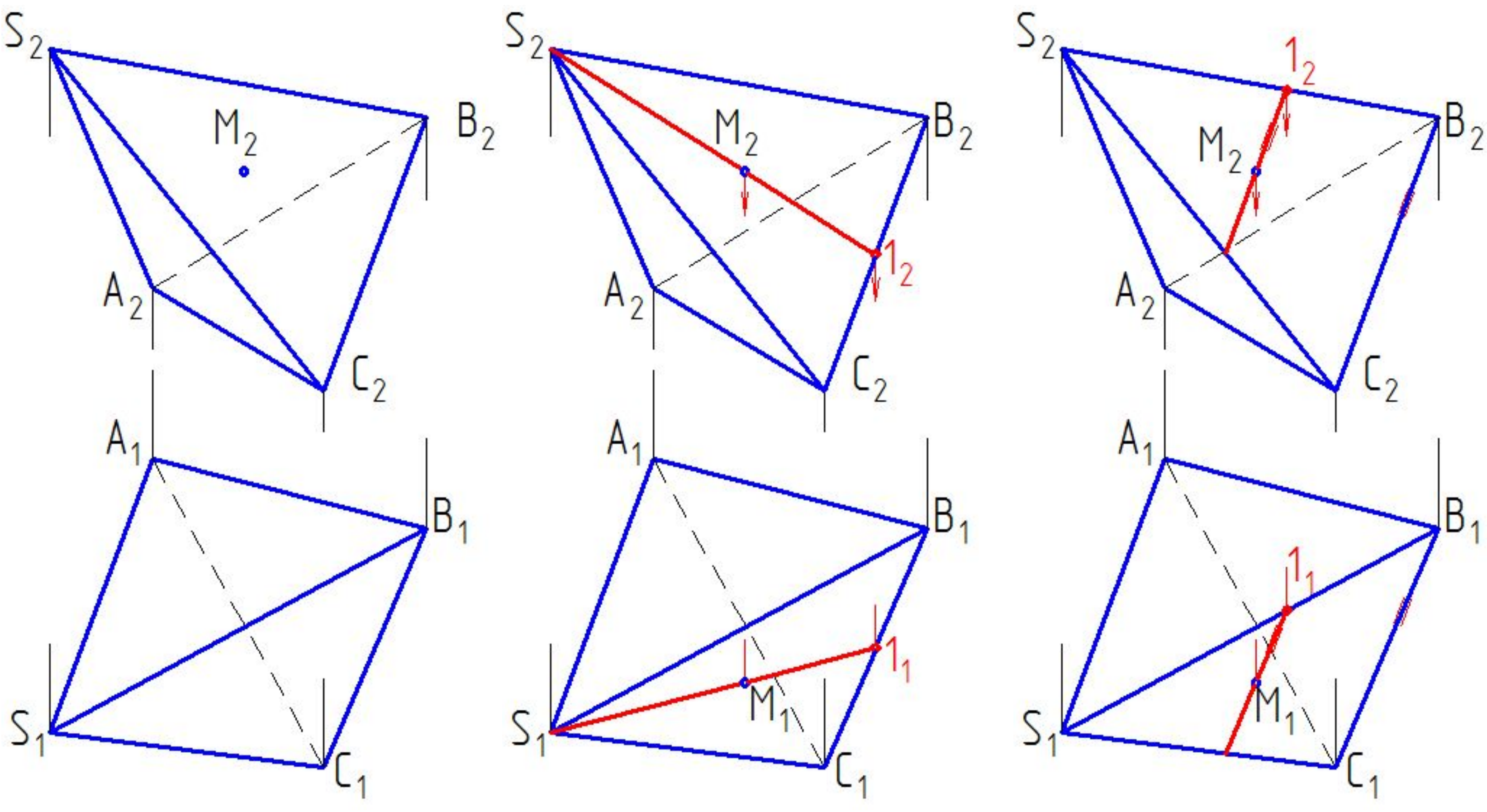
$$\mathbf{A} \in \mathbf{Ф} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in l,\ l \subset \mathbf{Ф}$$

Линия *l* должна на <u>проекциях</u> иметь наиболее простую геометрическую форму: прямая или окружность (по возможности)

Точка на гранной поверхности

Каждая грань – это отсек плоскости.

Следовательно, построение точки на гранной поверхности сводится к построению точки на плоскости.



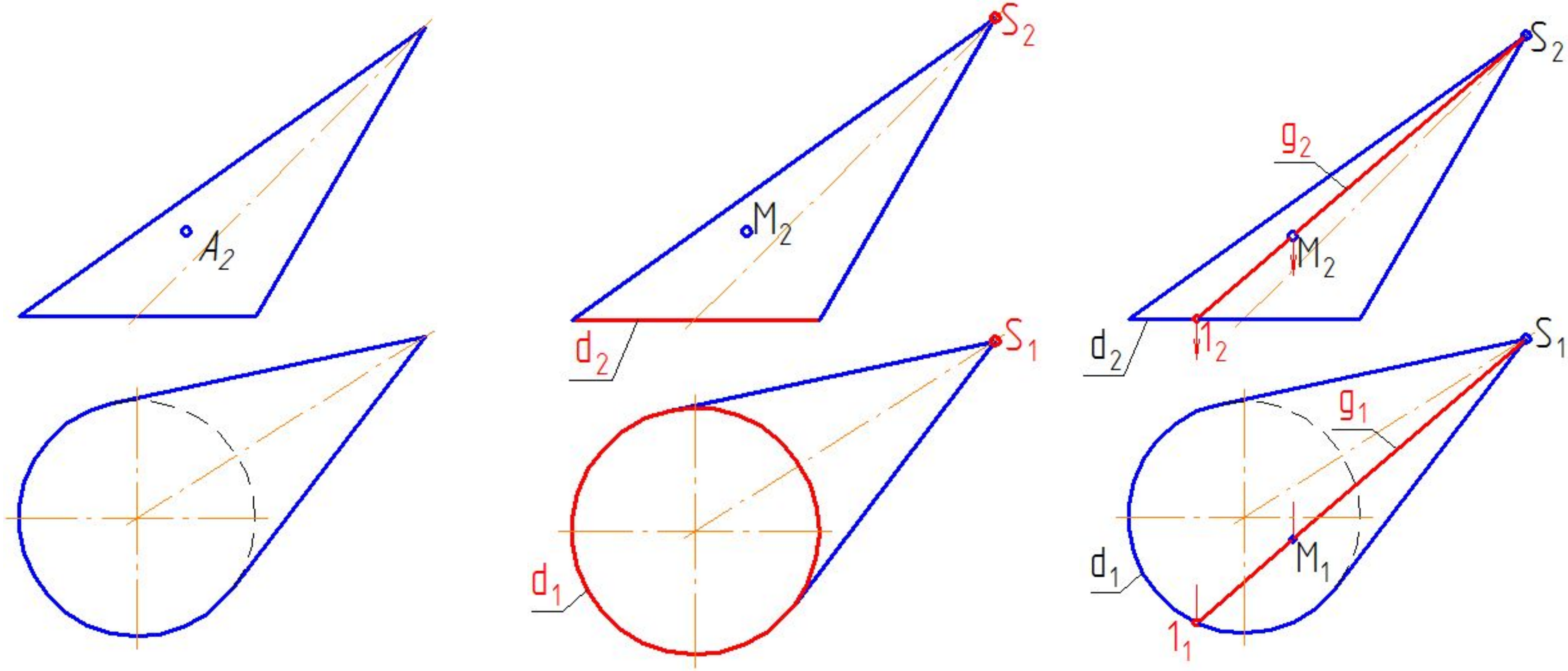
Точка на линейчатой поверхности

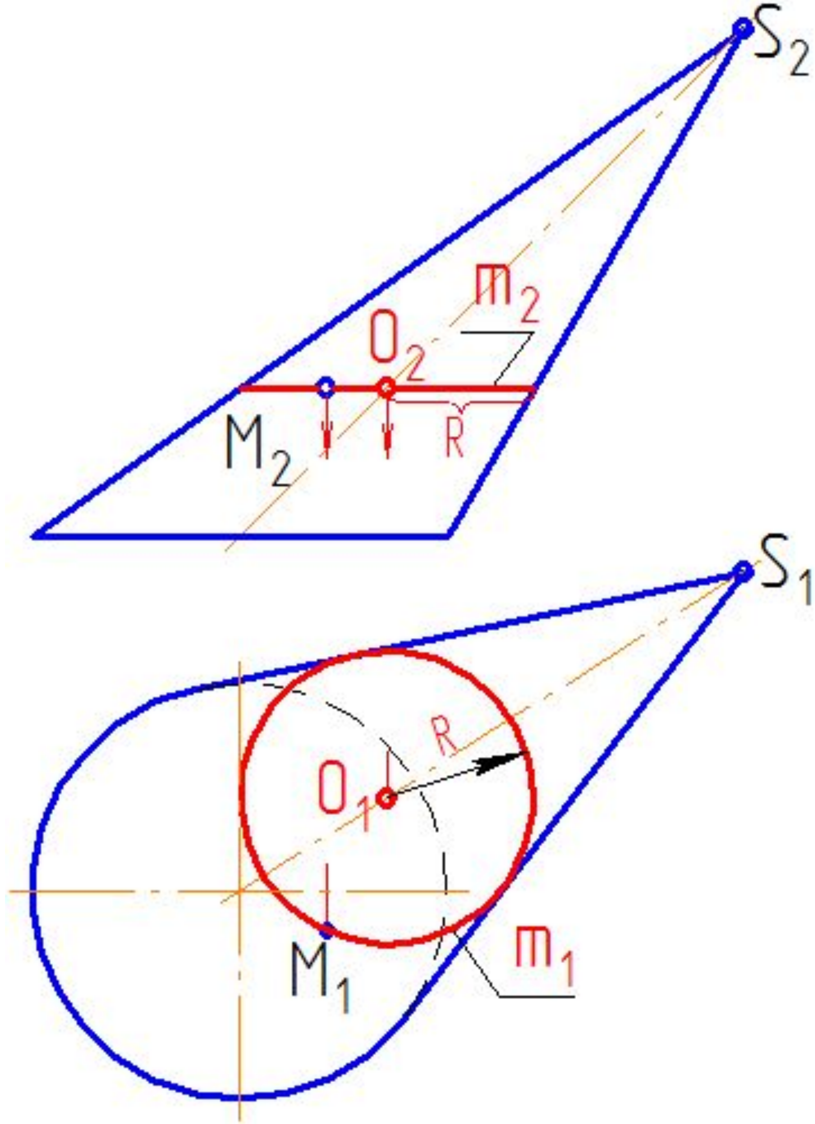
Так как образующей линейчатой поверхности является прямая линия, то условие принадлежности точки поверхности можно сформулировать как принадлежность точки образующей этой поверхности.

Для любой точки Е ($\forall$**Е**), если **Е**$\in$Ф и Ф{g( )( )}, то **Е**$\in$g

Пример

Ф{g(S,d)(S$\in$g, g$\cap$d)}

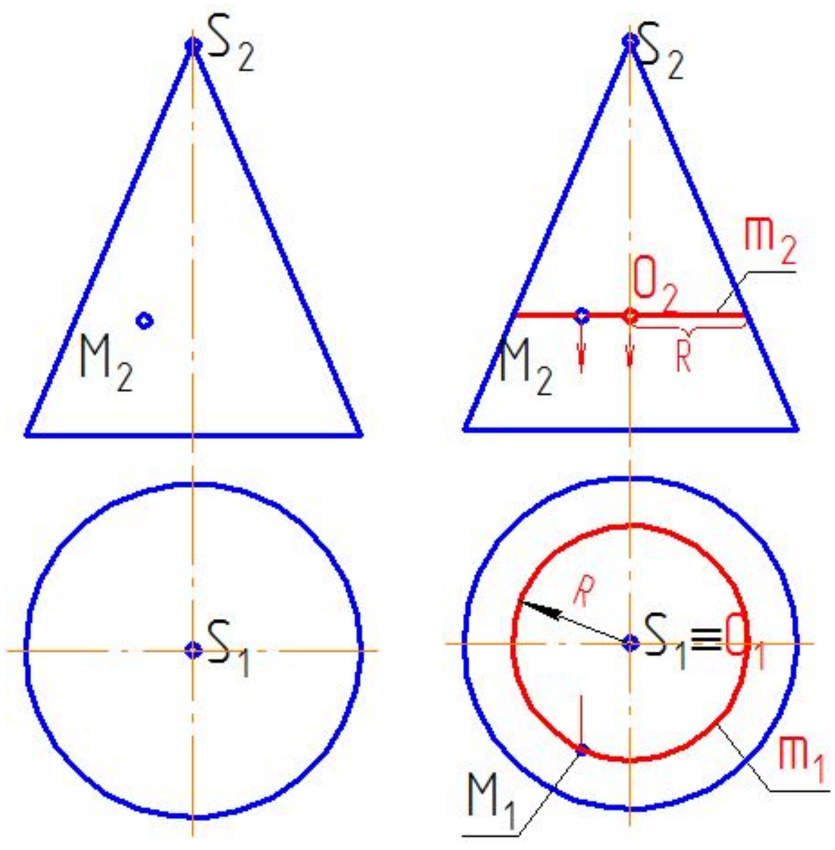



S2
m2
O2
R
M2
S1
R
O1
M1
m1

Точка на поверхности вращения

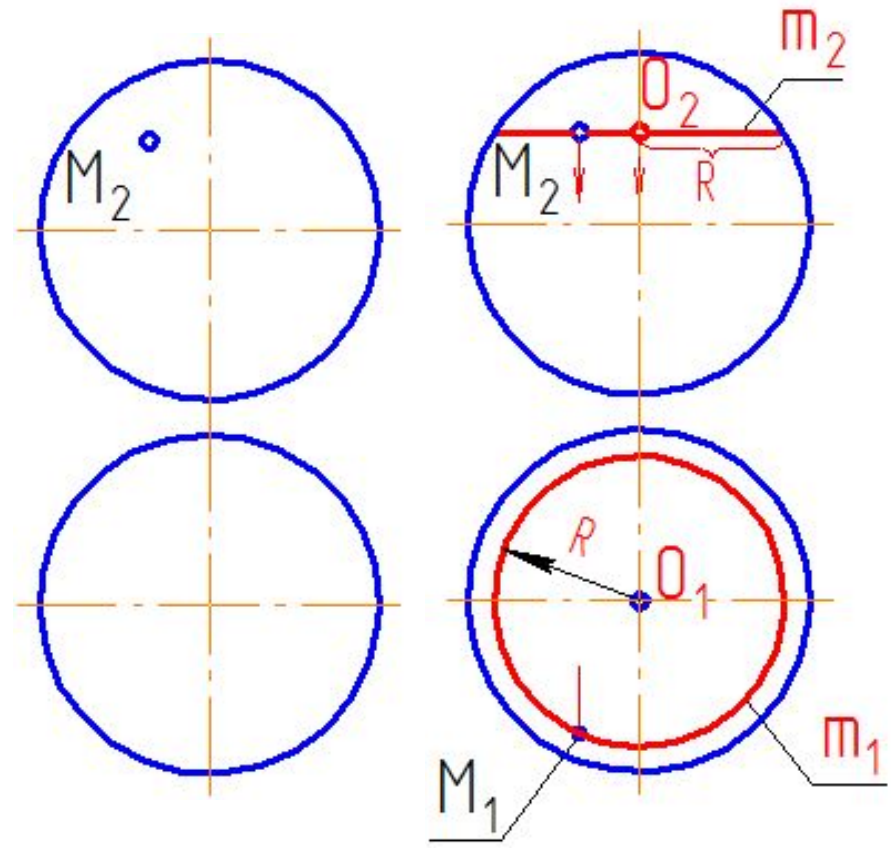
Линейчатая поверхность

Линия *l*, которой должна принадлежать точка, может иметь форму, как прямой линии (образующая), так и окружности (параллель).



Нелинейчатая поверхность

Линия *l*, которой должна принадлежать точка, может иметь только форму окружности (параллель).



Линия на поверхности

- Линия принадлежит поверхности, если все множество ее точек принадлежит этой поверхности.
- Следовательно, чтобы построить линию на поверхности, необходимо представить эту линию, как множество точек, и построить каждую из точек этого множества, используя условие принадлежности точки поверхности.

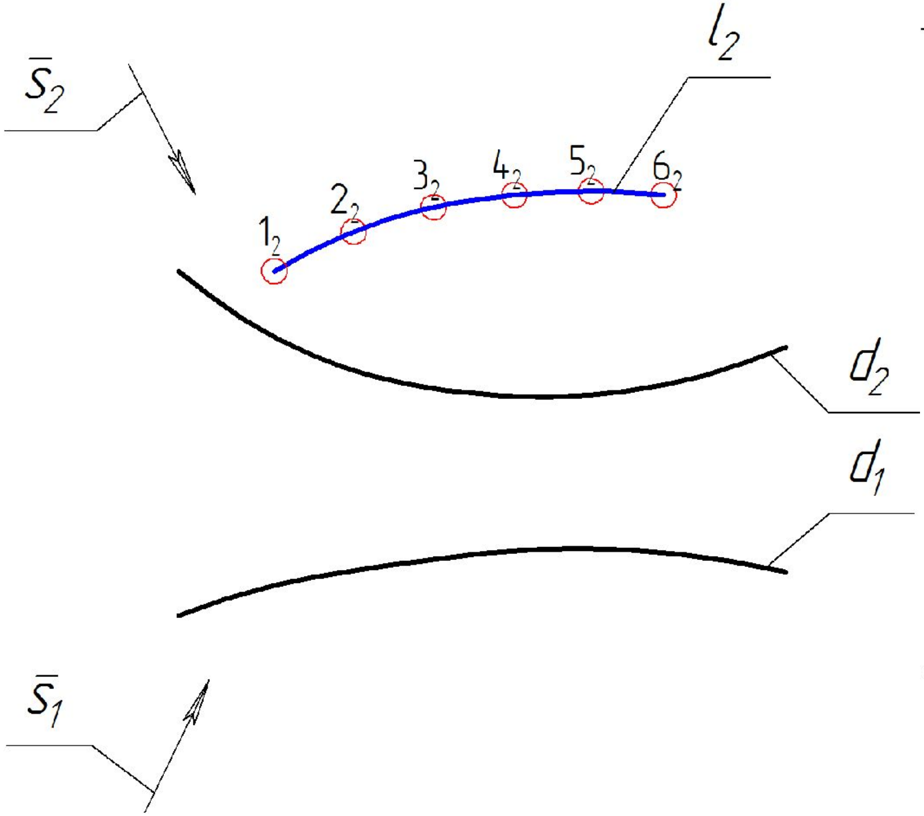
Построение произвольной линии на поверхности

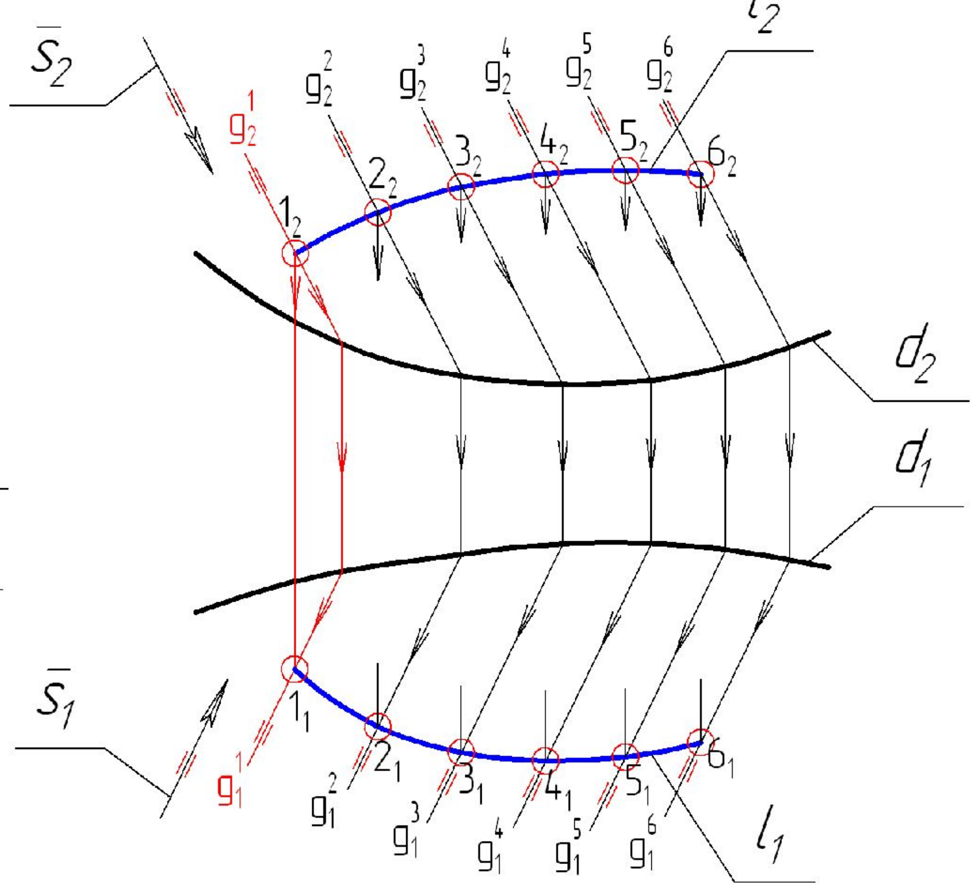
В качестве примера взята цилиндрическая поверхность общего вида

Ф - линейчатая поверхность $\quad \Phi\{g(d,\bar{s})(g\cap d,\ g \parallel \bar{s})\}$

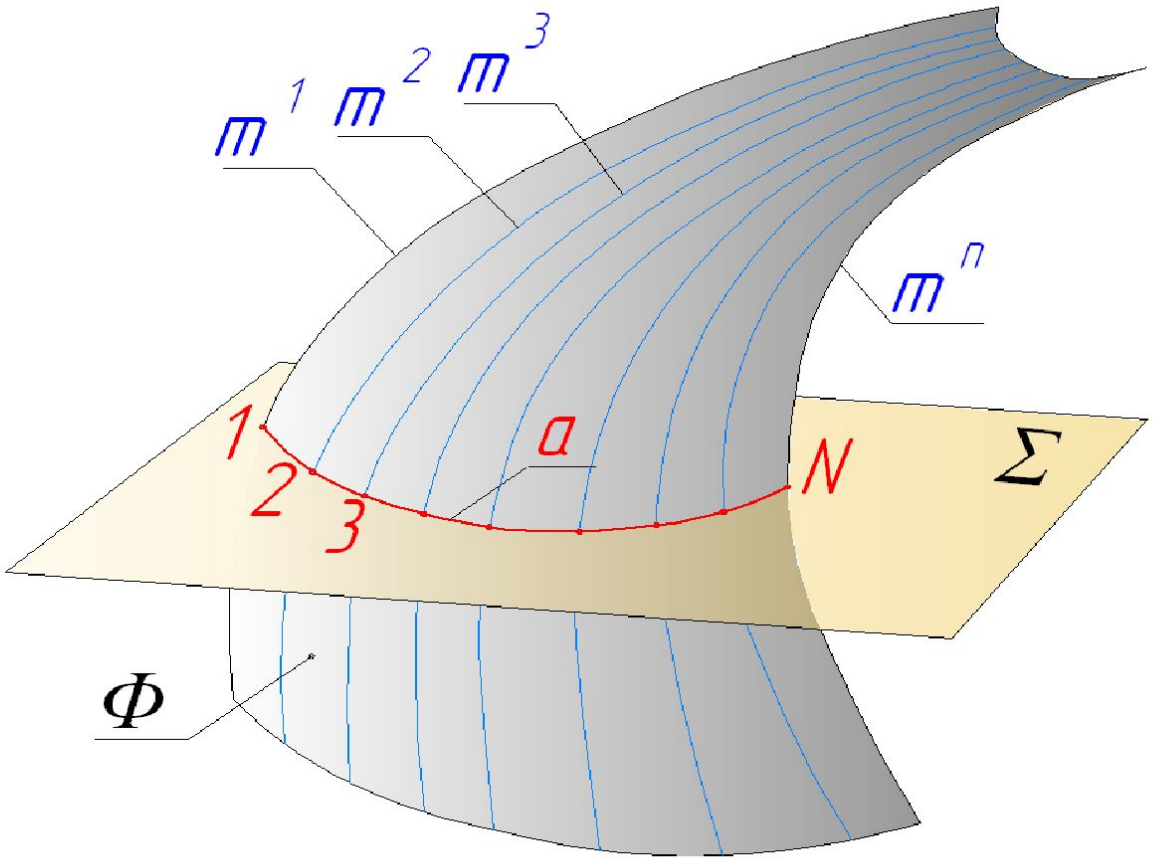
Следовательно, для $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$, точка $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g} \in \Phi$

$\boldsymbol{l} \subset \Phi \quad \boldsymbol{l}\{1,2,3,\dots\}$





Пересечение поверхности плоскостью



$\Sigma \cap \Phi = a$

$\Phi\{m^1, m^2, \ldots, m^n\}$

$a\{1,2,\ldots,N\}$

$1 = m^1 \cap \Sigma$

$2 = m^2 \cap \Sigma$

....

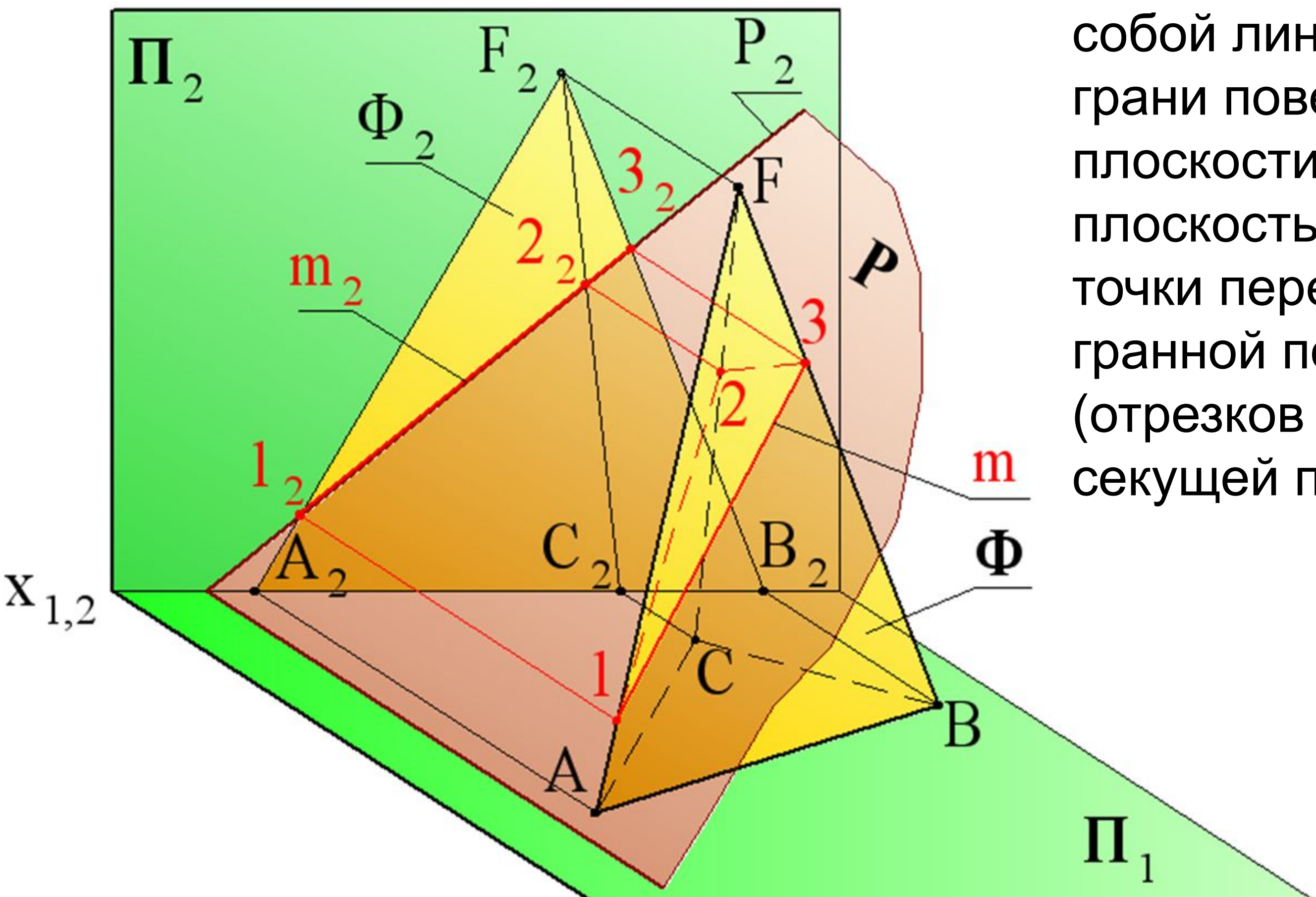
$N = m^n \cap \Sigma$

- Линию пересечения поверхности плоскостью следует рассматривать как множество точек пересечения секущей плоскости с линиями, принадлежащими поверхности.
- Форма линии пересечения поверхности плоскостью определяется формой заданной поверхности и положением плоскости относительно этой поверхности.
- Для кривой поверхности, *в общем случае*, линия пересечения - это плоская кривая линия.

Из всего множества точек линии пересечения должны быть обязательно построены следующие точки:

- точки, определяющие габариты формы фигуру сечения;
- точки, определяющие габариты фигуры сечения по высоте, глубине и длине;
- точки, определяющие видимость фигуры сечения на проекциях.

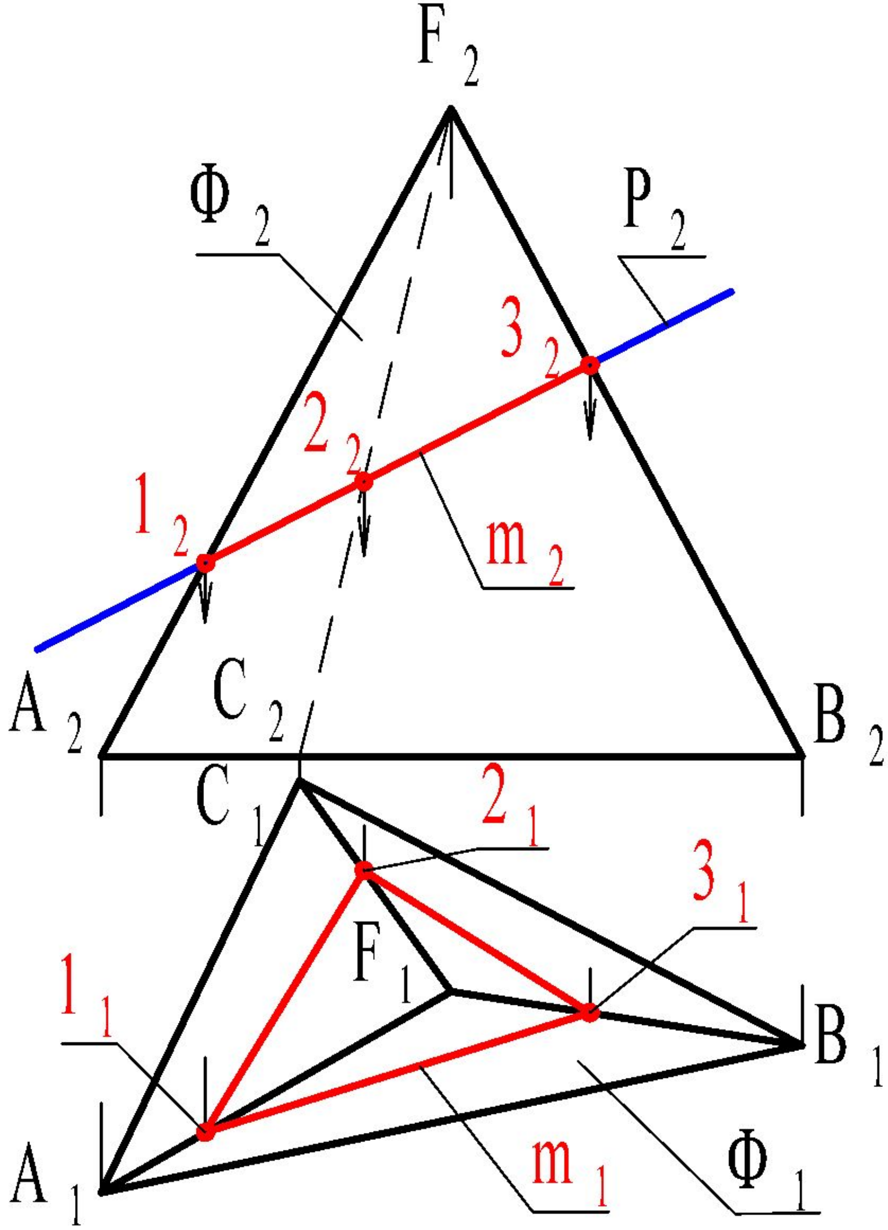
Пересечение гранной поверхности плоскостью



При пересечении гранной поверхности плоскостью линия пересечения – это ломаная линия, каждый участок которой – отрезок прямой, представляющий собой линию пересечения грани поверхности (отсека плоскости) с секущей плоскостью, а точки излома – точки пересечения ребер гранной поверхности (отрезков прямых) с той же секущей плоскостью.

Следовательно, решение задачи на построение линии пересечения гранной поверхности плоскостью сводится к определению точек пересечения ребер гранной поверхности с принятой секущей плоскостью (пересечение прямой с плоскостью).

Ф – трехгранная пирамида. **Р** – секущая плоскость. $\mathbf{P} \perp \mathbf{\Pi}_2$.
Простроить линию пересечения поверхности **Ф** пирамиды плоскостью **Р**.



$$m = \Phi \cap P;$$

$$m \subset P \text{ и } m \subset \Phi$$

$$P \perp \Pi_2 \Rightarrow P_2 \equiv m_2$$

$$m\{1,2,3\};$$

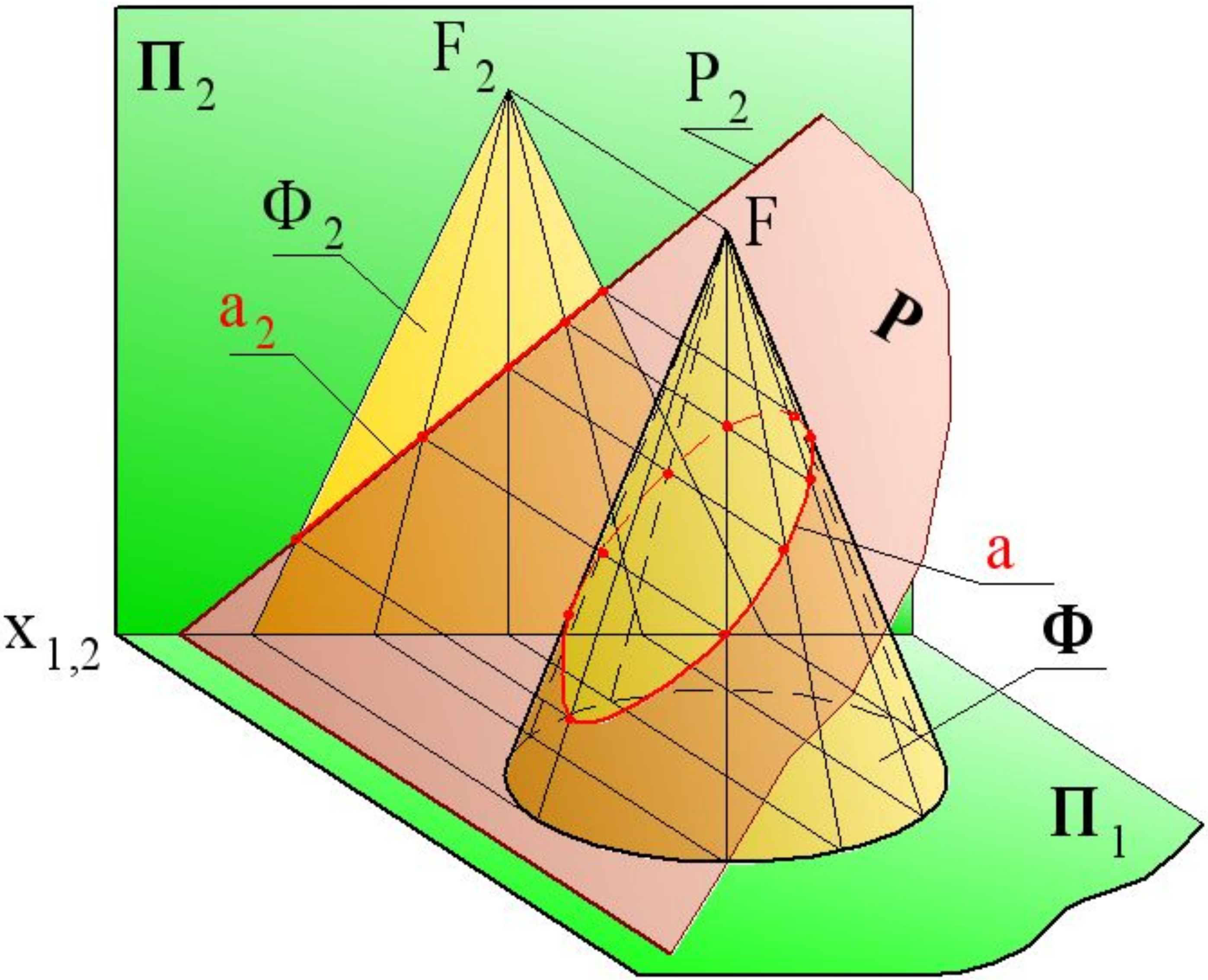
$$1 = AF \cap P;$$

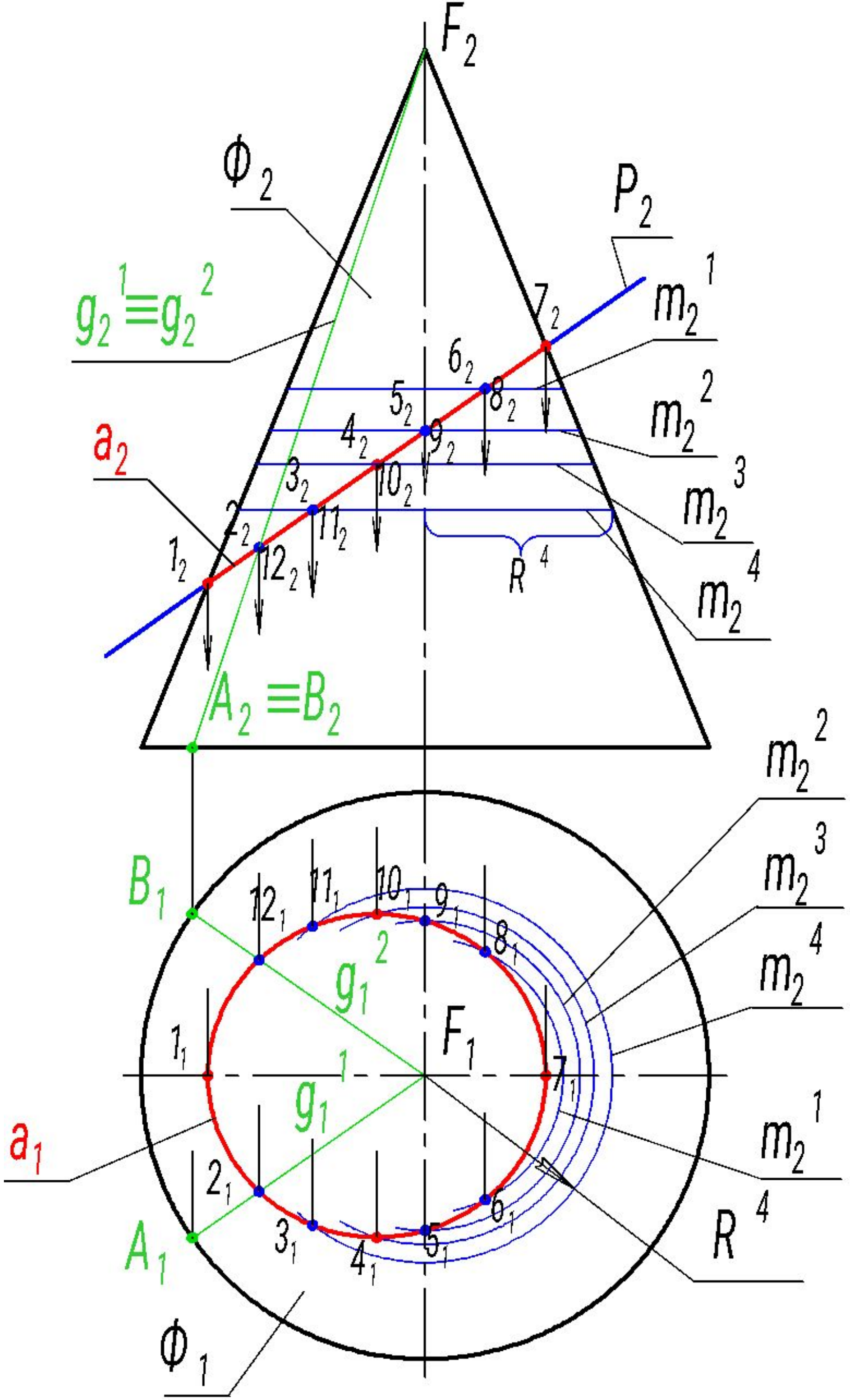
$$2 = CF \cap P;$$

$$3 = BF \cap P$$

Пересечение конической поверхности плоскостью

В общем случае решение задачи на построение линии пересечения сводится к определению точек пересечения образующих поверхности с принятой секущей плоскостью.



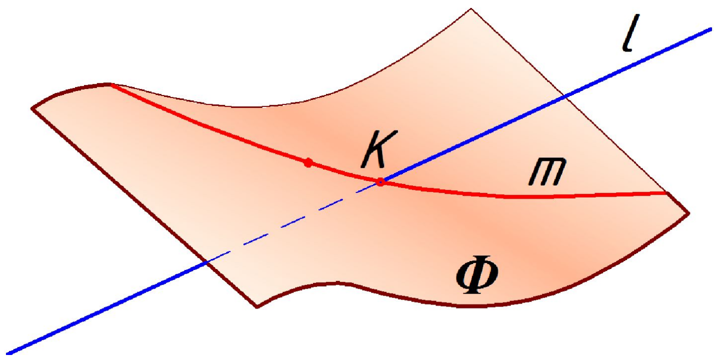


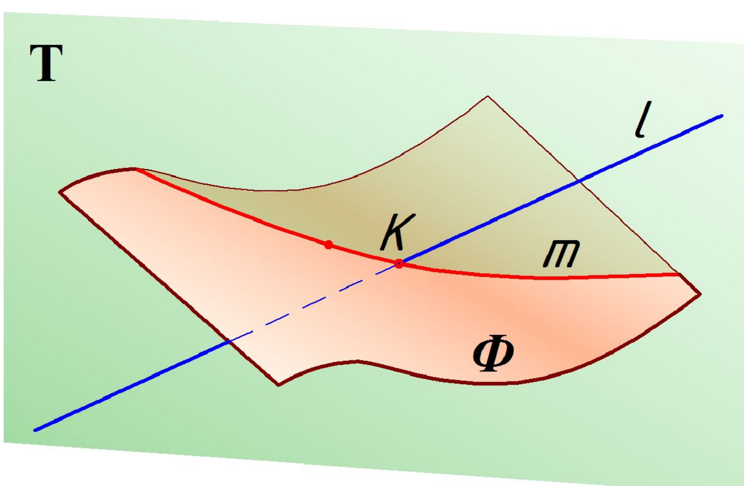
Данная коническая поверхность относится к классу линейчатых и подклассу поверхностей вращения. Следовательно, для построения точки на поверхности можно использовать, как прямую линия (образующую), так и окружность (параллель).

Пересечение прямой линии с поверхностью

Прямая пересекает поверхность, если она пересекает какую-либо линию, принадлежащую этой поверхности

$$\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{\Phi} = \{K^1, K^2, \ldots\}, \quad \{K^1, K^2, \ldots\} = \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m}\ ;\ \boldsymbol{m} \subset \boldsymbol{\Phi}$$





Линию ***m***, принадлежащую поверхности ***Φ***, следует рассматривать как линию пересечения самой поверхности ***Φ*** с какой-то плоскостью, например, ***T***, в которую заключена прямая ***l***.

Плоскость ***T*** может быть какой угодно плоскостью, но ее положение в пространстве следует выбирать так, чтобы проекции линии пересечения ***m*** по возможности имели наибо-лее простую геометрическую форму – прямой (ломаной) или окружности.

Наиболее часто плоскость ***T*** принимают проецирующей.

Общий (краткий) алгоритм построения точки пересечения прямой с поверхностью

1. $l \cup T$ **с условием, что**

$T \cap \Phi = m$ – **линия на проекциях возможности наиболее простой геометрической формы.**

Если $T \perp \Pi_к$, то $\Rightarrow m_к \equiv T_к \equiv l_к$)

2. **Строим проекции линии** m.

3. Так как $(l \subset T) \wedge (m \subset T)$

$$\Rightarrow l \cap m = \{K^1, K^2, \ldots\}$$

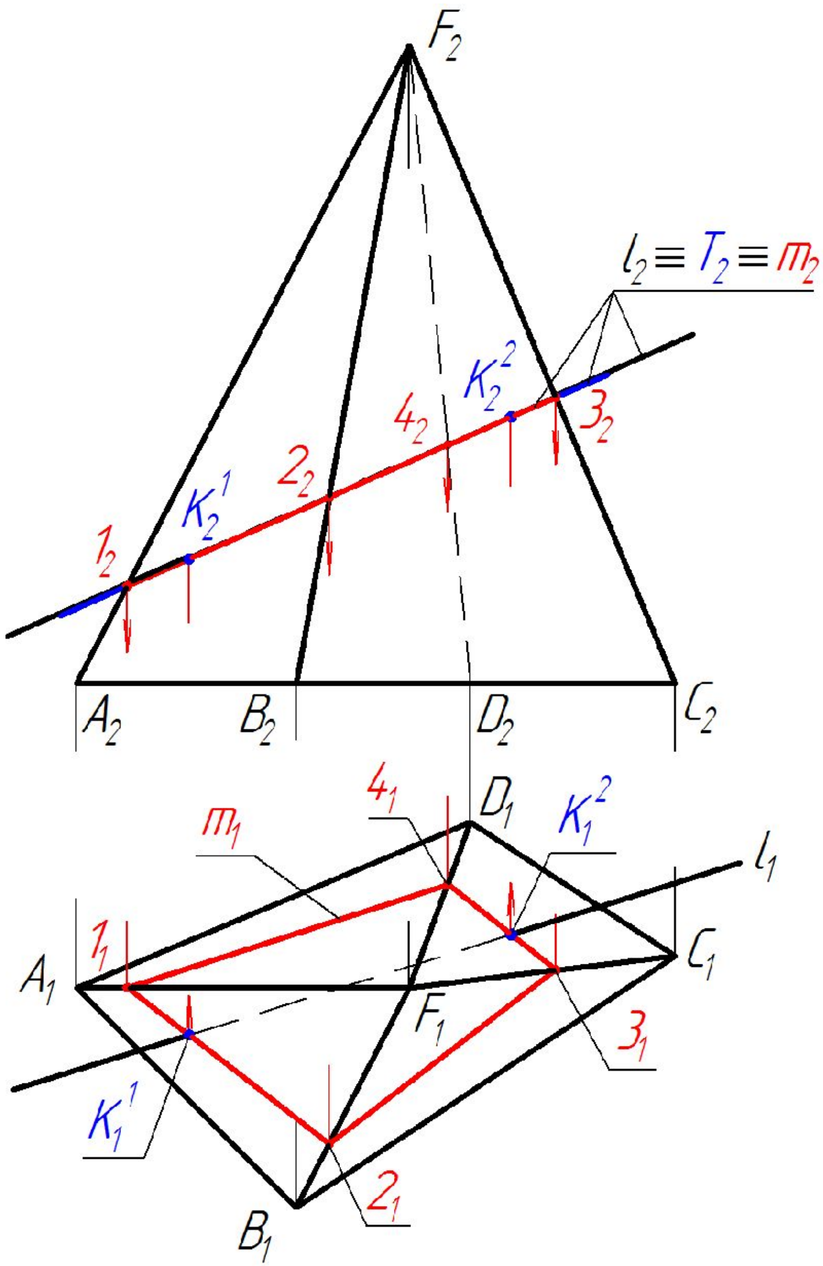
$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset m; \; m \subset \Phi$$

$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset \Phi$$

$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap \Phi$$

Пересечение прямой линии с гранной поверхностью

(на примере пирамидальной поверхности)



FABCD – четырехгранная пирамида. Определить точки $\boldsymbol{K^1}$ и $\boldsymbol{K^2}$ пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с поверхностью пирамиды.

Так как при пересечении гранной поверхности плоскостью всегда образуется ломаная линия, то выбор положения вспомогательной плоскости $\mathbf{T}$ *по отношению к какой-либо плоскости проекций не имеет значения.*

Выбираем фронтально-проецирующую плоскость $\mathbf{T} \perp \mathbf{\Pi_2}$.

Следовательно $\mathbf{T_2} \equiv \boldsymbol{l_2} \equiv \boldsymbol{m_2}$

Строим горизонтальную проекцию $\boldsymbol{m_1}$, при условии, что $\boldsymbol{m} \subset \boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{FABCD})$

$T \cap FA = 1;\ T \cap FB = 2;\ T \cap FC = 3;\ T \cap FD = 4;$

$\Rightarrow \quad m\{1,2,3,4\}$

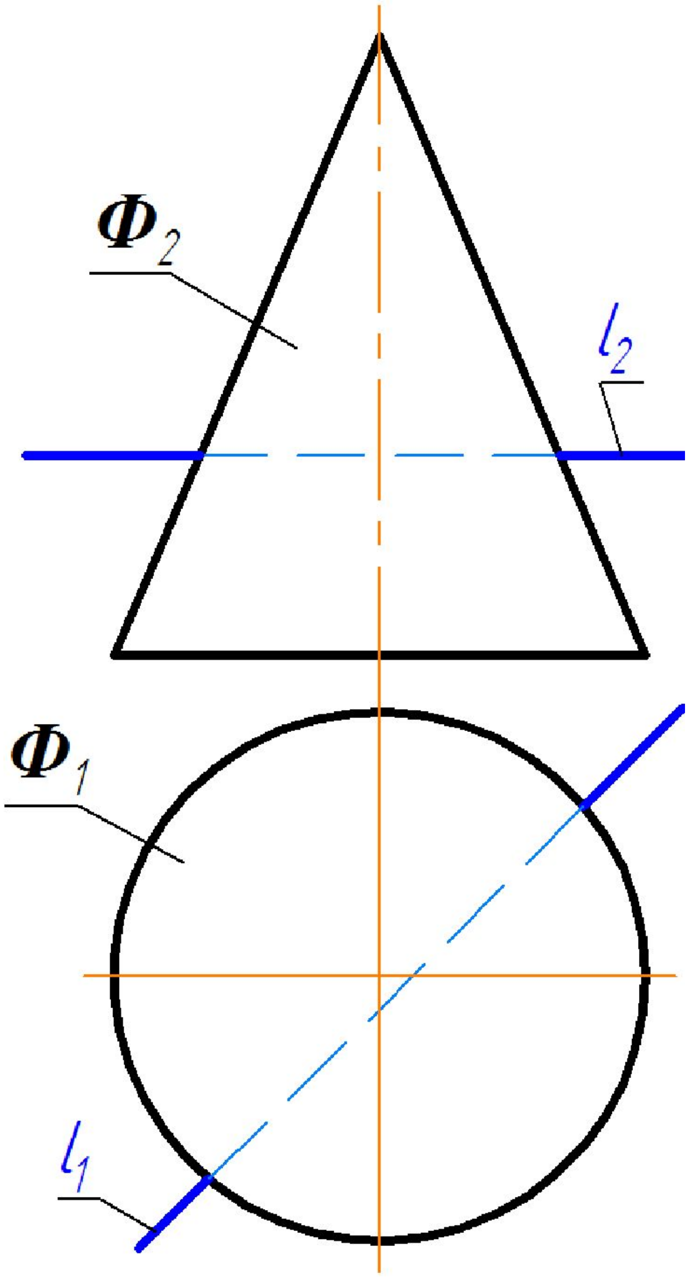
$1 \in FA;\ 2 \in FB;\ 3 \in FC;\ 4 \in FD;$

Определяем точки $\boldsymbol{K^1}_1$ и $\boldsymbol{K^2}_1$ пересечения линии $\boldsymbol{m_1}$ с $\boldsymbol{l_1}$.

$m_1 \cap l_1 = \{K^1{}_1\ ,\ K^2{}_1\}$

Строим фронтальные проекции $\boldsymbol{K^1}_2$ и $\boldsymbol{K^2}_2$ точек $\boldsymbol{K^1}$ и $\boldsymbol{K^2}$.

Пересечение прямой линии с конической поверхностью

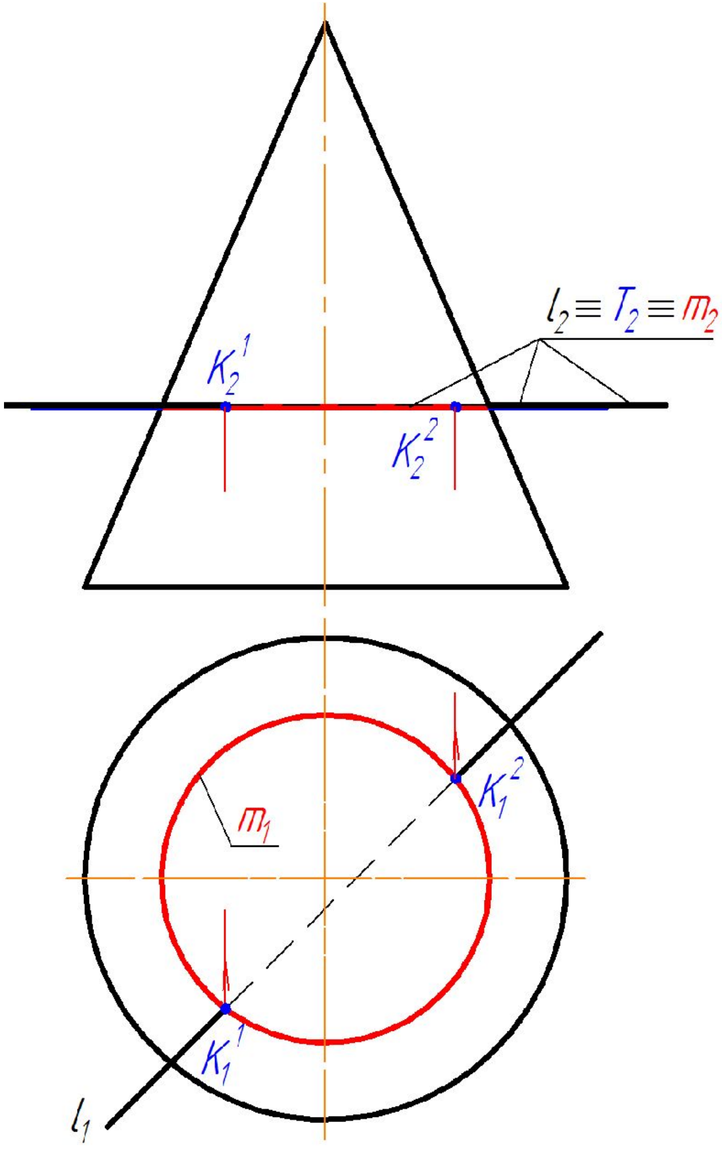


Задана прямая круговая коническая поверхность $\boldsymbol{Ф}$ и прямая $\boldsymbol{l}$. Определить точки $\boldsymbol{К^1}$ и $\boldsymbol{К^2}$ пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с конической поверхностью $\boldsymbol{Ф}$.

Так как коническая поверхность является прямой круговой с вертикальной осью вращения, то все параллели этой поверхности являются горизонталями.

Заданная прямая также является горизонталью.

Следовательно, если прямую $\boldsymbol{l}$ заключить в горизонтальную плоскость уровня, например, $\boldsymbol{T}$, то линией пересечения плоскости $\boldsymbol{T}$ с поверхностью $\boldsymbol{Ф}$ будет одна из параллелей поверхности $\boldsymbol{Ф}$.



Совмещаем $m_2 \equiv l_2$

Строим горизонтальную проекцию *m_1-окружность* линии *m*.

На горизонтальной проекции определяем точки *K^1* и *K^2* пересечения прямой *l* и линии *m*.

Строим фронтальные проекции точек *K^1* и *K^2*.

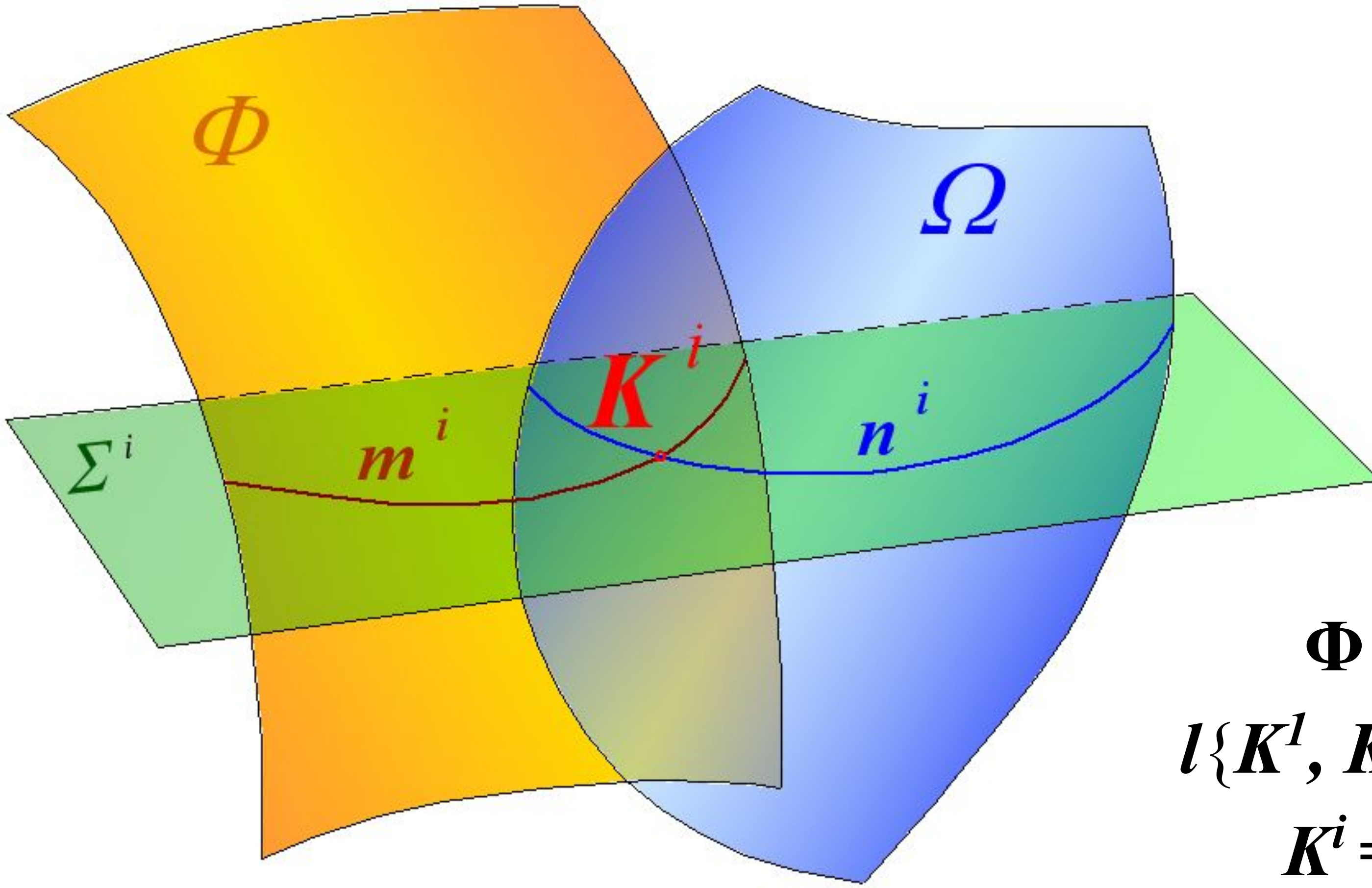
Определяем видимость участков прямой *l*.

Взаимное пересечение поверхностей

Линией пересечения двух поверхностей , в общем случае, является ***пространственная кривая линия***, каждая точка которой может быть представлена как точка пересечения двух линий, принадлежащих каждой из заданных поверхностей и принадлежащих вспомогательным секущим поверхностям-посредникам, как плоским, так и кривым.

Обязательные требования, предъявляемые к секущим поверхностям-посредникам:

- каждая из секущих поверхностей-посредников должна пересекать обе заданные поверхности;
- линии, получаемые в результате пересечения должны пересекаться между собой и иметь, по возможности, наиболее простую геометрическую форму.



$$\Phi \cap \Omega = l$$

$$l\{K^1, K^2, K^3, \ldots K^i\}$$

$$K^i = m^i \cap n^i$$

$$m^i = \Phi \cap \Sigma^i$$

$$n^i = \Omega \cap \Sigma^i$$

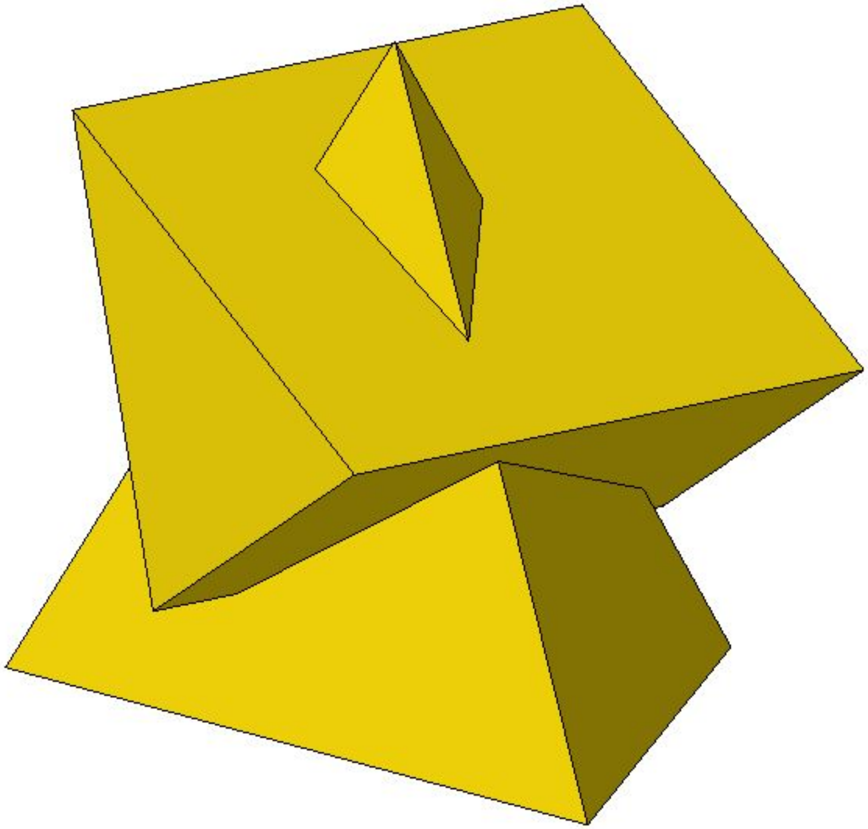
Σ^{i} – вспомогательная секущая поверхность-посредник

Пересечение двух поверхностей может быть полным и неполным (частичным).

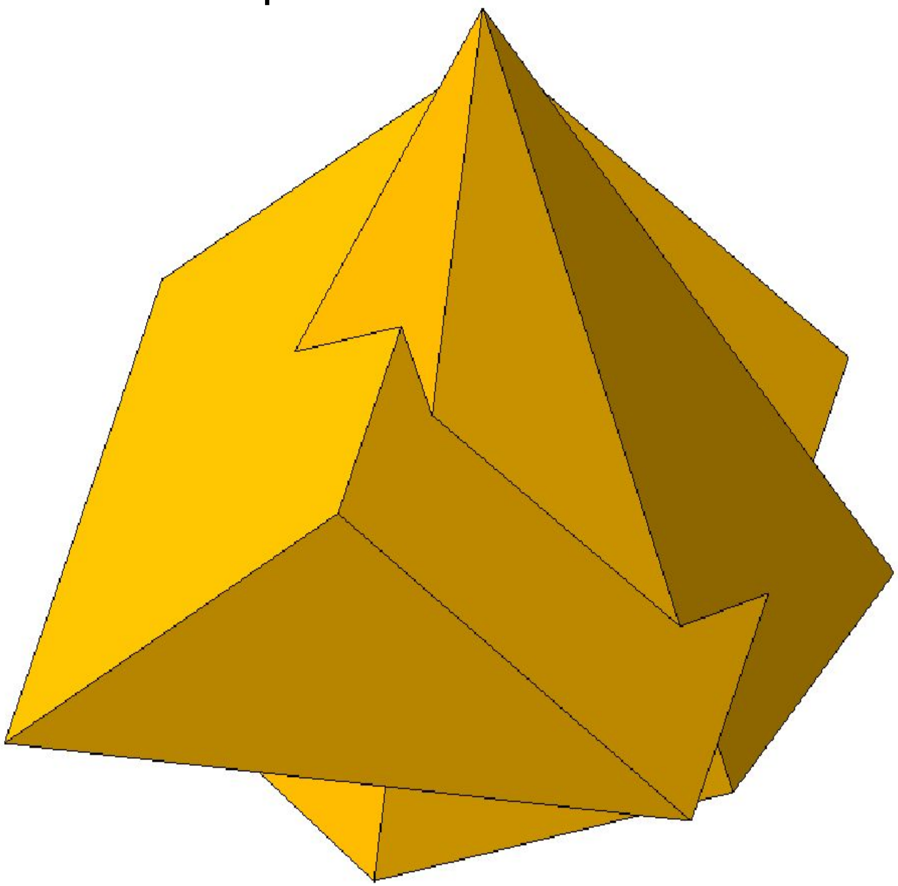
Пересечение поверхностей считается полным, если все образующие одной поверхности пересекаются с другой поверхностью. В общем случае образуются две замкнутые линии пересечения.

В противном случае пересечение считается неполным (частичным). В этом случае формируется только одна замкнутая линия пересечения.

Полное – все боковые ребра одной гранной поверхности пересекаются с поверхностью другой гранной поверхности.



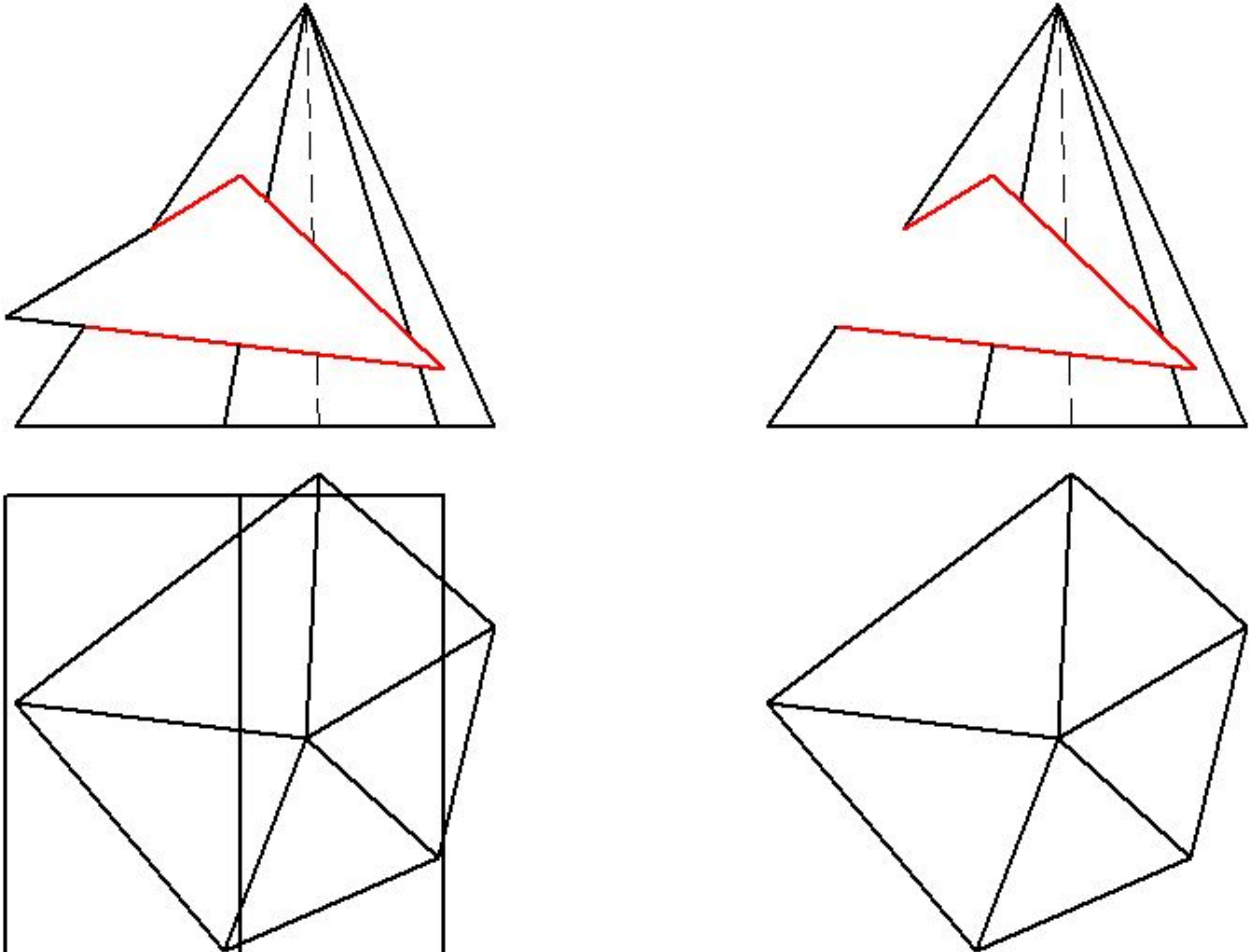
Неполное – часть боковых ребер одной гранной поверхности пересекаются с поверхностью другой гранной поверхности.

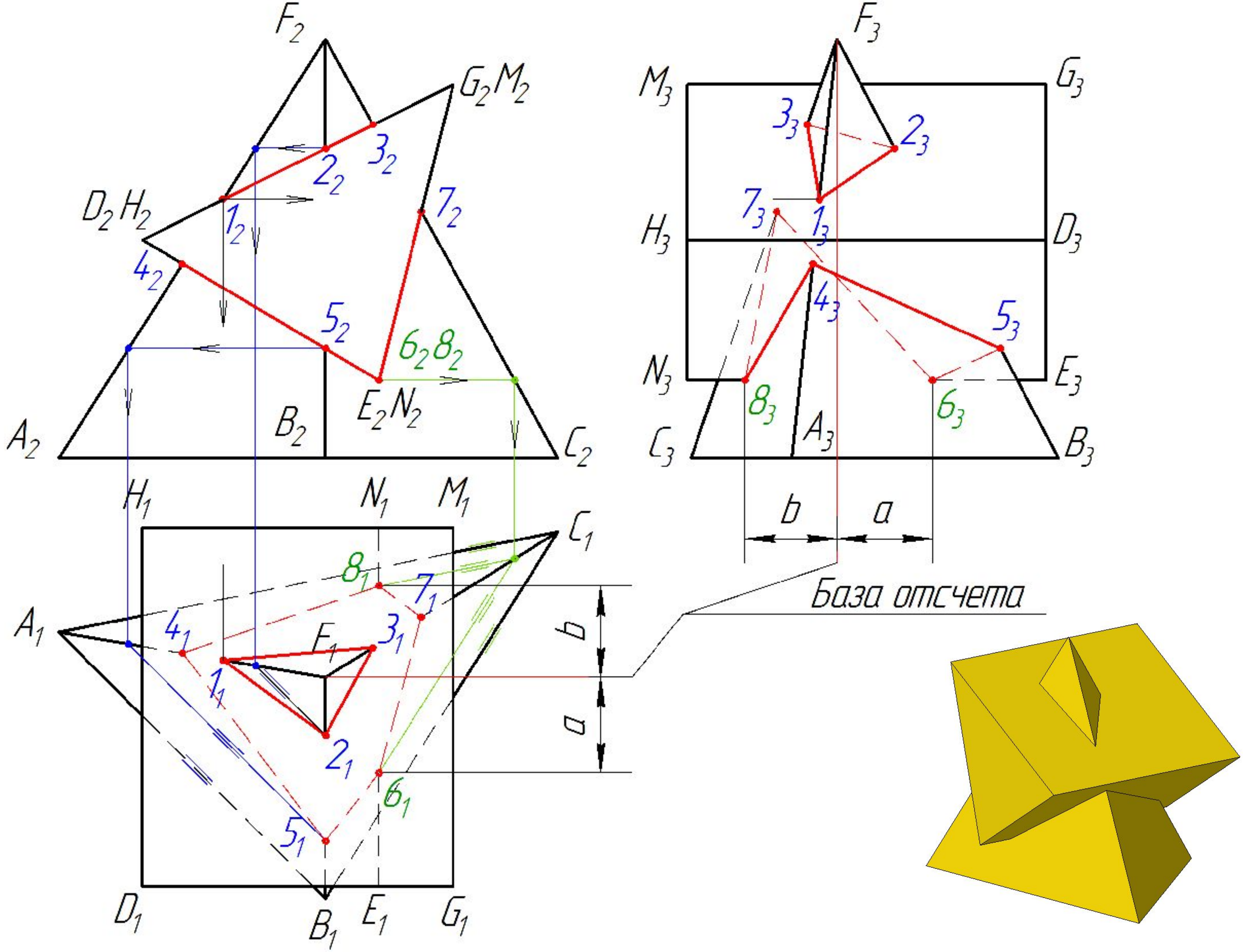


Взаимное пересечение двух гранных поверхностей

Линией пересечения двух гранных поверхностей является ломаная прямая линия, точками излома которой являются точки пересечения ребер одной гранной поверхности с гранями другой, а линиями, соединяющими эти точки, – отрезки прямых взаимного пересечения граней обеих поверхностей.

Т.е. вся задача на построение линии пересечения двух гранных поверхностей сводится к многократному решению задачи на определение точки пересечения прямой с плоскостью.





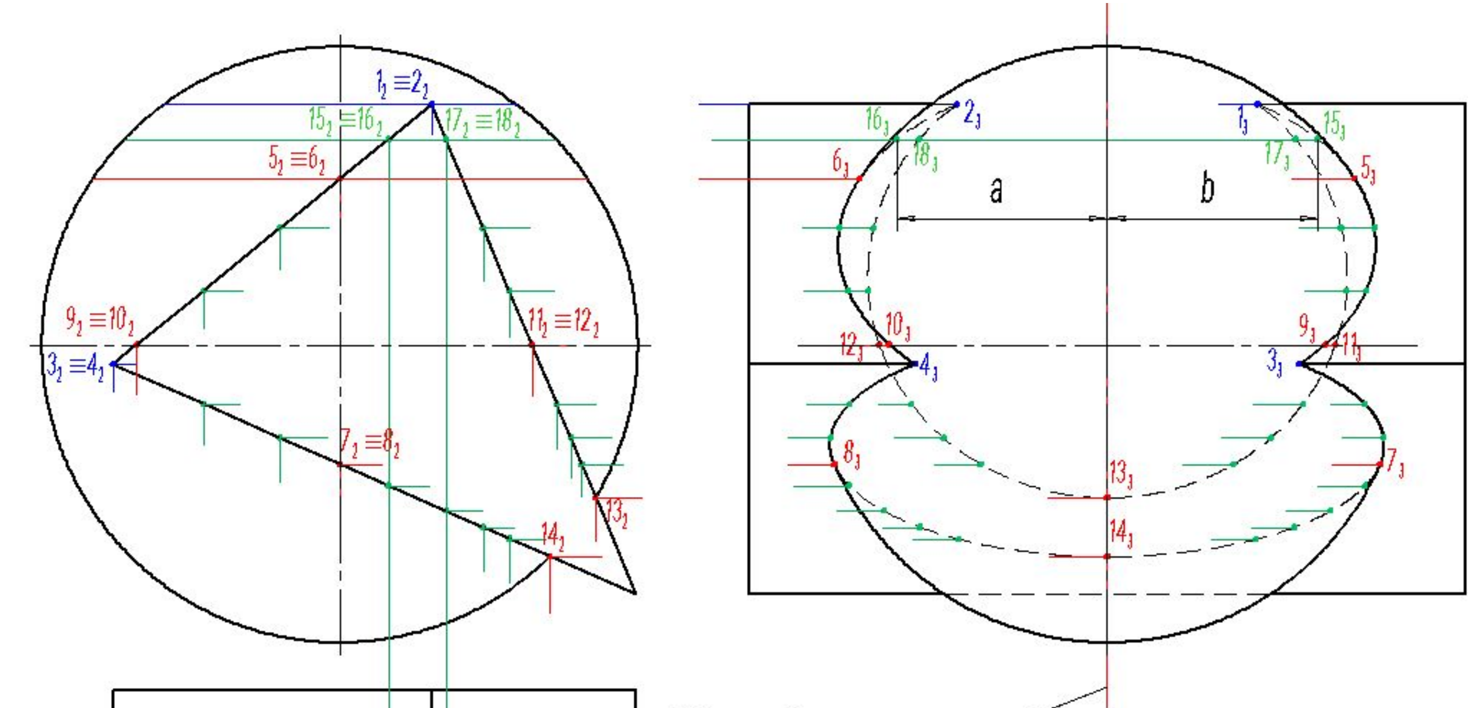
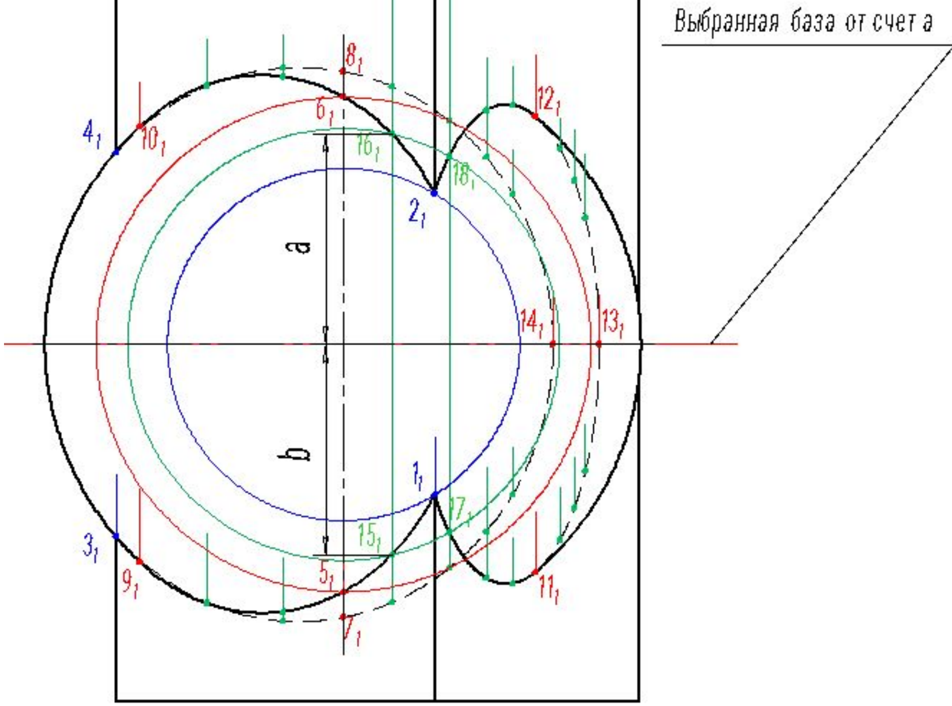
F_2
$G_2 M_2$
2_2
3_2
$D_2 H_2$
1_2
7_2
4_2
5_2
$6_2 8_2$
A_2
B_2
$E_2 N_2$
C_2
F_3
M_3
G_3
3_3
2_3
7_3
1_3
H_3
D_3
4_3
5_3
N_3
E_3
8_3
6_3
C_3
A_3
B_3
b
a
H_1
N_1
M_1
C_1
8_1
7_1
A_1
4_1
F_1
3_1
1_1
2_1
6_1
5_1
D_1
B_1
E_1
G_1
База отсчета

Взаимное пересечение гранной поверхности с кривой поверхностью

Линия пересечения гранной поверхности с кривой поверхностью представляет собой ломаную кривую линию, точками излома которой являются точки пересечения ребер гранной поверхности с кривой поверхностью, а линиями, соединяющими эти точки – плоские кривые, получаемые при пересечении граней гранной поверхности (отсеков плоскостей) с кривой поверхностью.

Т.е. задача на построение линии пересечения гранной поверхности с кривой поверхностью сводится к многократному решению двух задач:

- определение точек пересечения прямой линии с кривой поверхностью;
- построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью.



Выбранная база от счет а
a
b