НАДЁЖНОСТЬ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Автор:
кандидат технических наук, доцент
кафедры «Вагоны и вагонное хозяйство»
Александр Анатольевич Иванов

МОСКВА-2017

Российские железные дороги

ТЕМА 4
СТАТИСТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ

4.9. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Точечные оценки параметров закона распределения эффективны, только когда в выборке большое количество наработок до отказов. Для высоконадёжных деталей эффективность точечных оценок резко падает.

Поэтому возникает необходимость контроля качества точечных оценок, для чего используются интервальные оценки, т.е. определяется интервал $[\psi_1;\psi_2]$*, который с заданной (требуемой) вероятностью* 1-α *накрывает неизвестное оценённое значение параметра* Q_i.

$$P\{\psi_1 \le Q_i \le \psi_2\} = 1 - \alpha$$

причём интервал указывают для каждого из параметров Q_i.

Отрезок $[\psi_1;\psi_2]$ называют доверительным интервалом для параметра Q_i. В зависимости от результатов опытов точечная оценка параметра может принять любое значение в этом интервале с вероятностью 1-α.

ψ_1 – нижняя доверительная граница интервала

ψ_2 – верхняя доверительная граница интервала

α – уровень значимости ошибки. Это вероятность ошибки, которой допустимо пренебречь в рамках решения конкретной задачи (0,05-0,1)

Рассмотрим пример получения доверительного интервала.
Пусть $t_1, t_2, t_3,\dots, t_n$ – полная выборка.
Пусть выборка подчиняется нормальному закону распределения:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot EXP\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2} \right),$$

a **и** σ^2 **– параметры закона распределения (математическое ожидание и дисперсия наработки до отказа)**

Рассмотрим одну из задач: определим доверительный интервал для параметра a, при условии, что σ^2 известен

Поскольку каждый элемент выборки – можно трактовать как случайную величину, которая подчиняется нормальному закону распределения, то статистическое среднее значение наработки до отказа для полной выборки:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i ,$$

также является случайной величиной с нормальным законом распределения. Тогда случайная величина:

$$\xi = \frac{\bar{t} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n},$$

также имеет нормальное распределение, но с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1. Эта величина имеет закон распределения, называемый стандартным нормальным распределением и его значения приведены в спец.таблицах нормального распределения

Зададим доверительную вероятность α, а по таблицам нормального распределения найдём величину (t_α) квантиля нормального закона распределения уровня α.

Это равносильно записи: $P\{\xi < t_\alpha\} = 1 - \alpha,$

$$\text{т.е.} \qquad P\left\{\left|\frac{\bar{t} - a}{\sigma}\right| \cdot \sqrt{n} < t_\alpha\right\} = 1 - \alpha.$$

Разрешим неравенство, заключённое в скобках, получим:

$$P\left\{\bar{t} - \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{t} + \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha.$$

Тогда неизвестный параметр a расположен в интервале :

$$\left[\bar{t} - \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{t} + \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$$

с вероятностью, равной 1–α.

Например, при α=0,001 по таблицам нормального распределения t_α=3.

4.10. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

*С любой упорядоченной по возрастанию выборкой можно связать статистический аналог функции распределения, который называют **эмпирической** (выборочной) функцией распределения.*

Для __полной выборки__ значения эмпирической функции распределения можно получить:

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h(t-\tau_i)}{n}$$

где

n – количество наработок до отказов;

$h(t-\tau_i)$ – единичная функция Хевисайда;

τ_i – наработка до i-го отказа.

Единичная функция Хевисайда имеет вид:

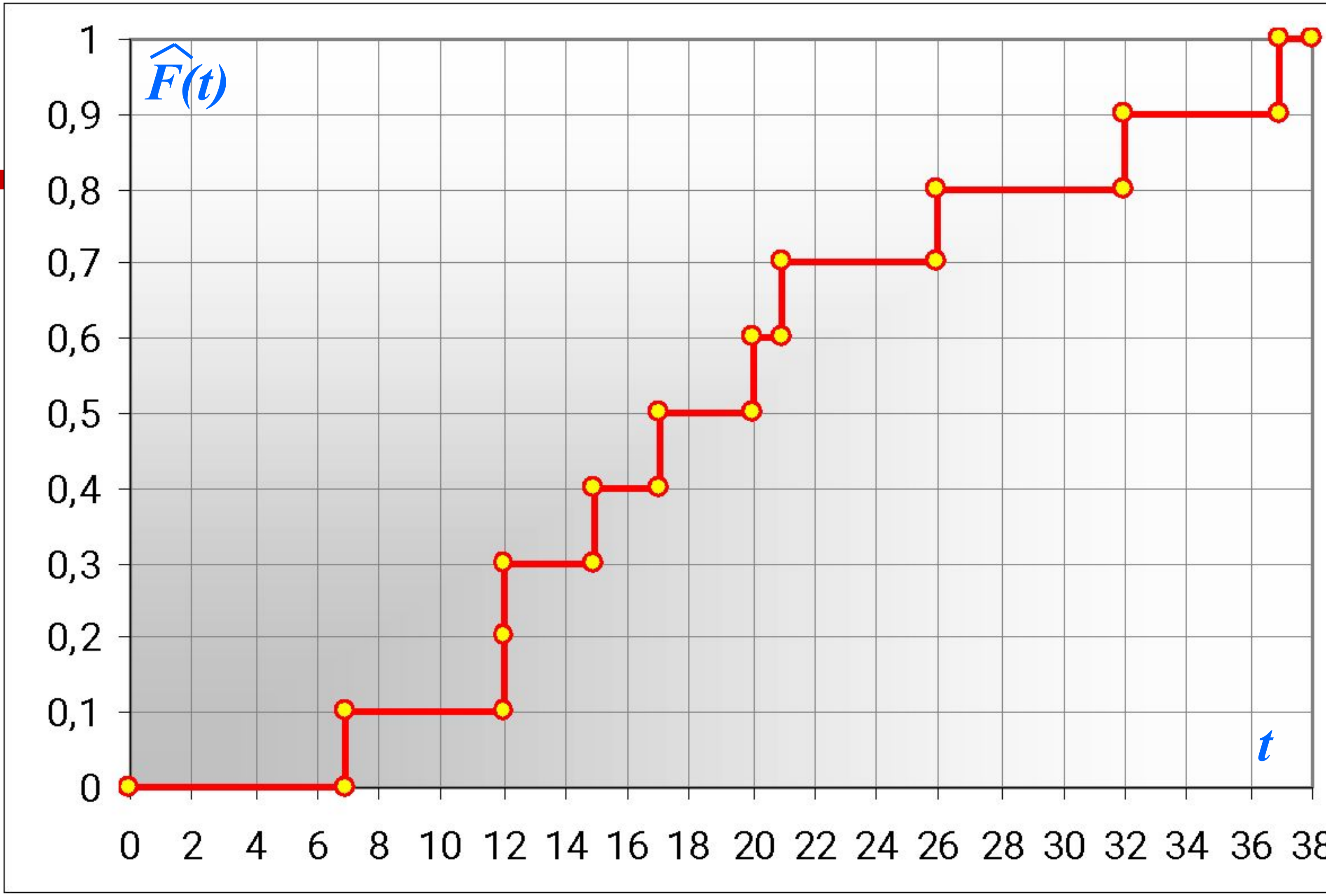
$$h(t-\tau_i)=\begin{cases}1, & \text{при} \quad t>\tau_i;\\ 0, & \text{при} \quad t\le\tau_i.\end{cases}$$

Рассмотрим пример:

Пусть получена полная выборка, состоящая из 10 элементов: $\tau_1=7$, $\tau_2=12$, $\tau_3=12$, $\tau_4=15$, $\tau_5=17$, $\tau_6=20$, $\tau_7=21$, $\tau_8=26$, $\tau_9=32$, $\tau_{10}=37$ $(i=\overline{1,10})$

Получим значения эмпирической функции распределения, используя табличную форму.

t	t	$h(t-\tau_i)$										Σh	$\hat{F}(t)$
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$		
		$\tau_1=7$	$\tau_2=12$	$\tau_3=12{,}1$	$\tau_4=15$	$\tau_5=17$	$\tau_6=20$	$\tau_7=21$	$\tau_8=26$	$\tau_9=32$	$\tau_{10}=37$		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$t=\tau_1-dt$	6,999	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
$t=\tau_1$	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
$t=\tau_1+dt$	7,001	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,10
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$t=\tau_2-dt$	11,999	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,10
$t=\tau_2$	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,10
$t=\tau_2+dt$	12,001	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,20
$t=\tau_3-dt$	12,099	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,20
$t=\tau_3$	12,1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,20
$t=\tau_3+dt$	12,101	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0,30
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$t=\tau_{10}+dt$	37,001	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1,00



Эмпирическая функция распределения для полной выборки

ЗАМЕЧАНИЕ:

Аналогичным образом можно выполнить построение для однократно усечённой выборки, только в знаменателе вместо **n** необходимо поставить **N** – объём выборки.

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} h(t-\tau_i)}{N}$$

Для неполных (усечённых) выборок эмпирические функции получают с помощью формулы Фисшбейна, либо формулы Джонсона.

Получение этих функций начинают с построения вариационного ряда.

Вариационный ряд – это таблица, в которой все наработки выборки (до отказов и безотказные) расставлены по возрастанию.

Пусть имеем неполную выборку:

наработки до отказов: 15, 19, 25,

безотказные наработки: 14, 19, 22, 27

Вариационный ряд

l	i	τ_i	j	t_j
1			1	14
2	1	15		
3	2	19		
4			2	19
5			3	22
6	3	25		
7			4	27

l – порядковый номер наработки в вариационном ряду

В каждой строчке – содержится только одна наработка

Если в выборке есть безотказная наработка, равная наработке до отказа, то в вариационном ряду сначала ставят наработку <u>до отказа</u>

ФОРМУЛА Фисшбейна:

$$\hat{F}_{\Phi}(t) = \frac{i}{v+1-j^*}$$

i – порядковый номер наработки до отказа

v – количество элементов в выборке

*j** – порядковый номер безотказной наработки, ближайшей в вариационном ряду к *i* сверху

ФОРМУЛА Джонсона:

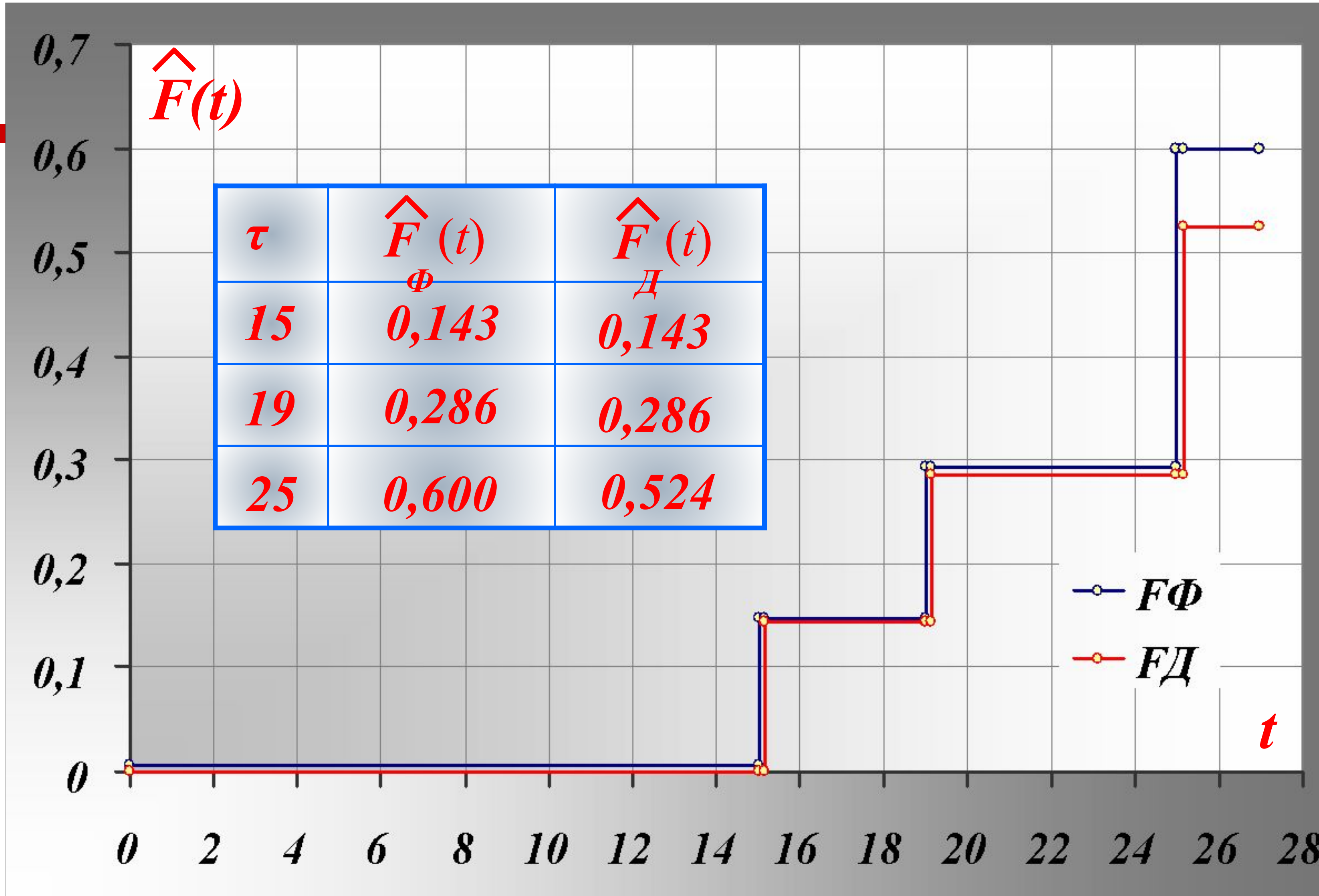
$$\hat{F}_{Д}(t) = \frac{r_i}{v+1}$$

где r_i – вспомогательный коэффициент

$$r_i = r_{i-1} + \frac{v+1-r_{i-1}}{v+2-l} \qquad r_i = 0$$

l – порядковый номер i-й наработки до отказа в вариационном ряду

Результаты расчёта



τ	$\hat{F}_Ф(t)$	$\hat{F}_Д(t)$
15	0,143	0,143
19	0,286	0,286
25	0,600	0,524

Как видно, Эмпирические функции распределения:

– кусочно-постоянные функции (между моментами отказов не меняют своего значения);

– существуют только в пределах эксперимента, прогнозировать с их помощью показатели надёжности не представляется возможным.

4.11. ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА ОЦЕНОК. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

С помощью эмпирической функции распределения невозможно определить, какой закон распределения в наибольшей степени соответствует выборке.

Критерий Колмогорова позволяет судить о близости известной теоретической функции распределения $F(t)$ и эмпирической функции $\hat{F}_n(t)$ по наибольшей разности между ними, т.е. по величине:

$$Д_n = \sup_t \left| \hat{F}_n(t) - F(t) \right|.$$

Статистика *$Д_n$* – это случайная величина, функция распределения которой имеет следующее свойство:

при n →∞ для любой непрерывной функции F(t) имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\sqrt{n}\cdot Д_n \le t\right\} = \mathrm{K}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m \cdot e^{-2m^2t^2}, (t>0)$$

на основе которого строится критерий Колмогорова. Здесь K(t) – функция распределения Колмогорова (табулирована)

Практическое применение критерия согласия:

Если объём выборки n достаточно большой, то находится максимальная разность $Д_n$, затем по таблице распределения Колмогорова находят квантиль t_α из условия: $\mathrm{K}(t_\alpha) = 1-\alpha$

Практическое применение критерия согласия:

Если для данной выборки окажется, что $Д_n \cdot \sqrt{n} > t_\alpha$,

то расхождение между теоретическим и эмпирическим распределениями следует признать существенным и отвергнуть гипотезу о согласованности (близости) теоретического и эмпирического распределений.

При этом вероятность ошибки не превышает α

Если $Д_n \cdot \sqrt{n} \le t_\alpha$,

то эмпирическую и теоретическую функции распределения считают согласованными, т.е. стоит принять гипотезу о близости теоретического и эмпирического распределений.

Критерий Пирсона (критерий χ^2 или «*хи*»-квадрат)

Часто в качестве критерия согласия используют критерий «*хи*»-квадрат.

Используется также мера расхождения в виде следующего статистического ряда:

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(\nu_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(\nu_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

1. *Формулируют гипотезу, что выборке соответствует теоретическая функция распределения $F(t)$.*
2. *Выбирают точки z_i: $0<z_1<z_2<\ldots<z_r$.*

Выбор осуществляют таким образом, чтобы
$n \cdot p_k \geq 10$ *и* $n_k \geq 10$,

здесь n – объём выборки, $p_k=F(t_k) - F(t_{k-1})$, t_k – k-я наработка в вариационном ряду (в эксперименте).

3. *ν_k – число тех элементов t_i, которые попадают в соответствующий интервал: $z_{k-1}<t_i \leq z_k$*
4. *Формируют статистику χ_n^2*

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(\nu_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Распределение χ_n^2 при $n \to \infty$ сходится к распределению «хи»-квадрат с $(r-1)$-й степенью свободы:

$$[\chi^2]_{(r-1)}$$

Значения $[\chi^2]_{(r-1)}$ приведены в специальных таблицах.

Задают уровень значимости ошибки α и по таблице ищут допустимое значение $[\chi^2]_{(r-1)}$.

$$\mathrm{P}\left\{[\chi^2]_{(r-1)} \in (0, t_\alpha)\right\} = 1 - \alpha$$

Гипотеза о близости принимается, если $\chi_n^2 \le [\chi^2]_{(r-1)}$ и наоборот.

ДАНО: Полная выборка

Теоретическая кривая – экспоненциальное распределение с параметром α=0,404 мес.$^{-1}$

Объём полной выборки равен n=162.

Максимальное значение наработки до отказа 6 мес.

Рассмотрим 6 равных по величине интервалов:

№1: $0 - z_1$, т.е. 0 – 1 мес.
№2: $z_1 - z_2$, т.е. 1 – 2 мес.
№3: $z_2 - z_3$, т.е. 2 – 3 мес.
№4: $z_3 - z_4$, т.е. 3 – 4 мес.
№5: $z_4 - z_5$, т.е. 4 – 5 мес.
№6: $z_5 - z_6$, т.е. 5 – 6 мес.

ПРОВЕРИТЬ:

Гипотезу о близости теоретического распределения (экспоненциального с параметром α=0,404 мес.$^{-1}$) и статистических данных.

Пусть в каждый интервал попадает следующее количество наработок:

z_{k-1}-z_k	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
v_k	56	39	28	19	13	7

Теоретическая вероятность попадания наработки в интервал

t_{k-1}-t_k: $p_k = e^{-\alpha tk} - e^{-\alpha tk-1}$

t_{k-1}-t_k	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
p_k	0,332	0,222	0,148	0,099	0,066	0,044
$n \cdot p_k$	162· 0,332= =53,84	35,95	24	16,02	10,7	7,143
$\frac{(v_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}$	0,087	0,259	0,667	0,553	0,495	0,003

$\chi_n^2 = 2{,}064$

Для получения $[\chi^2]_{(r\text{-}1)}$ *используем возможности EXCEL:*

ФУНКЦИЯ: ХИОБР(1–α;r–1)

(r–1) *– число степеней свободы*

для примера равно 6–1=5

α – уровень значимости ошибки (примем 0,05)

r–1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$[\chi^2]_{(r\text{-}1)}$	***1,15***	1,64	2,17	2,73	3,33	3,94	4,57	5,23	5,89	6,57	7,26	7,96

Вывод: гипотезу о близости двух функций следует отбросить с вероятностью ошибки не большей 0,05

4.12. КОНТРОЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ

ЗАМЕЧАНИЕ:
РАНЕЕ РАССМОТРНЕНЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ, В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗОВАНЫ ДАННЫЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ

Контрольные испытания на надёжность предназначены для проверки соответствует ли объект требуемому уровню надёжности.

Контролируемыми показателями могут быть:

- **средняя наработка до отказа,**
- **ВБР,**
- **интенсивность отказов,**
- **интенсивность потока отказов,**
- **гамма-процентный ресурс,**
- **коэффициент готовности и др.**

На основе результатов испытаний принимают одно из следующих решений:

- ***признать изделие годным;***
- ***забраковать изделие;***
- ***продолжить испытание.***

В первом случае, считают, что справедлива НУЛЕВАЯ ГИПОТЕЗА ={изделие годное},

Во втором случае – АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ГИПОТЕЗА – {изделие бракованное}.

ЗАМЕЧАНИЕ:

ДАЛЕЕ В КАЧЕСТВЕ КОНТРОЛИРУЕМОГО ПОКАЗАТЕЛЯ БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ЗА НЕКОТОРОЕ ВРЕМЯ Т.

Исходные данные для контрольных испытаний.

Изготовитель и заказчик согласовывают:

α – номинальное значение риска изготовителя (вероятность ошибки I рода, т.е. вероятность того, что будет забраковано годное изделие);

β – номинальное значение риска заказчика (вероятность ошибки II рода, т.е. вероятность того, что будет принято в эксплуатацию бракованное изделие).

Приёмочное значение показателя надёжности

T_α, например, (ВБР - P_α);

Браковочное значение показателя надёжности

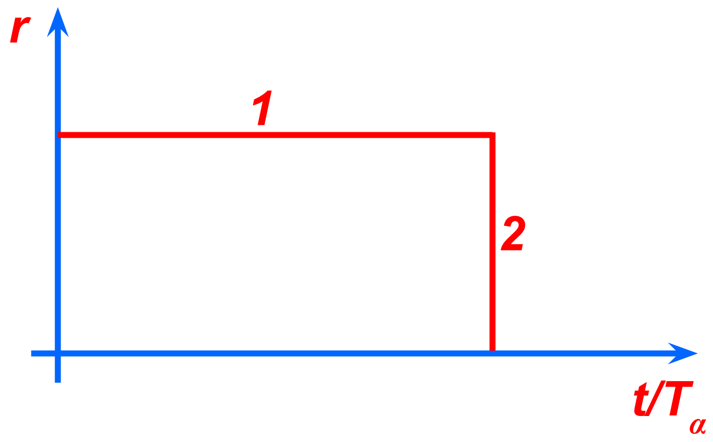
T_β, (ВБР - P_β)

Разрешающий коэффициент,

например для ВБР: $D=(1 - P_\beta)/(1 - P_\alpha)$

Различают три вида контрольных испытаний.

1. Одноступенчатые (ограниченные продолжительностью или числом отказов)



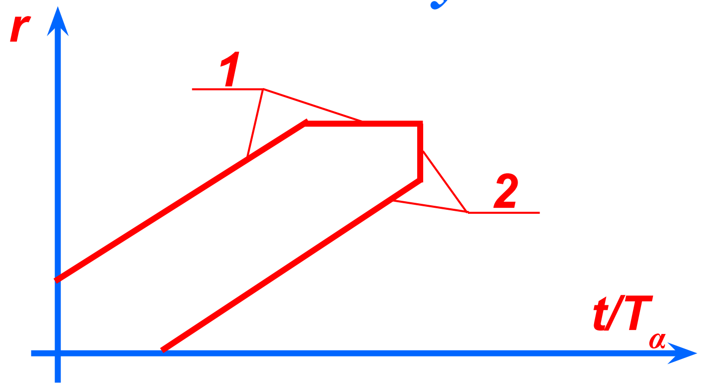
r – число учитываемых отказов;

t/T_α – суммарная учитываемая наработка.

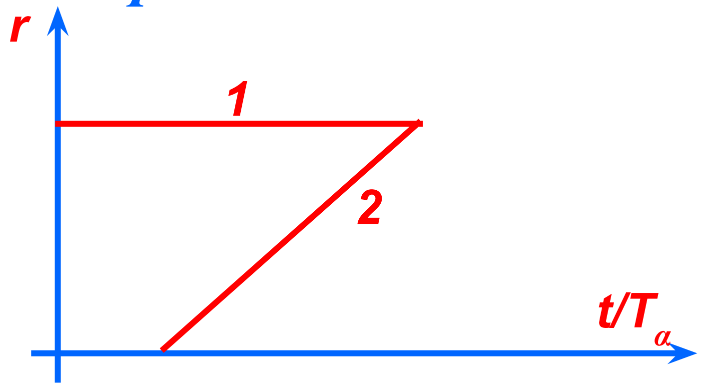
1 – граница браковки;

2 – граница приёмки.

2. Последовательные усечённые испытания



3. Комбинированные испытания



Для одноступенчатого контроля обосновывают:

- время испытаний $t_и$,
- объём выборки n,

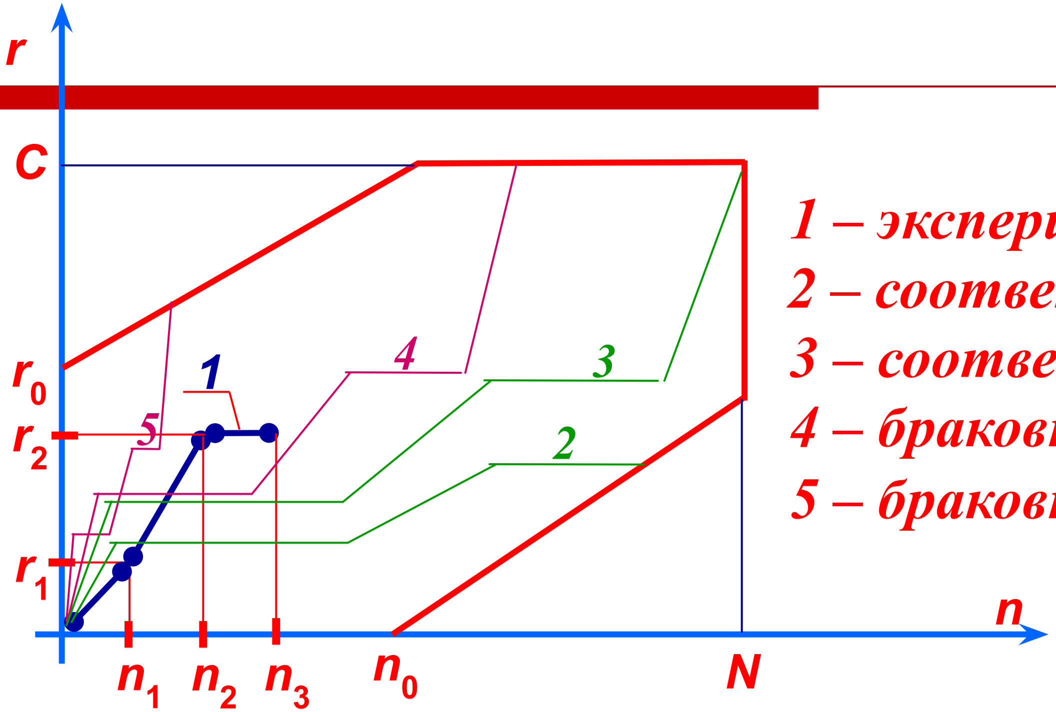
- приёмочное число C – это максимально возможное число отказавших за время испытания изделий, при котором партия изделий считается годной

Из одной партии отбираются n деталей. Если в эксперименте число отказавших изделий не больше C, партия принимается, иначе – бракуется.
При этом, если не известен закон распределения показателя надежности, время испытаний $t_и$ берут равным времени, для которое задана вероятность безотказной работы P_β.

При последовательных испытаниях общее число испытываемых изделий заранее не задают, а определяют по результатам предыдущих наблюдений. Одно или несколько изделий (количество указано в программе испытаний) ставят на испытания. По их результатам принимают решение о приёмке партии, об отбраковке партии или о продолжении испытаний.

Если испытания продолжают, то на испытания ставят столько же изделий, как и на предыдущем этапе и т.д.
При этом последовательно суммируют число наблюдений n и число отказов r.
По полученным суммам строят график.

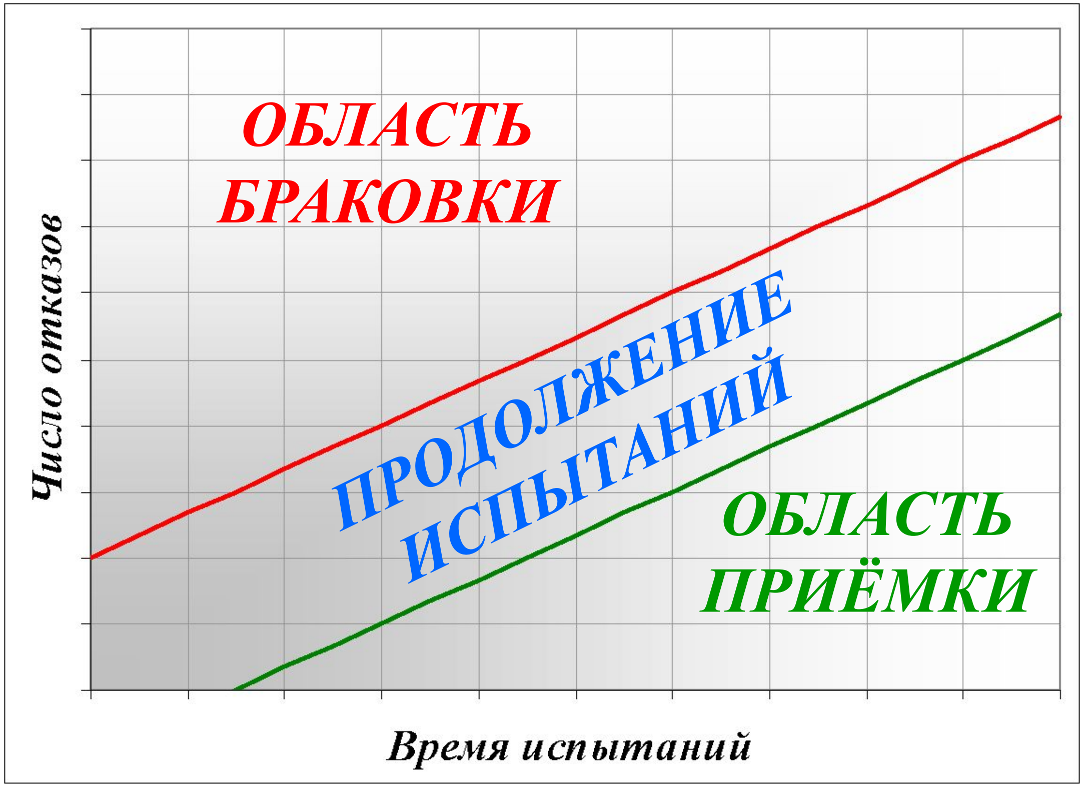
Порядок поведения испытаний.



1 – экспериментальная кривая
2 – соответствует приёмке
3 – соответствует приёмке
4 – браковка
5 – браковка

n – суммарное число испытанных изделий на данный момент,
r – суммарное число отказов на данный момент,
C – браковочное суммарное число отказов,
N –максимально возможное количество наблюдений до принятия решения.

Можно заранее построить график приёмочного контроля, который содержит три области: браковки, приёмки и продолжения испытаний.



Линия несоответствия рассчитывается:

$r = an + r_0.$

Линия соответствия (приемки) рассчитывается:

$r = a(n - n_0).$

При этом:

$$a = \frac{\ln(P_\alpha / P_\beta)}{\ln D + \ln(P_\alpha / P_\beta)} \qquad r_0 = \frac{\ln((1-\beta)/\alpha)}{\ln D + \ln(P_\alpha / P_\beta)}$$

$$n_0 = \frac{\ln((1-\alpha)/\beta)}{\ln(P_\alpha / P_\beta)} \qquad D = \frac{(1 - P_\beta)}{(1 - P_\alpha)}$$

Можно принять решение о соответствии или несоответствии показателей качества и без построения графиков – аналитически.

В процессе последовательных испытаний определяют величину отношения правдоподобия:

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}$$

$P_{1,n}$ – ***вероятность того, что в n испытаниях справедлива альтернативная гипотеза;***

$P_{0,n}$ – ***вероятность того, что в n испытаниях справедлива нулевая гипотеза.***

Если $\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \le \frac{\beta_0}{1-\alpha_0}$ ***, то принимают нулевую гипотезу***

Если $\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \ge \frac{1-\beta_0}{\alpha_0}$***, то принимают – альтернативную***

Если $\frac{\beta_0}{1-\alpha_0} < \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} < \frac{1-\beta_0}{\alpha_0}$ ***, испытания продолжают***