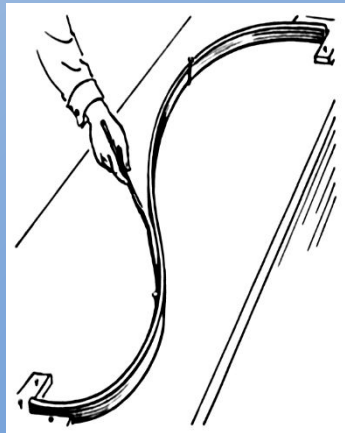


Інтерполяція сплайнами

Мірошніченко Вячеслав

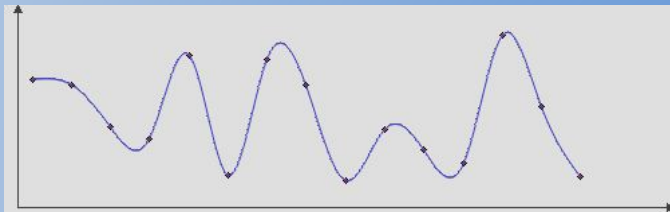
Сплайн

Сплайн (spline) називали гнучку металеву лінійку — універсальне лекало, що використовували креслярі для того, щоб гладко з'єднати окремі точки на кресленні.

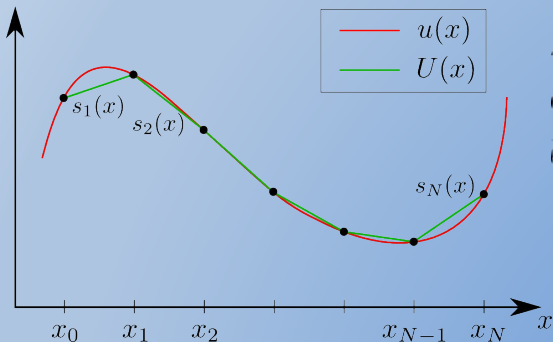


Сплайн

Сплайном $S_m(x)$ називається функція, що визначена на $[a, b]$, має на ньому неперервні похідні $m - 1$ порядку і на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ збігається з деяким многочленом степеня не вище m . При цьому хоча б на одному з відрізків степінь многочлена дорівнює m . Якщо $S_m(x_i) = f(x_i)$, то це інтерполюючий сплайн.



Лінійний сплайн



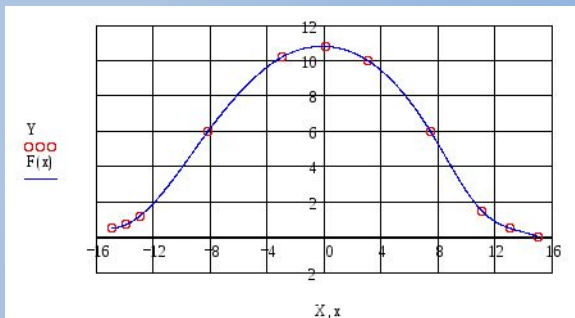
$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j)$$

$$a_j = f(x_j)$$

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h}$$

Лінійний сплайн - це сплайн , складений з поліномів першого степеня , тобто з відрізків прямих ліній. Точність інтерполяції лінійними сплайнами невисока , також слід зазначити , що вони не забезпечують безперервності навіть перших похідних

Квадратурний сплайн



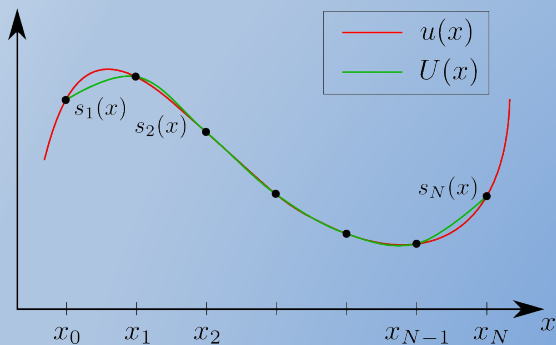
Квадратурний сплайн – це сплайн, складений з поліномів другого степеня, при умові що інтерпольована функція має неперервну першу похідну. Загальний вид квадратурного сплайна на проміжку має вид:

$$S_2[x_i; x_{i+1}](x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

Шуканими невідомими є a_i, b_i, c_i .

Таким чином отримуємо $(n-1) \cdot 3$ рівнянь, для пошуку яких складається СЛАР.

Кубічні сплайни



$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$
$$s_i^t(x_i) = s_{i+1}^t(x_i)$$
$$s_i^{jt}(x_i) = s_{i+1}^{jt}(x_i)$$

Загальний вигляд кубічного сплайну:

$$S_i[x_i, x_{(i+1)}] = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3, \quad (i=0 \dots n-1)$$

У випадку квадратурного сплайну отримуємо $(n-1) \cdot 3$ рівнянь. До зазначених в квадратурному сплайні умов додається умова неперервності других похідних. Таким чином отримується $(n-1) \cdot 3 - 2$ рівняння. $(a) = f''(a), S_3''(b) = f''(b)$

Характеристики сплайна

- *Степенем сплайна називається максимальна зі степенів многочленів $s_i(x)$.*
- *Гладкістю сплайна називається кількість безперервних похідних, які $U(x)$ має на всьому відрізку $[x_0, x_N]$.*
- *Дефектом сплайна називається різниця між ступенем і гладкістю сплайна.*

Характеристики сплайна

- *Степенем сплайна називається максимальна зі степенів многочленів $s_i(x)$.*
- *Гладкістю сплайна називається кількість безперервних похідних, які $U(x)$ має на всьому відрізку $[x_0, x_N]$.*
- *Дефектом сплайна називається різниця між ступенем і гладкістю сплайна.*

Наприклад, лінійний сплайн має ступінь 1, гладкість 0 і дефект 1. Гладкий кусочно-кубічний сплайн має ступінь 3, гладкість 2 і дефект 1.