

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теории функций и приближений



**МЕТОД МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Панина Светлана
Вадимовна
Группа 05-404

Метод моментов решения операторных уравнений



$$Kx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) \quad (2)$$

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_1^n$ находим из условия

$$(Kx_n - y, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Получаем СЛАУ

$$\int_a^b K \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) \psi_j(t) dt = \int_a^b y(t) \psi_j(t) dt \quad (4)$$

Метод моментов решения интегрального уравнения Фредгольма II рода



$$Kx \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(s, \sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s) \quad (5)$$

$$x \in X, y \in X, \quad X = Y = L_2(-\pi, \pi).$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{iks} \quad (6)$$

Получаем СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_{kj} c_k = \beta_j, \quad j = \overline{-n, n} \quad (7)$$

$$\alpha_{kj} = \int_{-\pi}^{\pi} K(e^{iks}; s) e^{-ijs} ds, \quad (8)$$

$$\beta_j = \int_{-\pi}^{\pi} y(s) e^{-ijs} ds.$$

Для погрешности приближенных решений справедливы оценки

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(x^*)_2\}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\{E_n^T(y)_2 + E_{n,s}^T(h)_2\}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O(n^{-r-\alpha+\frac{1}{2}})$$

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O\{\ln n [E_n^T(y)_C + E_{n,s}^T(h)_C]\}$$

Интегральное уравнение I-го рода с логарифмической особенностью в ядре



$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{s-\sigma}{2} \right| x(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = y(s) \quad (9)$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{iks} \quad (10)$$

Получаем СЛАУ

$$\alpha_j c_j(g) + \sum_{k=-n}^n h_{jk} \alpha_k = c_j(y) \quad (11)$$

$$c_j(g) = \left\{ \ln 2 \text{ при } k = 0; \frac{1}{2|k|} \text{ при } k \neq 0 \right\}$$

$$h_{jk} = c_j(\varphi_k), \varphi_k(s) = R(e^{ik\sigma}; s)$$

Справедливы оценки

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\{E_n^T(x^*)_2\} = O\{E_n^T((Sx^*)'_2)\}.$$

$$x \in X, y \in X, X = L_2, Y = W_2^1$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T\left(\frac{d}{ds}y\right)_2 + E_n^T\left(\frac{d}{ds}Rx^*\right)_2\right\},$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq E_n^T(x^*)_2 \|E - A_n^{-1}\Phi_n R\|, \quad E - A_n^{-1}\Phi_n R : L_2 \rightarrow L_2,$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leq 2E_n^T(x^*)_2 \|(S + \Phi_n R)^{-1}\|, \quad S + \Phi_n R : L_2 \rightarrow W_2^1$$

Метод моментов решения сингулярного интегродифференциального уравнения



$$Ax \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x'(\tau)}{t - \tau} d\tau + Q(x; t) = y(t), \quad -1 < t < 1 \quad (12)$$

$$x(-1) = x(1) = 0 \quad (13)$$

Обозначим через X пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию (13).

В качестве пространства правых частей Y выберем пространство непрерывных функций $y(t)$.

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(t) = \sqrt{1 - t^2} \sum_{k=1}^n \gamma_k U_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \sin k \arccos t \quad (14)$$

Получаем СЛАУ

$$i\gamma_i + \sum_{k=1}^n \beta_{ik}\gamma_k = c_{i-1}^U(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$\text{где } \beta_{ik} = c_{i-1}^U(Q(\sin k \arccos t, t_i)). \quad (16)$$

Справедливы оценки

$$\|x_n^* - x^*\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right),$$

$$\|\rho(x_n^{*'} - x^{*}')\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad r \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!