



Дистанционный курс высшей математики НИЯУ МИФИ

Математический анализ 1 семестр

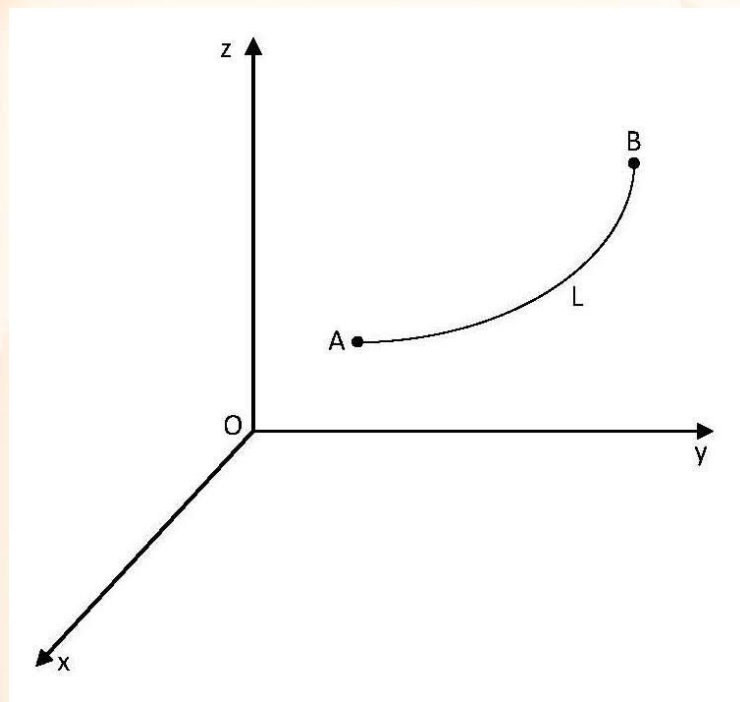
Лекция 13

Длина кривой.
Касательная и кривизна.
Приближенные методы
решения уравнений.

11 декабря 2014 года

Лектор: Профессор НИЯУ МИФИ, д.ф.-м.н.
Орловский Дмитрий Германович

Длина кривой



$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t) \end{cases}$$
$$\alpha \leq t \leq \beta$$

Если функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ непрерывно дифференцируемы, то кривая L называется гладкой кривой (кривая класса C^1).

Условие регулярности

$$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 \neq 0$$

для спрямляемости кривой не обязательно.



Длина кривой

Теорема. Гладкая кривая спрямляема и ее длина удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} (\beta - \alpha) \leq |L| \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} (\beta - \alpha),$$

где

$$m_j = \operatorname{Inf}_{[\alpha; \beta]} |f_j'(t)|, \quad (1 \leq j \leq 3),$$

$$M_j = \operatorname{Sup}_{[\alpha; \beta]} |f_j'(t)|, \quad (1 \leq j \leq 3).$$



Длина кривой

Рассмотрим гладкую кривую

$$L = \{(x; y; z) : x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t) \in C^1[\alpha; \beta]).$$

Пусть

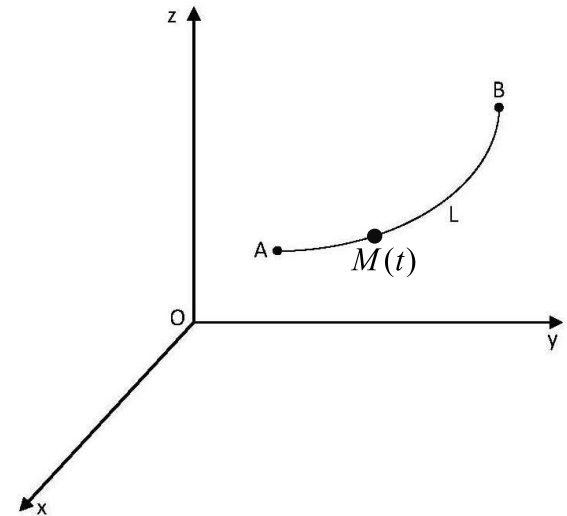
$$M(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$$

$$(A = M(\alpha), B = M(\beta)).$$

$$l(t) = |\cup AM(t)|$$

Теорема. Для любой гладкой кривой

$$l'(t) = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2}.$$





Длина кривой

Доказательство. Пусть $t > t_0$, тогда по теореме об аддитивности длины

$$l(t) - l(t_0) = |\cup M(t_0)M(t)|$$

Согласно предыдущей теореме для отрезка $[t_0; t]$

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} (t - t_0) \leq l(t) - l(t_0) \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} (t - t_0)$$

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \leq \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$$

$$m_i = |f_i'(\xi_i)|, \quad t_0 \leq \xi_i \leq t, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$M_i = |f_i'(\eta_i)|, \quad t_0 \leq \eta_i \leq t, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_i = \lim_{t \rightarrow t_0} \eta_i = t_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |f_i'(\xi_i)| = \lim_{t \rightarrow t_0} |f_i'(\eta_i)| = |f_i'(t_0)|.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \sqrt{[f_1'(t_0)]^2 + [f_2'(t_0)]^2 + [f_3'(t_0)]^2}$$



Длина кривой

Если $t < t_0$, тогда

$$l(t_0) - l(t) = |\cup M(t)M(t_0)|$$

Согласно предыдущей теореме для отрезка $[t; t_0]$

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} (t_0 - t) \leq l(t_0) - l(t) \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} (t_0 - t)$$

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \leq \frac{l(t_0) - l(t)}{t_0 - t} \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$$

$$m_i = |f_i'(\xi_i)|, \quad t \leq \xi_i \leq t_0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$M_i = |f_i'(\eta_i)|, \quad t \leq \eta_i \leq t_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_i = \lim_{t \rightarrow t_0} \eta_i = t_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |f_i'(\xi_i)| = \lim_{t \rightarrow t_0} |f_i'(\eta_i)| = |f_i'(t_0)|.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{l(t_0) - l(t)}{t_0 - t} = \sqrt{[f_1'(t_0)]^2 + [f_2'(t_0)]^2 + [f_3'(t_0)]^2}$$



Длина кривой

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \sqrt{[f_1'(t_0)]^2 + [f_2'(t_0)]^2 + [f_3'(t_0)]^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \sqrt{[f_1'(t_0)]^2 + [f_2'(t_0)]^2 + [f_3'(t_0)]^2}$$

Отсюда следует, что

$$l'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \sqrt{[f_1'(t_0)]^2 + [f_2'(t_0)]^2 + [f_3'(t_0)]^2}$$



Длина кривой

Элемент длины дуги

Определение. Модуль дифференциала длины дуги называется элементом длины дуги.

$$ds = |l'(t)dt| = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2} |dt| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

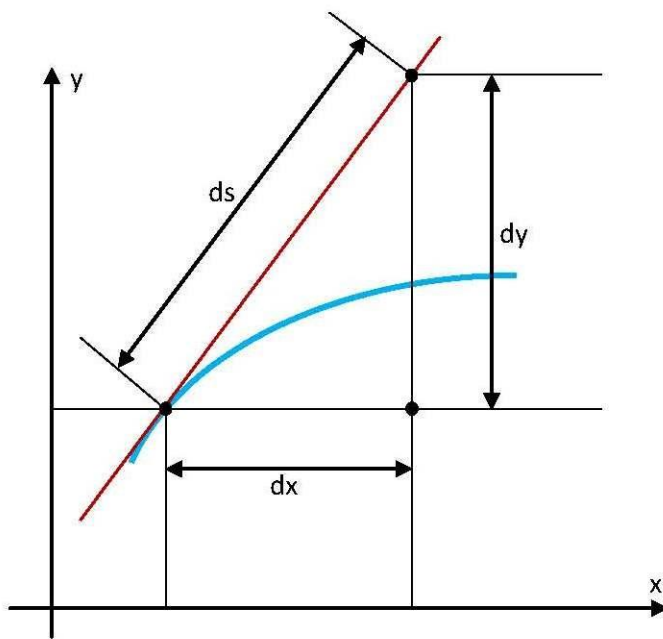
(теорема Пифагора в дифференциалах).

Особенно наглядное значение эта формула имеет для плоской кривой, являющейся графиком явно заданной функции $y=f(x)$.

График явно заданной функции всегда можно представить в параметрической форме. Для этого достаточно взять в качестве параметра независимую переменную.

Длина кривой

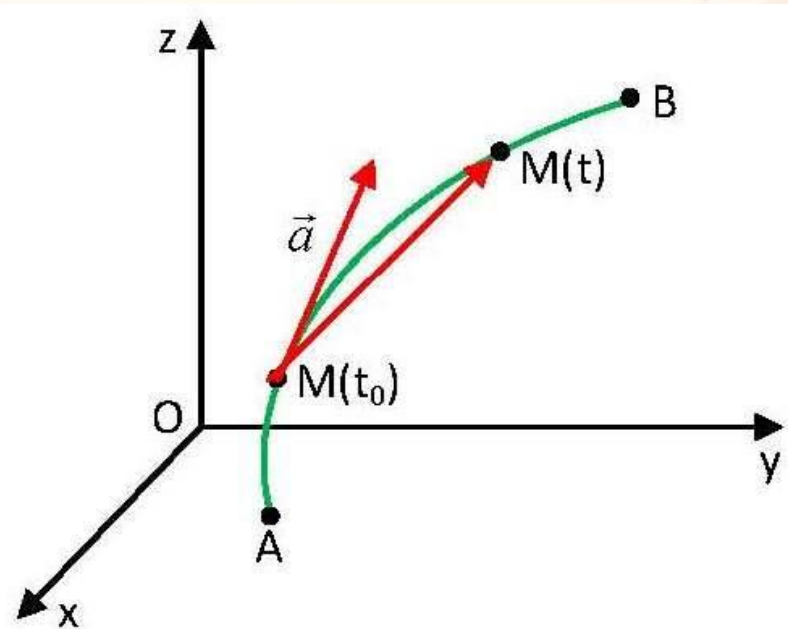
$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \\ z = 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} ds &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} |dt| = \\ &= \sqrt{1 + [f'(t)]^2 + 0} |dt| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} |dx| = \\ &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \end{aligned}$$



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Касательная к кривой

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases}$$



$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \{f_1(t) - f_1(t_0); f_2(t) - f_2(t_0); f_3(t) - f_3(t_0)\}$$

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} = \left\{ \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_3(t) - f_3(t_0)}{t - t_0} \right\}$$



Касательная к кривой

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} = \left\{ \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_3(t) - f_3(t_0)}{t - t_0} \right\}$$

Предельное значение этого вектора при $t \rightarrow t_0$

$$\vec{a} = \{f_1'(t_0); f_2'(t_0); f_3'(t_0)\}$$

(в том случае, когда оно отлично от нулевого вектора) называется касательным вектором к кривой в точке t_0 .

Прямая, проходящая через точку $M(t_0)$ с этим направляющим вектором, называется касательной к кривой в точке t_0 .



Касательная к кривой

Особые и регулярные точки кривой

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 \neq 0$ – *регулярная точка*

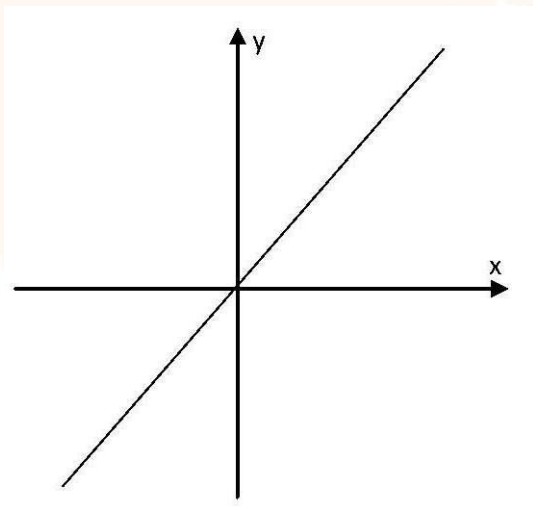
$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 = 0$ – *особая точка*

В регулярной точке кривая всегда имеет касательную.

Касательная к кривой

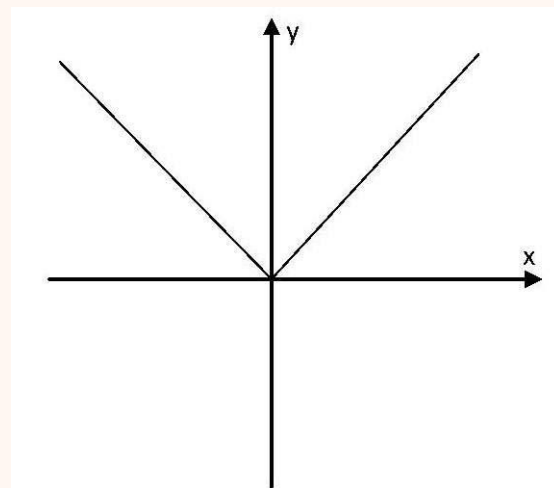
Пример 1.

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^3, \\ z = 0. \end{cases}$$

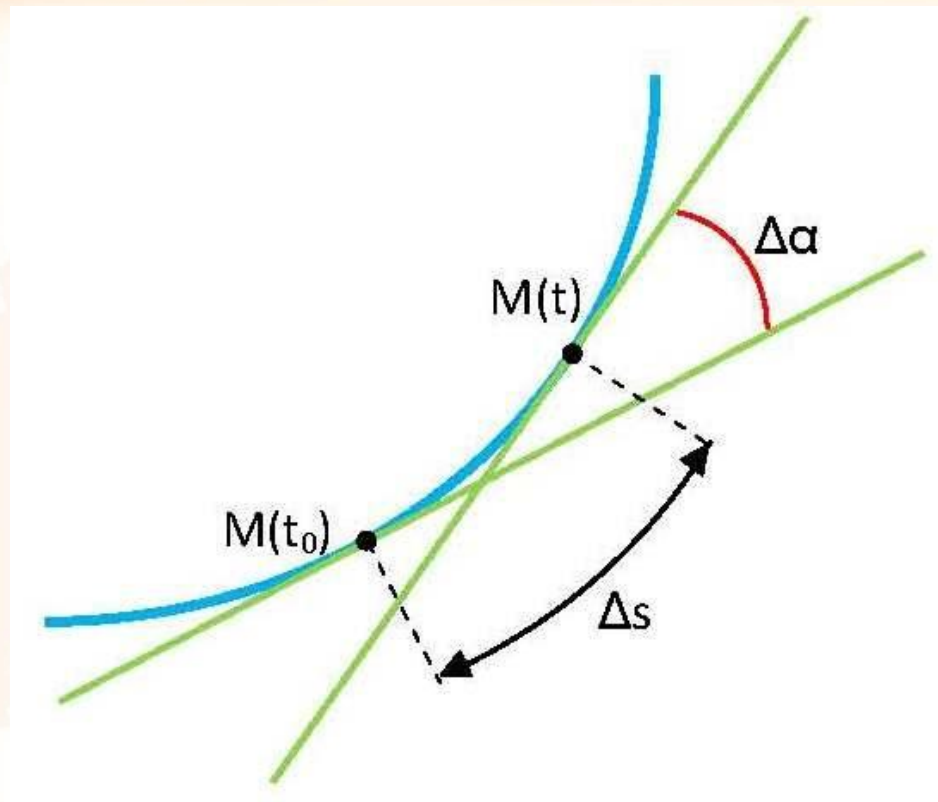


Пример 2.

$$\begin{cases} x = t |t|, \\ y = t^2, \\ z = 0. \end{cases}$$



Кривизна плоской кривой



Средняя кривизна на участке:

$$k_{cp} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

Кривизна в точке $M(t_0)$:

$$k = \lim_{t \rightarrow t_0} k_{cp} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$



Кривизна плоской кривой

Теорема. Пусть на плоскости задана гладкая регулярная кривая

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Тогда ее кривизна в каждой точке t_0 определяется формулой

$$k = \frac{|\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)|}{(|\varphi'(t_0)|^2 + |\psi'(t_0)|^2)^{3/2}}$$

Замечание.

Гладкая: $\varphi, \psi \in C^1$

Регулярная: $|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 \neq 0$



Кривизна плоской кривой

Доказательство. Так как кривая регулярна, то величина

$$|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 \neq 0$$

Пусть для определенности

$$\varphi'(t) \neq 0$$

Касательный вектор к кривой

$$\vec{a} = \{\varphi'(t); \psi'(t)\}$$

образует с осью абсцисс угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$



Кривизна плоской кривой

По определению кривизны

$$\begin{aligned} k &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{s(t) - s(t_0)} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{(\alpha(t) - \alpha(t_0)) / (t - t_0)}{(s(t) - s(t_0)) / (t - t_0)} \right| = \\ &= \left| \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha(t) - \alpha(t_0)) / (t - t_0)}{\lim_{t \rightarrow t_0} (s(t) - s(t_0)) / (t - t_0)} \right| = \left| \frac{\alpha'(t_0)}{s'(t_0)} \right| \end{aligned}$$



Кривизна плоской кривой

Так как

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \left(\operatorname{arctg} \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right)' = \frac{1}{1 + (\psi'(t)/\phi'(t))^2} \left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right)' = \\ &= \frac{[\phi'(t)]^2}{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \cdot \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^2} = \frac{\phi'(t)\psi''(t) - \phi''(t)\psi'(t)}{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\end{aligned}$$

$$s'(t) = \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} = ([\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2)^{1/2}$$

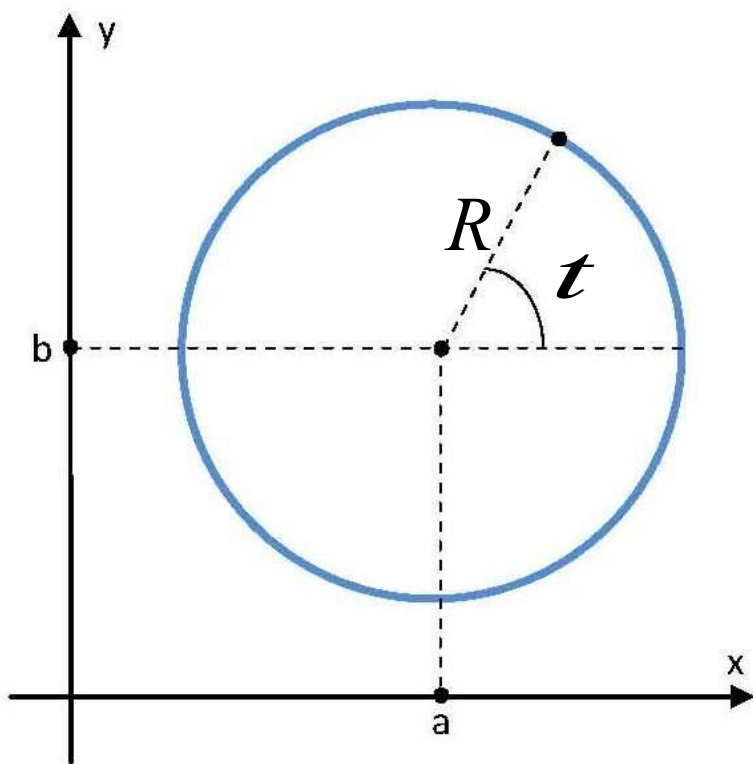
то

$$\begin{aligned}k &= \left| \frac{\phi'(t)\psi''(t) - \phi''(t)\psi'(t)}{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} / ([\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2)^{1/2} \right| = \\ &= \frac{|\phi'(t)\psi''(t) - \phi''(t)\psi'(t)|}{(|\phi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Кривизна плоской кривой

Пример. Найти кривизну окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x = a + R \cos t, \\ y = b + R \sin t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$



Кривизна плоской кривой

$$k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{(|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2)^{3/2}}$$

$$\varphi(t) = a + R \cos t, \quad \psi(t) = b + R \sin t$$

$$\varphi'(t) = -R \sin t, \quad \psi'(t) = R \cos t$$

$$\varphi''(t) = -R \cos t, \quad \psi''(t) = -R \sin t$$

$$\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t) = -(R \sin t)(-R \sin t) - (-R \cos t)(R \cos t) = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2$$

$$|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2$$

$$k = \frac{R^2}{(R^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$



Кривизна плоской кривой

Часто представляется удобным приближенно заменять кривую вблизи рассматриваемой точки – окружностью, имеющую ту же кривизну, что и кривая в данной точке.

Кругом кривизны кривой в данной точке M называется круг, который

- 1) касается кривой в точке M ;
- 2) направлен выпуклостью вблизи этой точки в ту же сторону, что и кривая;
- 3) имеет ту же кривизну, что и кривая в точке M .

Центр круга кривизны называется центром кривизны, а радиус этого круга – радиусом кривизны (в данной точке). Для радиуса кривизны, очевидно, имеем формулу

$$R = \frac{1}{k} \quad (k - \text{кривизна кривой})$$



Кривизна плоской кривой

Если кривая задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то координаты центра кривизны кривой в точке (x, y) равны

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)} \cdot \psi'(t), \\ \eta = y + \frac{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)} \cdot \varphi'(t). \end{cases}$$



Кривизна плоской кривой

Если кривая задана как график явной функции

$$y = f(x),$$

то параметрическое уравнение этой кривой имеет вид

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Задача. Показать, что кривизна такой кривой

$$k = \frac{f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}},$$

а координаты центра кривизны

$$\xi = x - \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)} f'(x), \quad \eta = y + \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)}.$$



Эволюта плоской кривой

Геометрическое множество центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. Сама кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

Пример. Найти эволюту параболы $y^2=2px$.

Дифференцируя уравнение, находим

$$2yy' = 2p; \quad yy' = p,$$

$$(y')^2 + yy'' = 0; \quad yy'' = -(y')^2; \quad y^3 y'' = -(yy')^2; \quad y^3 y'' = -p^2.$$

Координаты центра кривизны

$$\xi = x - \frac{1+[y']^2}{y''} y' = x - \frac{(1+[y']^2)y^2}{y'' y^3} yy'(x) = x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p = \frac{3y^2}{2p} + p,$$

$$\eta = y + \frac{1+[y']^2}{y''} = y + \frac{(1+[y']^2)y^2}{y'' y^3} y = y - \frac{y^2 + p^2}{p^2} y = -\frac{y^2}{p^2}.$$

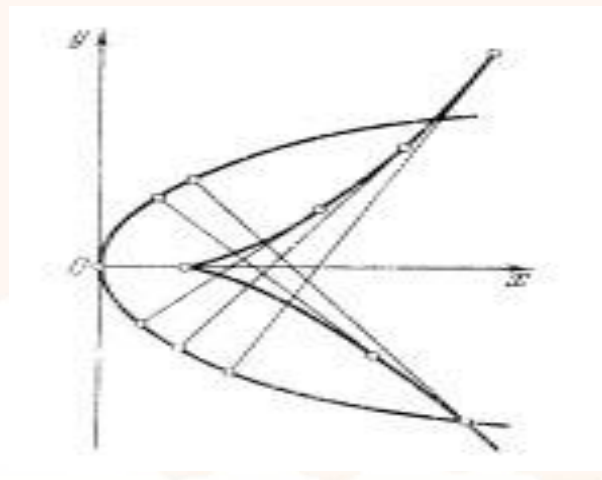
Эволюта плоской кривой

Из полученных уравнений

$$\xi = \frac{3y^2}{2p} + p, \quad \eta = -\frac{y^2}{p^2}.$$

Исключаем y и получаем уравнение эволюты

$$\eta^2 = \frac{8}{27p} (\xi - p)^3 \quad (\text{полукубическая парабола})$$





Метод итераций (последовательных приближений)

$$x = \varphi(x)$$

Замечание.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + cf(x) \Leftrightarrow x = \varphi(x) \quad (\varphi(x) = x + cf(x))$$

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

.....

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

.....



Метод итераций

Принцип сжимающих отображений

Пусть выполнены следующие условия

$$(1) \quad \forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) \in [a, b],$$

$$(2) \quad \exists q \in (0, 1) \quad \forall x, y \in [a, b] \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q |x - y|.$$

Тогда на отрезке $[a, b]$ существует и притом единственное решение уравнения

$$x = \varphi(x).$$

При этом метод итераций для $x_0 \in [a, b]$ дает последовательность, сходящуюся к решению этого уравнения. Более того

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1 - q} |\varphi(x_0) - x_0|.$$



Метод итераций

Доказательство. В силу условия (1) последовательность итераций определена. Покажем, что она фундаментальна.

Лемма. При $m \geq n$

$$|x_m - x_n| \leq q^n |x_{m-n} - x_0|$$

В самом деле

$$|x_m - x_n| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{n-1})| \leq q |x_{m-1} - x_{n-1}|$$

Применяя при $m \geq n$ полученное неравенство n раз, получаем

$$|x_m - x_n| \leq q |x_{m-1} - x_{n-1}| \leq q^2 |x_{m-2} - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n |x_{m-n} - x_0|$$

Следствие:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|$$



Метод итераций

Оценим, теперь, величину

$$\begin{aligned} |x_k - x_0| &= |(x_k - x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_{k-2}) + \dots + (x_1 - x_0)| \leq \\ &\leq q^{k-1} |x_1 - x_0| + q^{k-2} |x_1 - x_0| + \dots + |x_1 - x_0| = \\ &= (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + 1) |x_1 - x_0| = \frac{1 - q^k}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем два неравенства

$$|x_m - x_n| \leq q^n |x_{m-n} - x_0|, \quad |x_k - x_0| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q},$$

Из которых следует, что при $m \geq n$

$$|x_m - x_n| \leq q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}$$



Метод итераций

$$|x_m - x_n| \leq q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} \quad (m \geq n)$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} = 0 \Rightarrow \exists N \forall n > N \quad q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} < \varepsilon$$

⇓

$$\forall n > N, m \geq n \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

⇓

$$\forall m, n > N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$



Метод итераций

$$\exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$(1) \quad a \leq x_n \leq b \Rightarrow x \in [a, b]$$

$$(2) \quad 0 \leq |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq q |x_n - x| \Rightarrow \varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$$

$$(3) \quad x_n = \varphi(x_{n-1}) \Rightarrow x = \varphi(x)$$

$$|x_m - x_n| \leq q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}, \quad m \rightarrow \infty \Rightarrow |x - x_n| \leq q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}$$

$$|x - x_n| = |x_n - x|, \quad |x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0|$$

⇓

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1 - q} |\varphi(x_0) - x_0|$$



Метод итераций

Единственность решения.

$$x = \varphi(x), y = \varphi(y)$$

$$|x - y| = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q |x - y|$$

$$(1 - q) |x - y| \leq 0$$

$$|x - y| \leq 0$$

$$x = y$$



Иоганн Кеплер

27.12.1571 – 15.11.1630



Немецкий математик, астроном и оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

В 1591 поступил в университет в Тюбингене, в 1594 приглашен для чтения лекций по математике в университет города Граца (Австрия).

На протяжении нескольких лет Кеплер в результате тщательного анализа приходит к выводу, что траектория движения Марса представляет собой не круг, а эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце — положение, известное сегодня как *первый закон Кеплера*.

Дальнейший анализ привёл ко *второму закону*: радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Это означало, что чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется.



Иоганн Кеплер

В 1612 году Кеплер переезжает в Линц, где прожил 14 лет. За ним сохранена должность придворного математика и астронома, но в деле оплаты новый император ничем не лучше старого. Некоторый доход приносят преподавание математики и гороскопы.

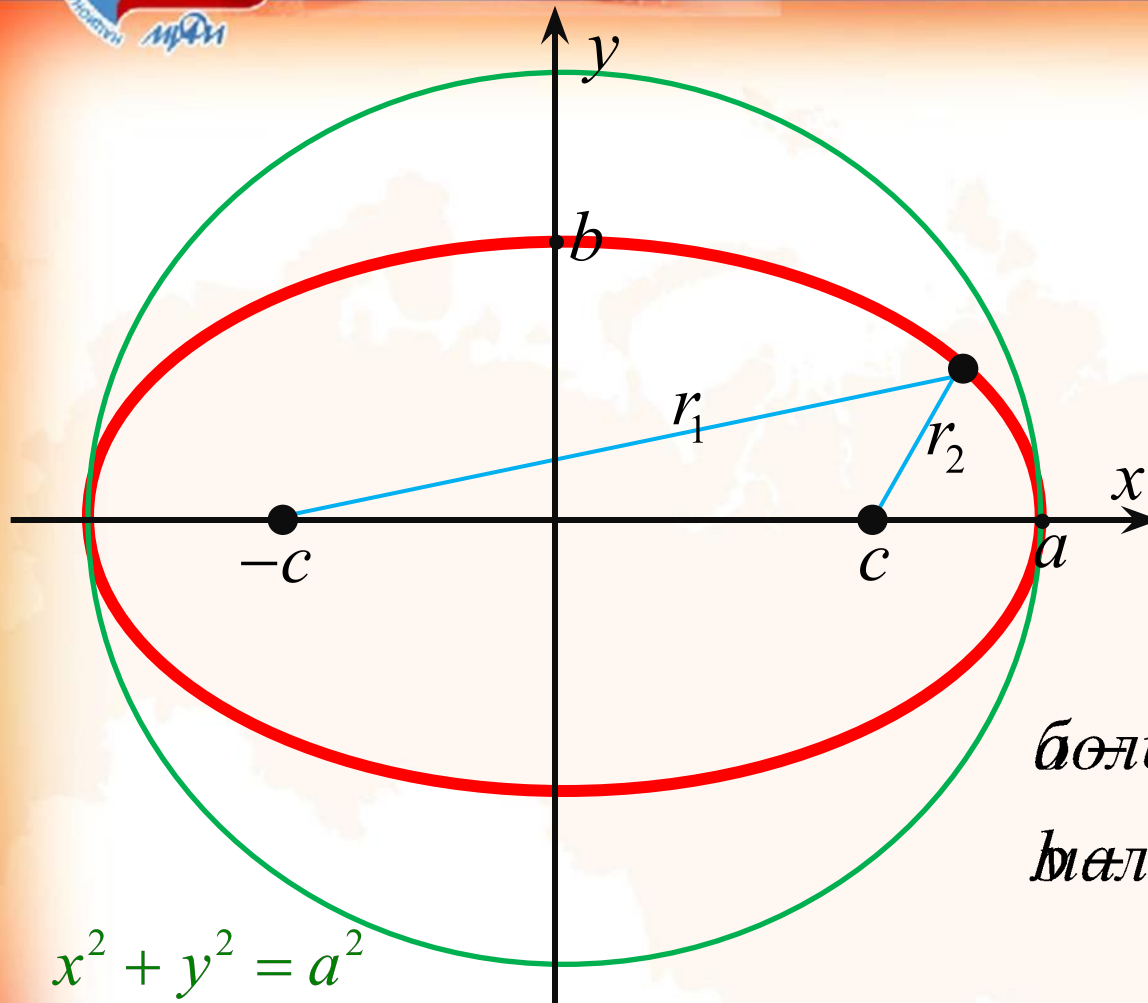
Продолжая астрономические исследования, Кеплер в 1618 году открывает *третий закон*: отношение куба среднего удаления планеты от Солнца к квадрату периода обращения её вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет: $a^3/T^2 = \text{const}$. Этот результат Кеплер публикует в завершающей книге «Гармония мира», причём применяет его уже не только к Марсу, но и ко всем прочим планетам, включая, естественно, и Землю.

В 1626 году в ходе Тридцатилетней войны Линц осаждён и вскоре захвачен. Начинаются грабежи и пожары. Кеплер переезжает в Ульм.

В 1630 году отправляется к императору в Регенсбург, чтобы получить хотя бы часть жалованья. По дороге сильно простужается и вскоре умирает.

Законы планетной кинематики, открытые Кеплером, послужили позже Ньютону основой для создания теории тяготения. Ньютон математически доказал, что все законы Кеплера являются следствиями закона тяготения.

Эллипс



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

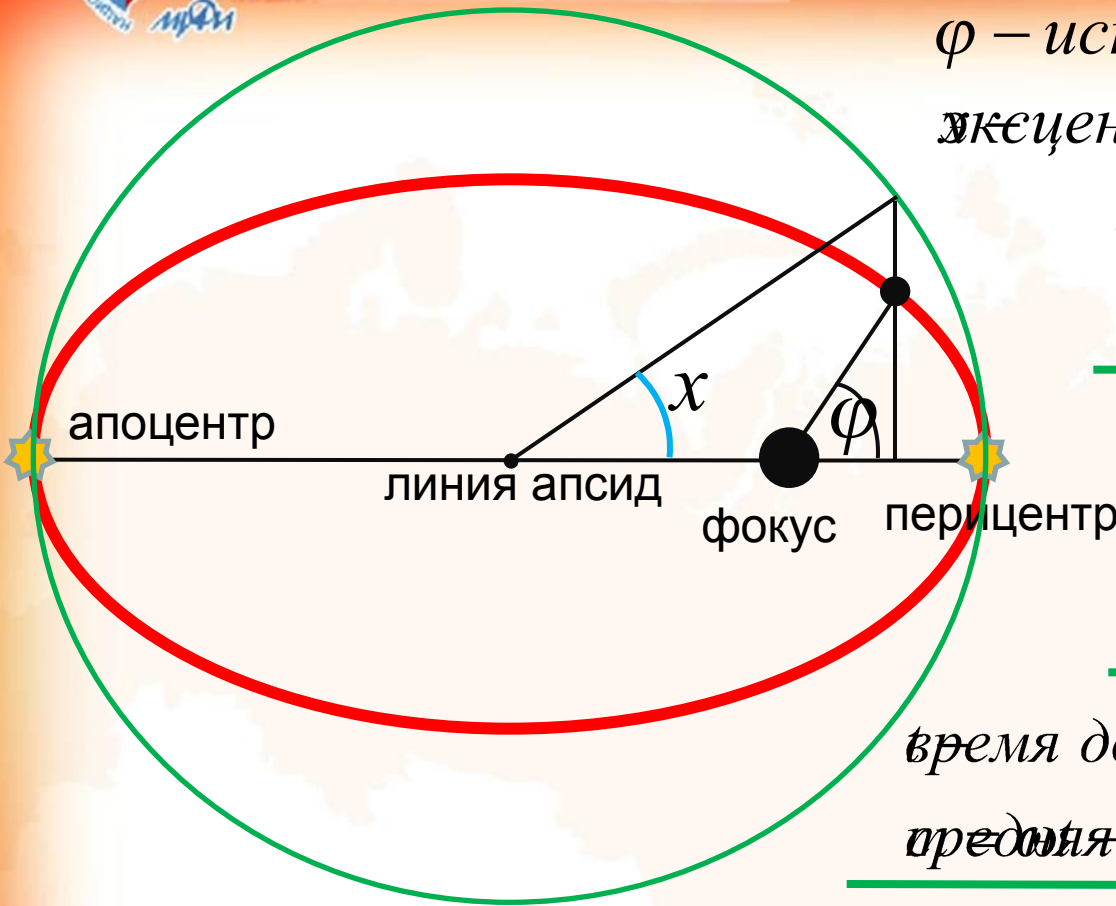
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b)$$

большая полуось

малая полуось

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — *эксцентриситет*

Уравнение Кеплера



φ – истинная аномалия
 x – эксцентрисическая аномалия

T – Период обращения

$$\mu = m_1 + m_2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g\mu}{a^3}}$$

(среднее движение)

m – время движения от перицентра
 m – средняя аномалия

$$m = x - \varepsilon \sin x$$



Метод итераций (пример)

Уравнение Кеплера

$$x = m + \varepsilon \sin x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$\varphi(x) = m + \varepsilon \sin x$$

$$[a, b] = [m - 1, m + 1]$$

$$\varphi'(x) = \varepsilon \cos x \leq \varepsilon < 1$$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|\varphi'(x)\| |x - y| \leq \varepsilon |x - y|$$

Таким образом, итерации

$$x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$$

сходятся к единственному решению этого уравнения.



Метод итераций (пример)

Оценка погрешности:

$$|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon^n}{q} |\varphi(x_0) - x_0|.$$

1619

$x = 2$ точностью до 0,001)

$$m = 2 \quad 0,1 \quad d = \frac{(0,1)^n}{0,9} (\varphi(x_0) - x_0)$$

$$x_0 = 2, \quad d = 0,1$$

$$x_1 = 2,09093, \quad d = 0,01$$

$$x_2 = 2,08678, \quad d = 0,001$$

$$x_3 = 2,08698, \quad d = 0,0001$$

Ответ:
 $x \approx 2,087$



Дистанционный курс высшей математики НИЯУ МИФИ

Математический анализ.
Приближенные методы
решения уравнений.
Лекция 13
завершена.

Спасибо за внимание!

Тема следующей лекции:
Обзорная лекция.
Лекция состоится в четверг 18 декабря
В 10:00 по Московскому времени.