МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ

1. Математические методы моделирования в геологии: Учебник / Г.С.Поротов. Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2006. 223 с.
2. Каждан А. Б., Гуськов О. И.Математические методы в геологии: Учебник для вузов.— М.: Недра, 1990.— 251 с.

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ГЕОЛОГИИ

1) накопление, хранение и систематизация (сортировка, получение выборок и пр.) геологической информации с целью более полного и быстрого ее использования;

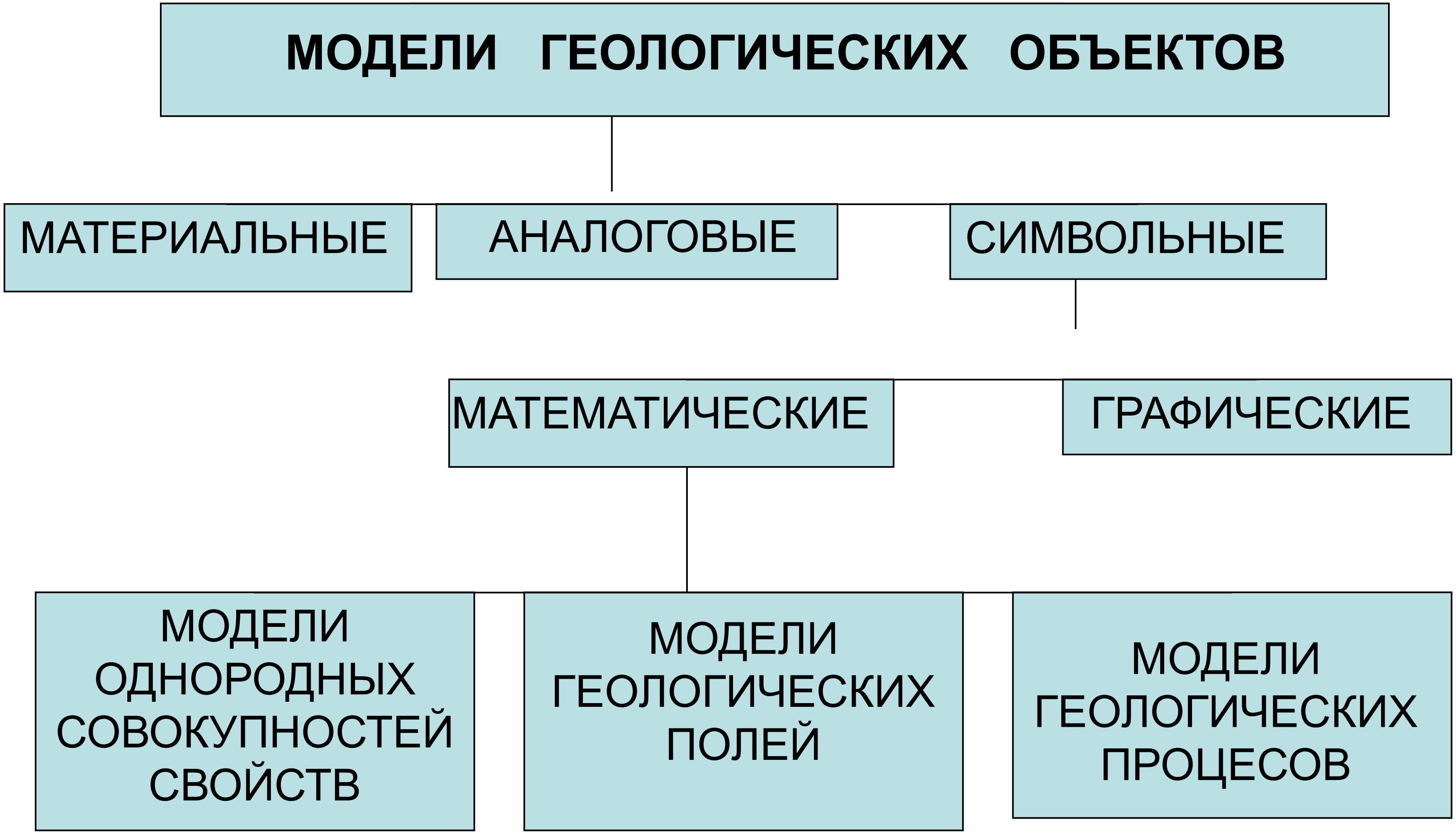
2) обработка геологической информации преимущественно на базе методов теории вероятностей и математической статистики для описания, сравнения, классификации геологических объектов и прогнозирования их свойств;

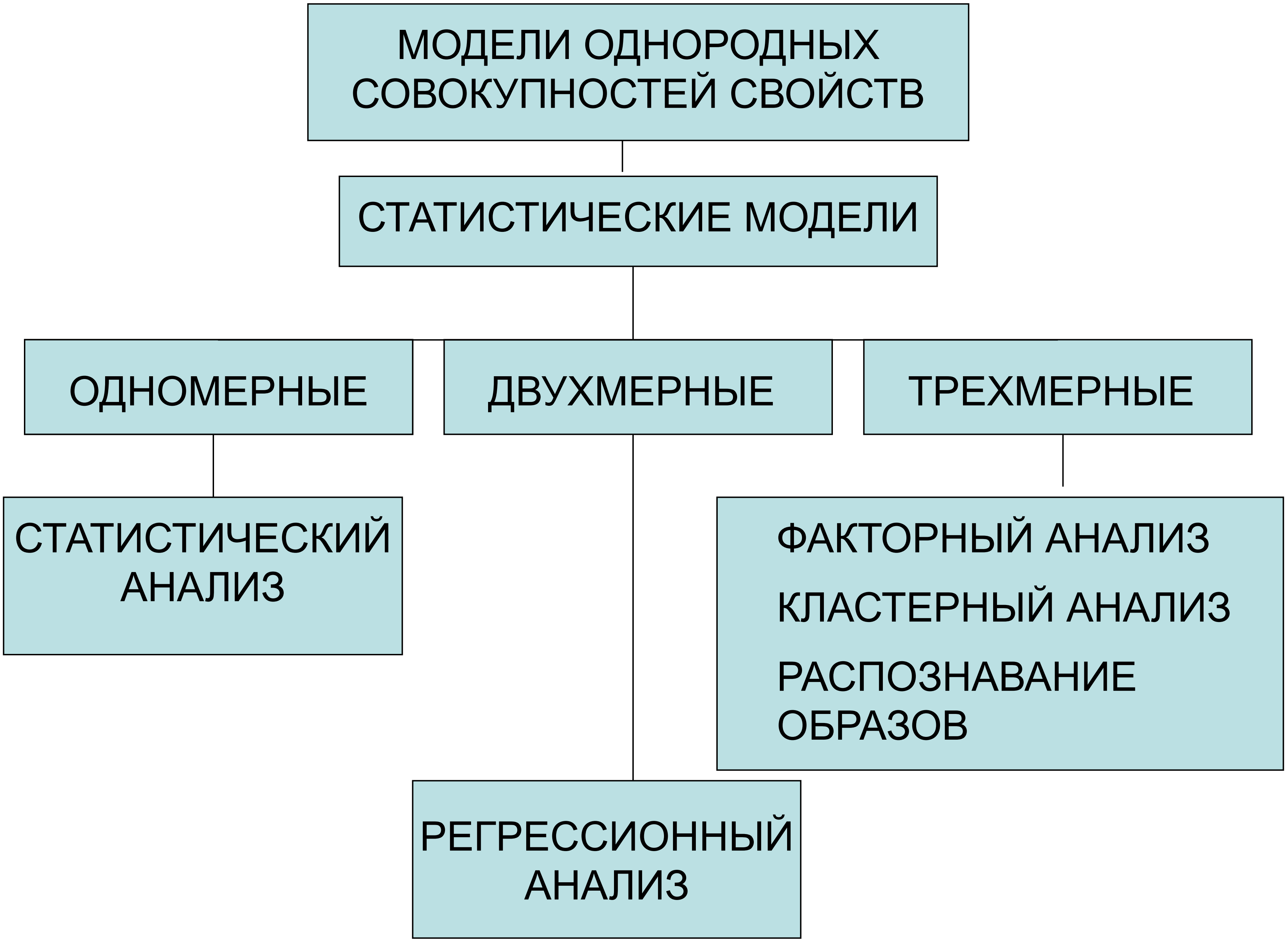
3) математическое моделирование геологических объектов и явлений для решения научных и прикладных задач;

4) автоматизация технологических операций, распространенных в геологии и горном деле (построение геологических карт и разрезов, подсчет запасов и ресурсов, проектирование разведочных и эксплуатационных работ и др).

ПОНЯТИЕ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

- *Математическая модель* - это совокупность представлений, предположений, гипотез и аксиом, отражающих существо изучаемого геологического объекта или явления.
- Модель выражается в математической форме и позволяет описывать, анализировать и прогнозировать свойства геологических объектов или последствия явлений.


МОДЕЛИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ
МАТЕРИАЛЬНЫЕ
АНАЛОГОВЫЕ
СИМВОЛЬНЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ГРАФИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ ОДНОРОДНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ СВОЙСТВ
МОДЕЛИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
МОДЕЛИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕСОВ


МОДЕЛИ ОДНОРОДНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ СВОЙСТВ
СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ОДНОМЕРНЫЕ
ДВУХМЕРНЫЕ
ТРЕХМЕРНЫЕ
СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ
КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ
РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Статистическая совокупность - множество случайных, однородных, повторяющихся объектов и явлений, обладающих качественной общностью или множество значений признака, обладающих свойствами случайных величин.

Одномерная, если характеризуется *одним* признаком, *двухмерная- двумя* признаками, *многомерной - тремя и более признаками* (трехмерной, четырехмерной,….).

Раздел математической статистики, который занимается изучением закономерностей в одномерных статистических совокупностях –

вариационный анализ

Генеральная и выборочная совокупности

Генеральная совокупность – *абстрактное понятие, это все возможные значения случайной величины изучаемого объекта*

Выборочная совокупность или выборка - *выборочные значения из генеральной совокупности, которые возможно или целесообразно использовать*

Задача статистического анализа
- по свойствам изучаемого признака в случайной выборке определенного объема сделать с определенной вероятностью заключение о свойствах этого признака во всей генеральной совокупности.

При статистическом моделировании используются выборки, отобранные по определенным правилам.

Главным требованием является *репрезентативность* (или *представительность*) выборки, которая должна *правильно* представлять *всю* генеральную совокупность.

- *Репрезентативные выборки* должны удовлетворять 4 условиям: **случайности, независимости, массовости и однородности**.

- Условие **случайности** означает, что все элементы генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попадания в выборку.
- Условие **независимости** означает, что результаты каждого наблюдения в выборке не зависят от других наблюдений.
- Условие **массовости** - выборка должна быть достаточной по объему, так как в соответствии с законом больших чисел статистическая закономерность проявляется лишь в массовых явлениях.
- Условие **однородности** — выборка должна состоять из наблюдений, принадлежащих к одному объекту и выполненных одним способом.

В *вариационном анализе* последовательно решаются 2 задачи:

1)упорядочение исходной статистической совокупности (по возрастанию или убыванию) →

вариационный ряд

2) подбор к упорядоченной статистической совокупности **теоретической модели** (вероятностной одномерной модели).

Различают ***неввзвешенные и взвешенные вариационные*** ряды.

Невзвешенным рядом называется упорядоченная совокупность *наблюденных* значений признака.

Упорядоченная по возрастанию совокупность интервалов (или классов) значений признака и соответствующих им частот называется ***взвешенным интервальным вариационным рядом.***

СОСТАВЛЕНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО РЯДА (табличный и графический)

1) упорядочивают значения признака по возрастанию;
2) определяют размах варьирования признака

$$Wu = Umax - Umin;$$

3) определяют число классов (интервалов) группирования по эмпирической формуле:

$$к = l + 4 * lgN$$

N - объем выборки

4) определяют ширину интервалов группирования:

$$\Delta U = Wu / к = (Umax - Umin)/(1 + 4 * lgN);$$

СОСТАВЛЕНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО РЯДА (табличный и графический)

5) выбирают границы классов и определяют середины интервалов группирования.
   Нижняя граница 1-го класса - ***Umin.***
   Верхняя граница 1-го класса -***Umin +ΔU***;
6) подсчитывают количество значений признака в каждом классе - *частота* класса
7) составляют таблицу - табличный способ изображения ***взвешенного интервального вариационного ряда распределения.***

ВЗВЕШЕННЫЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЩНОСТЕЙ РУДНОГО ТЕЛА

Границы классов U_j	0-1 м	1-2 м	2-3 м	3-4 м	4-5 м	Сумма
Середины классов $\hat{U}_j$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	
Частоты n_j	3	12	24	9	2	50
Накопленные частоты n_{sj}	3	15	39	48	50	
Частости w_j	0,06	0,24	0,48	0,18	0,04	1
Накопленные частости w_{sj}	0,06	0,30	0,78	0,96	1,00	
Произведения $n_j * \hat{U}_j$	1,5	18	60	31.5	9	120

основной интервальный ряд

преобразованные интервальные ряды

Класс со-держаний, %(границы классов)	Середины классов C_j	Число проб (частота) n_j	Накоплен-ные частоты n_{sj}	Частости w_j	Накоплен-ные частости w_{sj}
30-32	**31**	**2**	**2**	0,013605	0.013605
32-34	**33**	**6**	**8**	0,040816	0.054421
34-36	**35**	**9**	**17**	0,061224	0.115645
36-38	**37**	**14**	**31**	0,095238	0.210883
38-40	**39**	**20**	**51**	0,136054	0.346937
40-42	**41**	**25**	**76**	0,170068	0.517005
42-44	**43**	**21**	**97**	0,142857	0.659862
44-46	**45**	**17**	**114**	0,115646	0.775508
46-48	**47**	**13**	**127**	0,088435	0.863943
48-50	**49**	**10**	**137**	0,068027	0.93197
50-52	**51**	**5**	**142**	0,034014	0.965984
52-54	**53**	**3**	**145**	0,020408	0.986392
54-56	**55**	**2**	**147**	0,013605	0.999997
Сумма		**147**		**1**	

Сумма частот всех классов вариационного ряда равна объему выборки, т.е. $$\sum_{j=1}^{k} n_j = N$$, где *k* - количество классов, *N* - объем выборки.

<u>Частость</u> **w_j** данного класса группирования $$w_j = \frac{n_j}{N}$$

$$\sum w_j = 1$$

<u>Накопленная частота</u> ***n_{sj}*** данного класса - сумма частот с первого по данный класс

$$n_{sj} = \sum_{j=1}^{s} n_j \qquad w_{sj} = \frac{n_{sj}}{N}$$

<u>Накопленная частость</u> ***w_{sj}***

Различают графики вариационных рядов:

Гистограмма (или **столбчатая диаграмма**) - график изменения частот признака по интервалам его группирования

Интегральная гистограмма - график изменения накопленных частот признака по интервалам его группирования

Полигон распределения - график, по оси абсцисс которого откладываются *середины интервалов* группирования $\hat{U}_j$, а по оси ординат – соответствующие им частоты n_j.

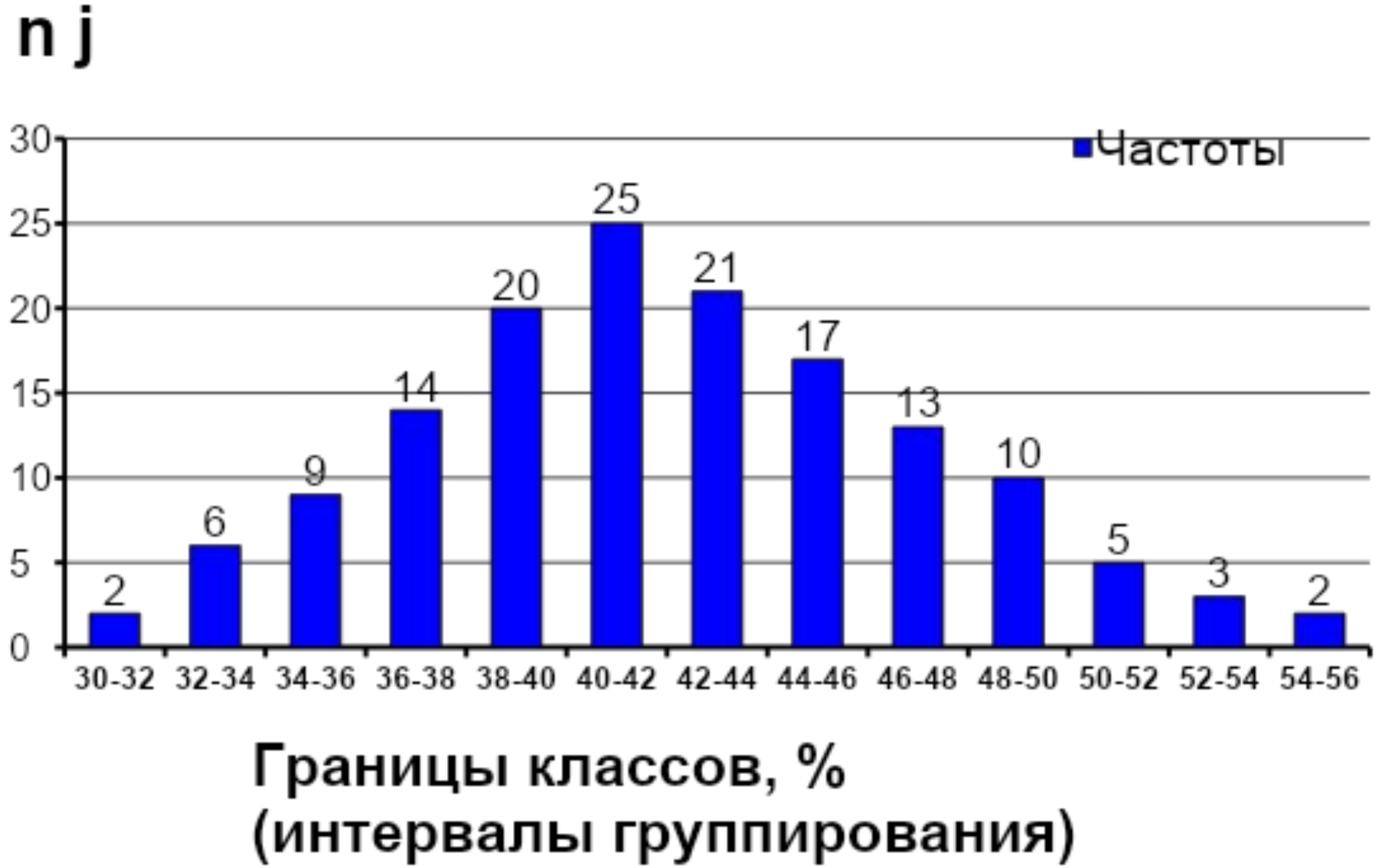
Аналогичный график для частостей –

вариационная кривая, а для накопленных частостей - **кумулятивная кривая** **(кумулята).**

Построение гистограммы

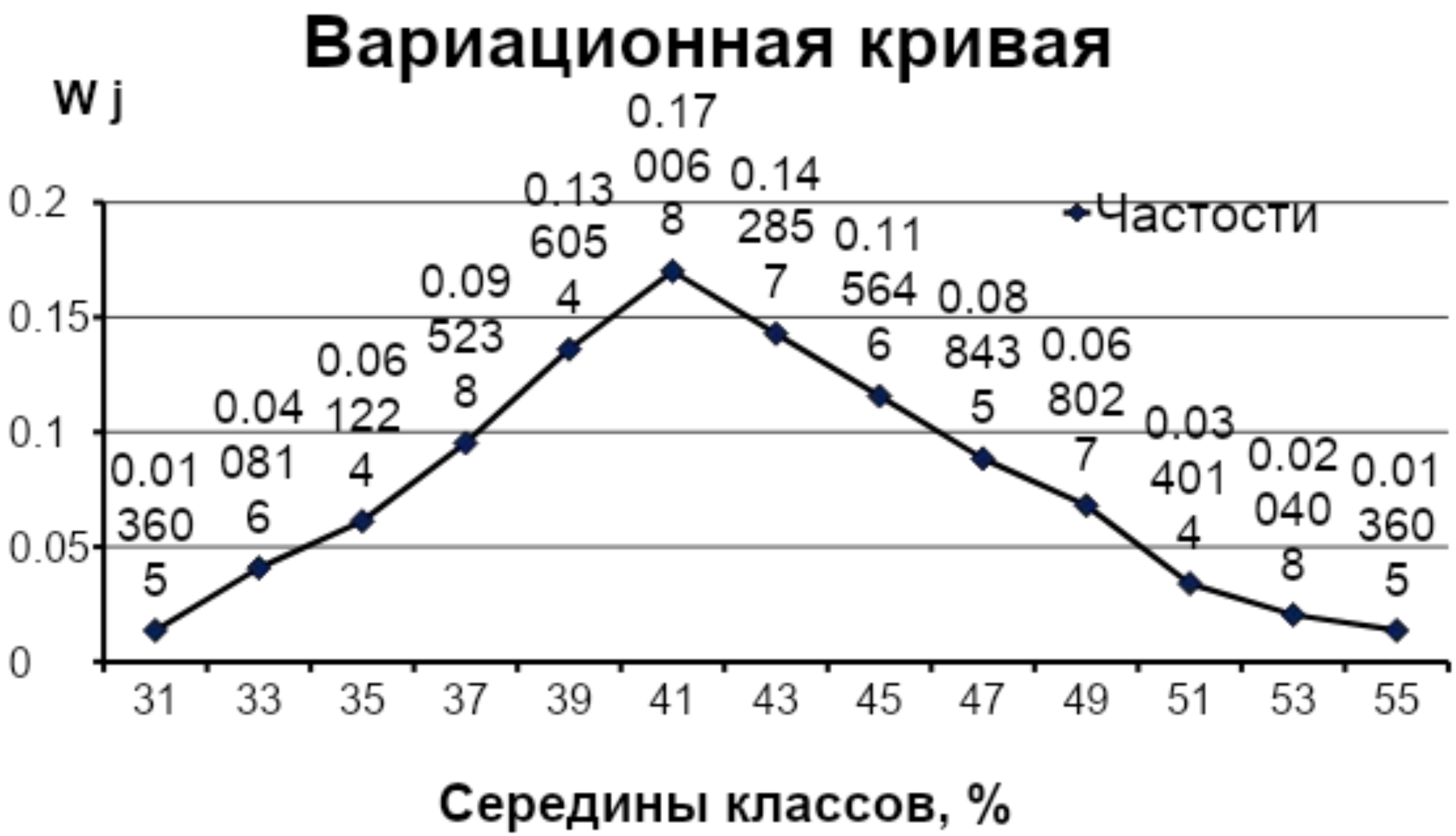
- По оси **y** – функция плотности распределения **частота**
- По оси **x** - интервалы (классы) значений случайной величины (признака)

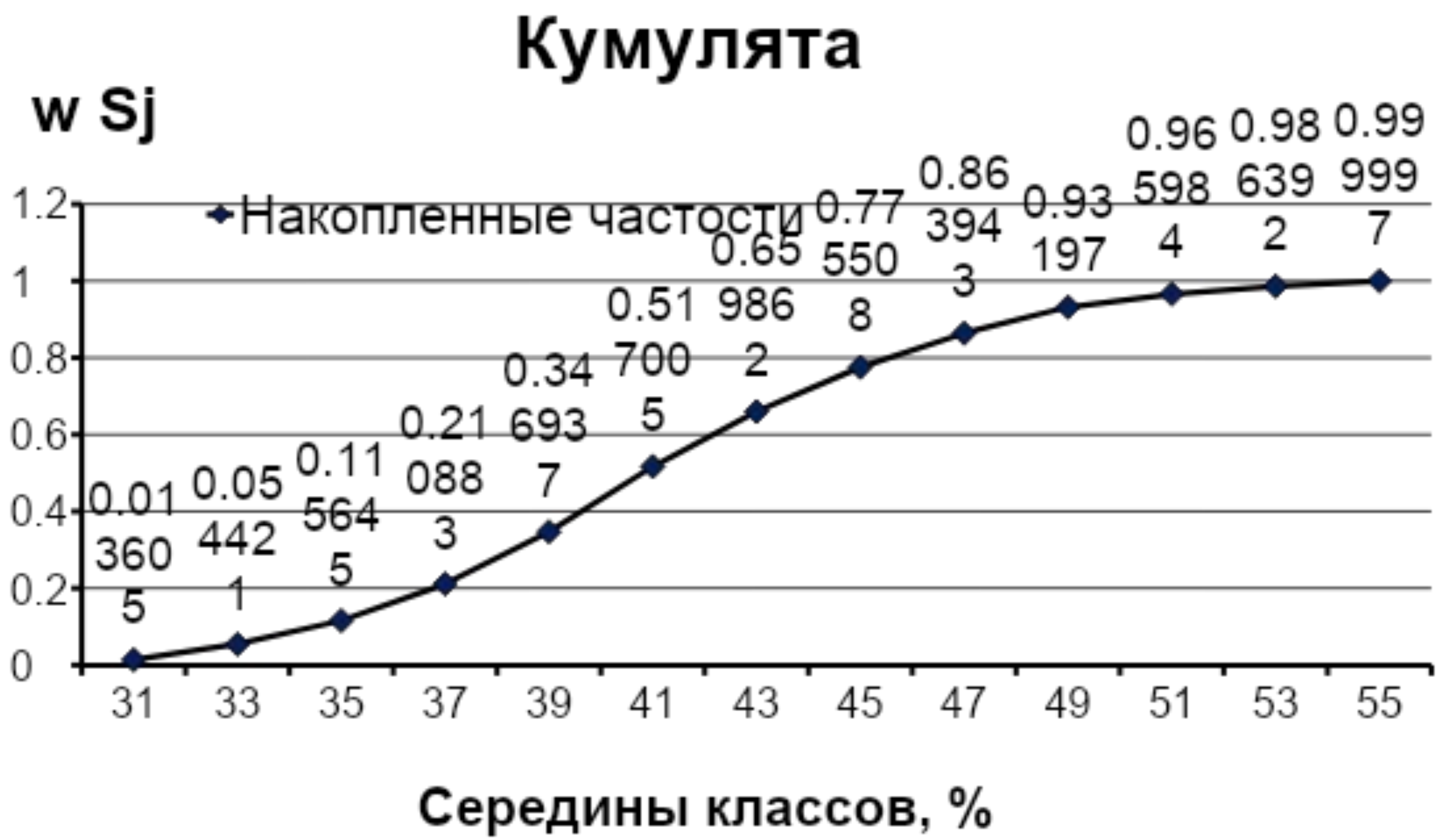
Гистограмма



Интегральная гистограмма


Полигон распределения
n j
30
25
20
15
10
5
0
Частоты
2
6
9
14
20
25
21
17
13
10
5
3
2
31
33
35
37
39
41
43
45
47
49
51
53
55
Середины классов, %


Вариационная кривая
W j
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.01 360 5
0.04 081 6
0.06 122 4
0.09 523 8
0.13 605 4
0.17 006 8
0.14 285 7
0.11 564 6
0.08 843 5
0.06 802 7
0.03 401 4
0.02 040 8
0.01 360 5
Частости
31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55
Середины классов, %



<u>Графическое изображение</u> рядов - наглядно, но не полно.

Наиболее полным является ***<u>аналитический способ исследования,</u>*** при котором определяют **числовые характеристики вариационного ряда.**

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

1) характеристики (меры) положения;
2) характеристики (меры) рассеяния.

Мерами положения называются характерные точки на оси абсцисс графика распределения, около которых группируется подавляющее число наблюдений (различные виды **средних, мода и медиана**).

Среднее арифметическое для невзвешенного ряда:

$$\overline{U} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i$$

среднее взвешенное - для взвешенного интервального ряда:

$$\overline{U}_{взв} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{к} U_j \cdot n_j$$

Для приближенной оценки **среднего** при первичной обработке данных используются непараметрические показатели:

мода и **медиана.**

Модой (*Мо*) называется то значение признака, которому соответствует максимальная частота или частость. Графически мода - это то значение признака U_i, которому соответствует максимум на вариационной кривой или полигоне распределения.

Вариационный ряд и вариационная кривая с 1 модой называются одномодальными, с 2 модами - бимодальными, с 3 модами и более - полимодальными.

Медианой *(Me)* – называется то значение признака, которое соответствует середине упорядоченного вариационного ряда, т.е. которое делит упорядоченный ряд на две равные по численности части. Графически медиану определяют по кумулятивной кривой - это то значение признака, которому соответствует накопленная частость на кумуляте w_{sj} =0,5.

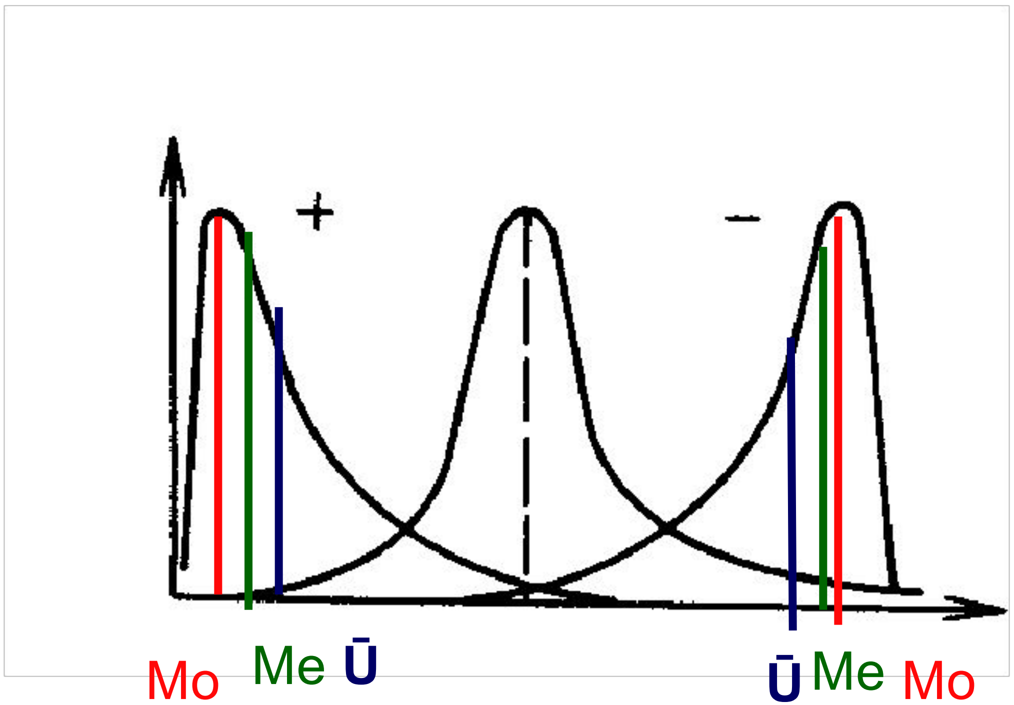
Соотношение **среднего, моды и медианы**: у симметричных распределений

Mo=Me.

У правоасимметричных (положительно асимметричных) рядов распределения ***Mo<Me<***$\overline{U}$,

у левоасимметричных (отрицательно асимметричных):

Mo>Me>$\overline{U}$.

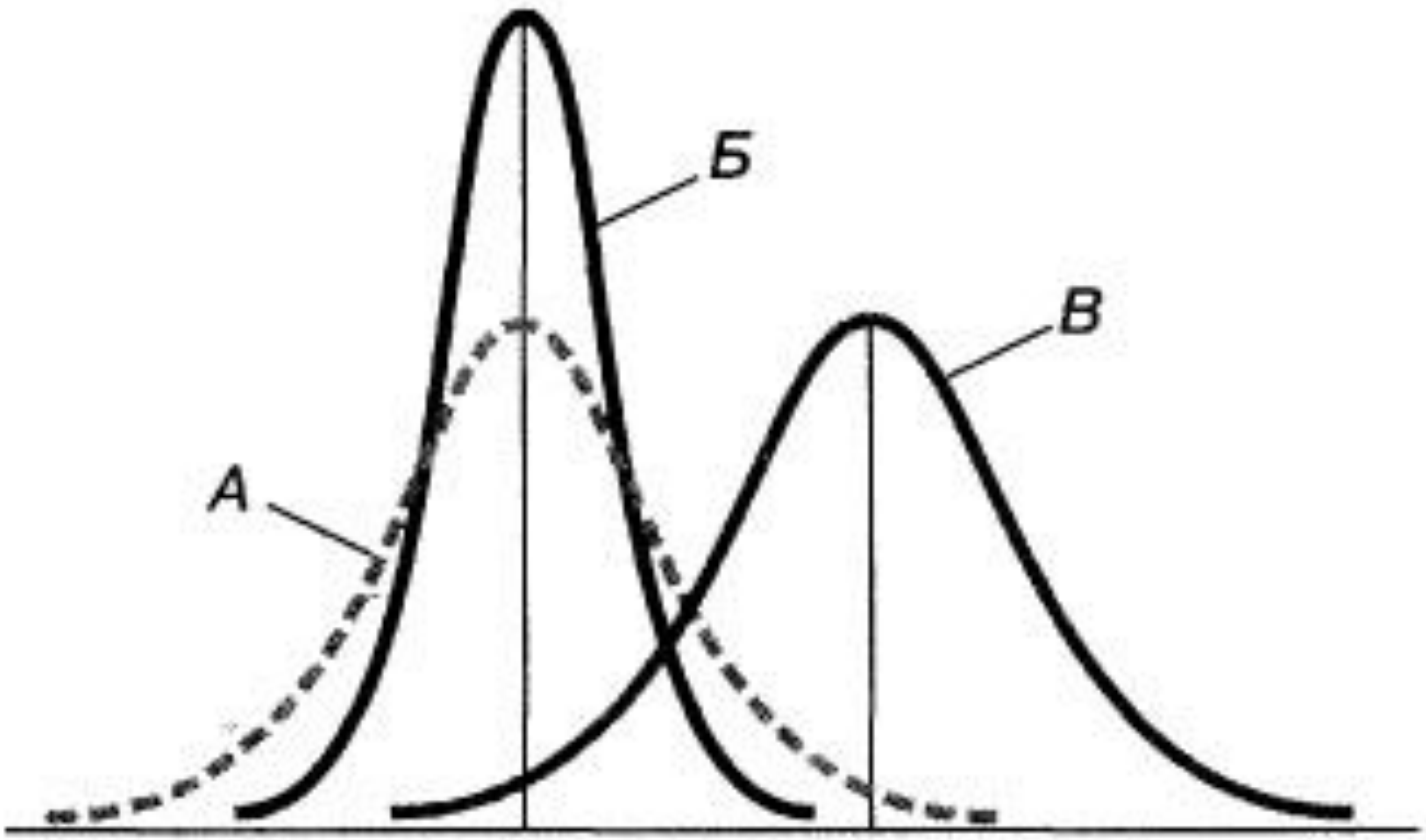


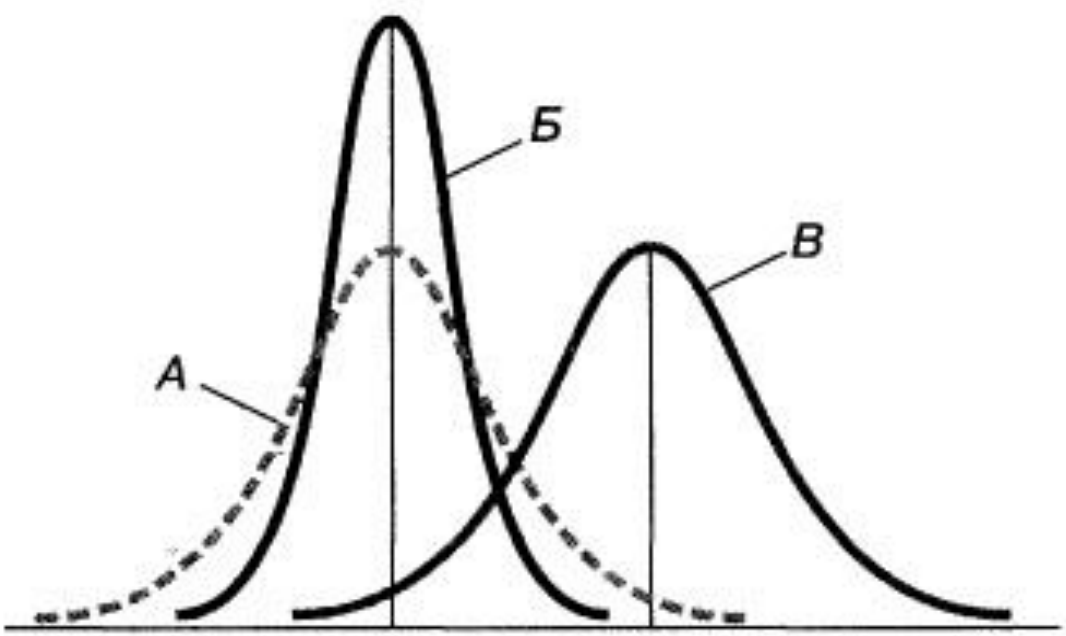
Мерами рассеяния называются статистические характеристики, которые указывают на степень и характер концентрации или рассеяния значений признака относительно мер положения.

выборочная дисперсия,
стандартное отклонение,
коэффициент вариации,
выборочные показатели асимметрии и эксцесса.

Выборочная дисперсия - средний квадрат отклонений значений признака от средней величины.

Графически дисперсия отражает сжатость или растянутость вариационной кривой или полигона распределения вдоль оси абсцисс.


Б
В
А



1) Распределения А и Б имеют одинаковое математическое ожидание μ, но разные стандартные отклонения.
2) Распределения А и В имеют одинаковое стандартное отклонение σ, но разные математические ожидания.
3) Распределения Б и В имеют разные математические ожидания и стандартные отклонения.

для невзвешенного ряда и неупорядоченного признака:

$$S^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (U_i - \overline{U})^2$$

для взвешенного интервального ряда:

$$S^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{k} (\hat{U}_j - \overline{U})^2 \cdot n_j$$

S^2 - заниженная оценка истинной дисперсии

несмещенные оценки дисперсии:

$$S^2{}_{несм.} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (U_i - \overline{U})^2$$

$$S^2{}_{несм.} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} (\hat{U}_j - \overline{U})^2 \cdot n_j$$

Для сравнения дисперсий разных признаков рассчитывают безразмерный параметр - **коэффициент вариации V** - относительное стандартное отклонение арифметическое

$$V = \frac{S}{\overline{\overline{U}}} \cdot 100\%$$

По значениям **коэффициента вариации V** в геологии выделяют **5 типов распределений**:

1) весьма равномерное $V<5\%$,
2) равномерное $V=5\text{-}40\%$,
3) неравномерное $V=40\text{-}100\%$
4) весьма неравномерное $V= 100\text{-}150\%$,
5) крайне неравномерное $V> 150\%$.

Выборочный **показатель асимметрии** указывает на характер и степень симметрии или асимметрии вариационной кривой.

для невзвешенного ряда и неупорядоченного признака:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N} (U_i - \overline{U})^3}{N \cdot S^3}$$

для взвешенного интервального ряда:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^{k} (U_i - \overline{U})^3 \cdot n_j}{N \cdot S^3}$$

По степени асимметрии выделяют **4 типа** вариационных кривых:

1) симметричные $A = 0$;

2) практически симметричные $|A| \leq 0{,}1$

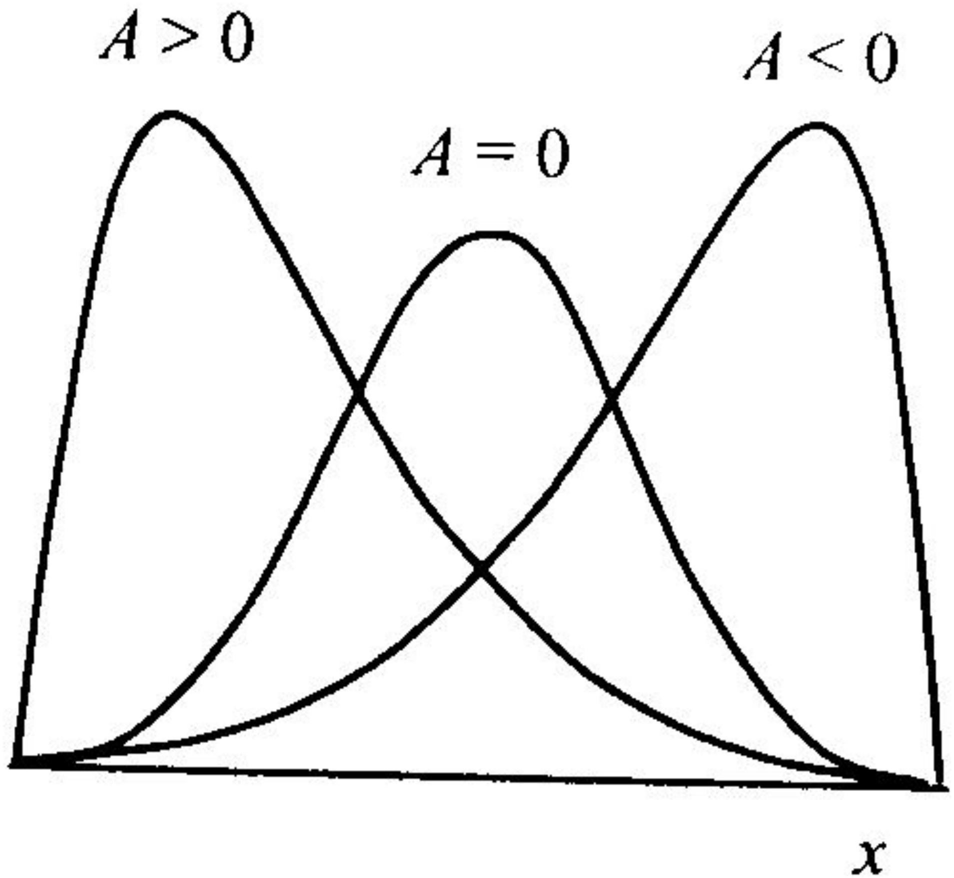
3) слабо асимметричные $0{,}1 < |A| \leq 0{,}5$

4) сильно асимметричные $|A| > 0{,}5$

По характеру асимметрии различают **2 типа** кривых:

1) правоасимметричные (положительно асимметричные) при $A>0$;

2) левоасимметричные (отрицательно асимметричные) при $A<0$.



$A > 0$
$A = 0$
$A < 0$
x

Выборочный **показатель эксцесса** характеризует степень крутовершинности или плосковершинности вариационной кривой по сравнению с кривой нормального распределения. Рассчитывается по формулам: для невзвешенного ряда:

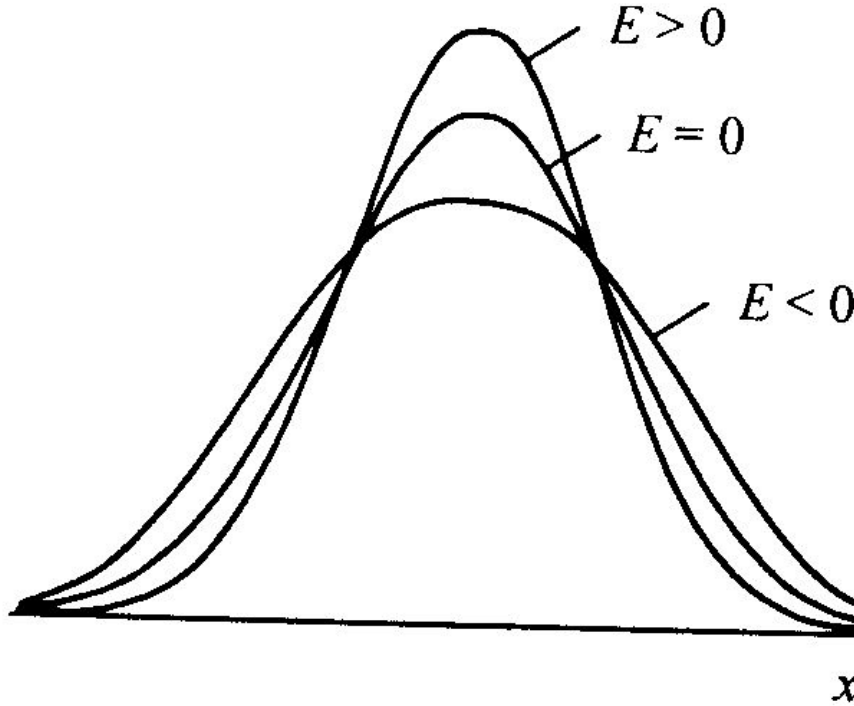
$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N} (U_i - \overline{U})^4}{N \cdot S^4} - 3,$$

для взвешенного ряда

$$E = \frac{\sum_{j=1}^{k} (\hat{U}_j - \overline{U})^4 \cdot n_j}{N \cdot S^4} - 3$$

Коэффициент эксцесса (безразмерный параметр)

Знак эксцесса указывает на положение вершины вариационной кривой относительно вершины кривой нормального распределения.



ВИДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Статистическим моментом q-го порядка называется среднее из q-тых степеней отклонений значений признака от некоторой постоянной величины U_0.

Для взвешенного интервального ряда рассчитывается по формуле:

$$M_q = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}(\hat{U}_j - U_0)^q \cdot n_j$$

где q - порядок момента (M_q), N - объем выборки, $к$ - количество интервалов вариационного ряда, $\hat{U}_j$ – середина j-го интервала вариационного ряда, n_j - частоты.

Различают 5 видов моментов:

1) начальные m_q;
2) центральные μ_q;
3) основные v_q;
4) смешанные;
5) условные ${}^{K}m_q$.

Начальными m_q называются моменты, в которых U_0**=0**, т.е. начало отсчета совмещается с нулем (началом координат).

1) 0 порядка (q=0): $m_0 = \frac{\sum \hat{U}_j^0 \cdot n_j}{N} = \frac{\sum n_j}{N} = \frac{N}{N} = 1$;

2) 1 порядка (q=1): $m_1 = \frac{\sum \hat{U}_j^1 \cdot n_j}{N} = \overline{U}$ - т.е. среднее взвешенное;

3) 2 порядка (q=2): $m_2 = \frac{\sum \hat{U}_j^2 \cdot n_j}{N} = \overline{U}^2$ - т.е. средневзвешенный квадрат;

4) 3 порядка (q=3): $m_3 = \frac{\sum \hat{U}_j^3 \cdot n_j}{N} = \overline{U}^3$ - т.е. средневзвешенный куб;

5) 4 порядка (q=4): $m_4 = \frac{\sum \hat{U}_j^4 \cdot n_j}{N} = \overline{U}^4$ - т.е. средневзвешенная четвертая степень.

<u>Центральными</u> называются <u>моменты,</u> в которых $U_0 = \overline{U}$, т.е. отклонения рассчитываются относительно средней величины ряда.

1) 0 порядка: $\mu_0 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}(\hat{U}_j - \overline{U})^0 \cdot n_j}{N} = \dfrac{\sum n_j}{N} = \dfrac{N}{N} = 1$;

2) 1 порядка: $\mu_1 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}(\hat{U}_j - \overline{U})^1 \cdot n_j}{N} = \dfrac{\sum \hat{U}_j \cdot n_j}{N} - \dfrac{\overline{U}\sum n_j}{N} = \overline{U} - \overline{U} = 0$

3) 2 порядка: $\mu_2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}(\hat{U}_j - \overline{U})^2 \cdot n_j}{N} = S^2$ - выборочная дисперсия;

4) 3 порядка: $\mu_3 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}(\hat{U}_j - \overline{U})^3 \cdot n_j}{N}$ для расчетов коэфф. асимметрии;

5) 4 порядка: $\mu_4 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}(\hat{U}_j - \overline{U})^4 \cdot n_j}{N}$ для расчетов коэфф. эксцесса.

При расчетах центральных моментов чаще используют более простые формулы св **начальных** моментов с **центральными:**

$$\mu_2 = m_2 - (m_1)^2\ ;$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3\ ;$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

Основные моменты представляют собой нормированные, т.е. приведенные к одному масштабу безразмерные величины. Они рассчитываются путем деления центральных моментов q-го порядка на стандартные отклонения в q-ой степени, соответствующей порядку момента.

I) основной момент 0 порядка: $$\nu_0 = \frac{\mu_0}{S^0} = \frac{1}{1} = 1$$

2) основ, момент 1 порядка: $$\nu_1 = \frac{\mu_1}{S^1} = \frac{0}{S^1} = 0$$

3) основной момент 2 порядка: $$\nu_2 = \frac{\mu_2}{S^2} = \frac{S^2}{S^2} = 1$$;

4) 3 порядка: $$\nu_3 = \frac{\mu_3}{S^3} = A$$ — выборочный коэффициент асимметрии;

5) 4 порядка: $$\nu_4 = \frac{\mu_4}{S^4}$$ - для расчета эксцесса: E=ν_4 - 3.

Условные моменты ${}^{k}m_q$ рассчитывают, когда начало отсчета совпадает с серединой какого-либо произвольно взятого интервала ($U_0 = \hat{U}_j$).

При большом объеме выборки статистики положения и рассеяния интервального вариационного ряда рассчитывают с помощью условных начальных моментов первых 4 порядков. Расчеты проводятся **методом замены переменных** в следующей последовательности:

Интервалы содержаний железа, %	Середины интервалов $\hat{U}_j$	Частоты n_j	Условные классы k_j	$n_j \cdot k_j$	$n_j \cdot k_j^2$	$n_j \cdot k_j^3$	$n_j \cdot k_j^4$
1	2	3	4	5	6	7	8
48-50	49	6	-2	-12	24	-48	96
50-52	51	10	-1	-10	10	-10	10
52-54	Me=53	15	0	0	0	0	0
54-56	55	13	1	13	13	13	13
56-58	57	6	2	12	24	48	96
Сумма		50		3	71	3	215

2) совмещают место нуля U_0 с серединой медианного интервала $\left(U_0 = \hat{U}_{Me} = U_3 = 53\%\right)$,

определяют номера условных классов по формуле: $K_j = \dfrac{\hat{U}_j - U_0}{\Delta U}$ с учетом знака; при этом номер медианного класса будет равен 0, так как $K_{Me} = \dfrac{U_{Me} - U_{Me}}{\Delta U} = \dfrac{(53-53)}{2} = 0$, номера домедианных классов будут уменьшаться на 1, а послемедианных классов - увеличиваться на 1;

3) находят произведения частот на номера условных классов $\boldsymbol{K_j}$ в степени от 1 до 4 для каждого класса (столбцы 5-8), затем их суммы по столбцам 5-8, после чего - начальные условные моменты 4-х порядков по формулам:

$$^k m_1 = \frac{j = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j k_j}{N} = \frac{3}{50} = 0{,}06\ ; \quad ^k m_2 = \frac{j = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j k_j^2}{N} = \frac{71}{50} = 1{,}42\ ;$$

$$^k m_3 = \frac{j = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j k_j^3}{N} = \frac{3}{50} = 0{,}06 \quad ^k m_4 = \frac{j = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j k_j^4}{N} = \frac{215}{50} = 4{,}30$$

4) находят центральные моменты 2, 3 и 4 порядков, используя те же, что и раньше, формулы связи условных начальных моментов с центральными:

Класс содержаний, %(границы классов)	Середины классов C_j	Число проб (частота) n_j	Накопленные частоты n_{sj}	Частости w_j	Накопленные частости w_{sj}	
30-32	**31**	**2**	**2**	0,013605	0.013605	
32-34	**33**	**6**	**8**	0,040816	0.054421	
34-36	**35**	**9**	**17**	0,061224	0.115645	
36-38	**37**	**14**	**31**	0,095238	0.210883	
38-40	**39**	**20**	**51**	0,136054	0.346937	
40-42	**41**	**25**	**76**	0,170068	0.517005	
42-44	**43**	**21**	**97**	0,142857	0.659862	
44-46	**45**	**17**	**114**	0,115646	0.775508	
46-48	**47**	**13**	**127**	0,088435	0.863943	
48-50	**49**	**10**	**137**	0,068027	0.93197	
50-52	**51**	**5**	**142**	0,034014	0.965984	
52-54	**53**	**3**	**145**	0,020408	0.986392	
54-56	**55**	**2**	**147**	0,013605	0.999997	
Сумма		**147**		**1**		