Комбинаторные задачи о числах

Выполнил:
Смирнов Павел,
6 «Б» класс
СШ №1 г. Дятлово

Проблема:

простой перебор не даёт полного и обоснованного решения задач, необходимо использовать свойства простых чисел, комбинаторный подход.

Предмет исследования:

задачи, связанные с нахождением пар чисел обладающих данным свойством

<u>***Цель работы:***</u>

Исследовать задачи на нахождение всех пар натуральных чисел, которые в произведение дают числа, записанные одинаковыми цифрами.

Задачи:

- повторить свойства простых чисел;
- познакомится с комбинаторным методом решения задач;
- решить задачи на нахождение пар чисел;
- применять полученные знания в дальнейшем обучении.

***Методы исследования*:**

- изучение литературы по теме;
- анализ данных;
- вычисление;
- обобщение.

Теоретические сведения

Комбинаторика - один из разделов математики. Слово комбинаторика происходит от латинского слова combinare, которое означает соединять, сочетать. Она включает в себя задачи, решая которые приходиться составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи называются комбинаторными задачами.

Задачи на однозначные и двузначные числа

Задача №1

Сколько существует пар натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является двузначным числом, записанным одинаковыми цифрами?

(Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение.

а и в - натуральные числа, причем, $а \cdot в = X \cdot 11$, где $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Если а=X, то в=11 и имеем случаи.

$X=1$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 1 \cdot 11 = 11$;

$X=2$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 2 \cdot 11 = 22$;

$X=3$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 3 \cdot 11 = 33$;

$X=4$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 4 \cdot 11 = 44$;

$X=5$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 5 \cdot 11 = 55$;

$X=6$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 6 \cdot 11 = 66$;

$X=7$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 7 \cdot 11 = 77$;

$X=8$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 8 \cdot 11 = 88$;

$X=9$, $а \cdot в = X \cdot 11 = 9 \cdot 11 = 99$.

В результате получаем 9 пар чисел:

(1;11), (2;11), (3;11), (4;11), (5;11), (6;11), (7;11), (8;11), (9;11).

2)Если а=1, то в=$X \cdot 11$

X=2, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 22 = 22$;

X=3, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 33 = 33$;

X=4, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 44 = 44$;

X=5, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 55 = 55$;

X=6, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 66 = 66$;

X=7, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 77 = 77$;

X=8, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 88 = 88$;

X=9, $а \cdot в = 1 \cdot X \cdot 11 = 1 \cdot 99 = 99$.

В итоге получаем 8 пар чисел:

(1;22), (1;33), (1;44), (1;55), (1;66), (1;77), (1;88), (1;99).

3)Если $а=p_1$, $в=p_2\cdot 11$, где $p_1=p_2$.

$а\cdot в=p_1\cdot(p_2\cdot 11)=2\cdot(2\cdot 11)=2\cdot 22=44$;

$а\cdot в=p_1\cdot(p_2\cdot 11)=3\cdot(3\cdot 11)=3\cdot 33=99$.

В этом случае получаем две пары:

(2;22), (3;33).

4)Если $а=p_1$, $в=p_2 \cdot 11$, где $p_1 \neq p_2$.

$а \cdot в=p_1 \cdot (p_2 \cdot 11)=2 \cdot (3 \cdot 11)=2 \cdot 33=66$;

$а \cdot в=p_1 \cdot (p_2 \cdot 11)=3 \cdot (2 \cdot 11)=3 \cdot 22=66$;

$а \cdot в=p_1 \cdot (p_2 \cdot 11)=2 \cdot (4 \cdot 11)=2 \cdot 44=88$;

$а \cdot в=p_1 \cdot (p_2 \cdot 11)=4 \cdot (2 \cdot 11)=4 \cdot 22=88$.

В результате имеем 4 пары:

(2;33), (3;22), (2;44), (4;22).

Обобщая всё, имеем 23 пары чисел: $23=9+8+2+4$.

Для данной задачи можно сделать и следующим образом:

$11=1\cdot 11$;

$22=1\cdot 22=2\cdot 11$;

$33=1\cdot 33=3\cdot 11$;

$44=1\cdot 44=2\cdot 22=4\cdot 11$;

$55=1\cdot 55=5\cdot 11$;

$66=1\cdot 66=2\cdot 33=3\cdot 22=6\cdot 11$;

$77=1\cdot 77=7\cdot 11$;

$88=1\cdot 88=2\cdot 44=4\cdot 22=8\cdot 11$;

$99=1\cdot 99=3\cdot 33=9\cdot 11$.

Ответ: 23 пары.

Задача №2

- А) Найдите как можно больше пар двузначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является трехзначным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).
- Б) Сколько существует пар указанных, в пункте А?

Решение:

По условию мы имеем, что а и в - натуральные числа, причем, а а·в=X·111, где X={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Заметим, что а·в=X·111=X·3·37, и числа 3 и 37 взаимно просты. Сделаем перебор.

X=1, то а·в=3·37 – не подходит, так как 3 – однозначное число;

X=2, то а·в=2·3·37=6·37 – не соответствует условию (6 – однозначное);

X=3, то а·в=3·3·37=9·37 – не соответствует условию (9 – однозначное);

X=4, то а·в=4·3·37=12·37=444;

X=5, то а·в=5·3·37=15·37=555;

X=6, то а·в=6·3·37=18·37=666;

X=7, то а·в=7·3·37=21·37=777;

X=8, то а·в=8·3·37=24·37=888;

X=9, то а·в=9·3·37=27·37=999.

В итоге получаем 6 следующих пар двузначных чисел: (12;37),(15;37), (18;37), (21;37), (24;37), (27;37).

Ответ: А)(12;37),(15;37), (18;37), (21;37), (24;37), (27;37).

Б) 6 пар

Задача №3

Сколько существует пар двузначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является четырехзначным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

Поскольку четырехзначное число состоит из одинаковых цифр, то его можно представить в виде т. е. $а \cdot в = X \cdot 1111$, где $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Заметим, что $а \cdot в = X \cdot 1111 = X \cdot 11 \cdot 101$.

Так как число 101 является простым и трехзначным, то дальнейшее разложение, что бы все множители были двухзначными невозможно. Поэтому, таких пар двухзначных чисел не существует.

Ответ: таких пар нет.

Задача №4

Сколько существует пар двузначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является пятизначным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

По условию имеем, что $а \cdot в = X \cdot 11111$, где $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$а \cdot в = X \cdot 11111 = X \cdot 41 \cdot 271$, где 271 – простое число и является трехзначным, что не соответствует условию. Поэтому дальнейшее разложение невозможно и таких пар нет.

Ответ: таких пар нет.

Задача №5

Сколько существует пар двузначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является шестизначным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

а·в=Х*111111, где X={1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

а·в=X·111111=X·3·37037=X·3·37·1001=

=X·111·1001. Таких пар нет, так как числа 111 и 1001 не двузначные.

Ответ: таких пар нет.

Задачи на трехзначные числа

Задача №1

Сколько существует пар трехзначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является четырехзначным натуральным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

Поскольку а·в=$X\cdot 1111=X\cdot 11\cdot 101$, где $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, то один из множителей $X\cdot 11$ всегда будет двузначным. Поэтому, таких пар чисел для данного случая не существует.

Ответ: нет таких пар.

Задача №2

Сколько существует пар трехзначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является пятизначным натуральным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

По условию имеем, что $a \cdot в = X * 11111$, где $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$a \cdot в = X \cdot 11111 = X \cdot 41 \cdot 271$, где 271 – простое число и является трехзначным.

Сделаем перебор.

$X=1$, то $a \cdot в = 1 \cdot 41 \cdot 271 = 41 \cdot 271$ – не подходит, так как 41– двузначное число;

$X=2$, то $a \cdot в = 2 \cdot 41 \cdot 271 = 82 \cdot 271$ – не соответствует условию (82 –двузначное);

$X=3$, то $a \cdot в = 3 \cdot 41 \cdot 271 = 123 \cdot 271 = 33333$;

$X=4$, то $a \cdot в = 4 \cdot 41 \cdot 271 = 164 \cdot 271 = 44444$;

$X=5$, то $a \cdot в = 5 \cdot 41 \cdot 271 = 205 \cdot 271 = 55555$;

$X=6$, то $a \cdot в = 6 \cdot 41 \cdot 271 = 246 \cdot 271 = 66666$;

$X=7$, то $a \cdot в = 7 \cdot 41 \cdot 271 = 287 \cdot 271 = 77777$;

$X=8$, то $a \cdot в = 8 \cdot 41 \cdot 271 = 328 \cdot 271 = 88888$;

$X=9$, то $a \cdot в = 9 \cdot 41 \cdot 271 = 369 \cdot 271 = 99999$.

В итоге получаем 7 следующих пар трехзначных чисел:

(123;271),(164;271), (205;271), (246;271), (287;271), (328;271), (369;271).

Ответ: (123;271),(164;271), (205;271), (246;271), (287;271), (328;271), (369;271).

Задача №3

Сколько существует пар трехзначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является шестизначным натуральным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

$а \cdot в = X * 111111$, где $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$а \cdot в = X \cdot 111111 = X \cdot 3 \cdot 37037 = X \cdot 3 \cdot 37 \cdot 1001 =$

$= X \cdot 111 \cdot 1001$. Таких пар нет, так как число 1001 простое и четырехзначное.

Ответ: таких пар нет.

Задача №4

Сколько существует пар трехзначных натуральных чисел **а** и **в**, для которых произведение, **а·в** является семизначным натуральным числом, записанным одинаковыми цифрами? (Пары **а и в**, а также **в и а** считаются один раз).

Решение:

а·в=Х*1111111, где X={1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

а·в=X·1111111=X·239·4649. Таких пар нет, так как число 4649 простое и четырехзначное.

Ответ: таких пар нет.

Вывод:

- научился грамотно оперировать такими понятиями как «множество», «перебор», «сочетание», «простые числа» и использовать их при решении задач;
- расширил свои знания по математике, познакомился с ещё одним способом решения задач, который был мне мало знаком.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ.