Алгоритмы вычислительной математики

Что такое вычислительная математика?

Вычислительная математика — часть информатики, использующая математические методы.

Часто этот термин трактуют более узко, под вычислительной математикой понимают раздел математики — ***прикладную математику***.

Что такое вычислительная математика?

В свою очередь, прикладная математика включает в себя ***теорию численных методов*** и ***алгоритмов решения типовых математических задач***. С некоторыми из них мы и будем знакомиться на уроках.


компьютер
арифмометр
счёты
абак

Методы решения математических задач

Найти целые корни уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

На отрезке [-10, 10].

Аналитическое решение

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

Численное решение

Находим целые корни уравнения на отрезке простым ***перебором всех*** целых чисел на данном отрезке

-10	132
-9	110
-8	90
-7	72
-6	56
-5	42
-4	30
-3	20
-2	12
-1	6
0	2
1	0
2	0
3	2
4	6
5	12
6	20
7	30
8	42
9	56
10	72

Найдите корень уравнения на отрезке [0,1]

$$8x^5 - 4x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 7x - 2 = 0$$

Методы решения математических задач

Аналитические

Достоинства — решения точные

Недостатки — не всегда можно получить

Численные

Достоинства — универсальность

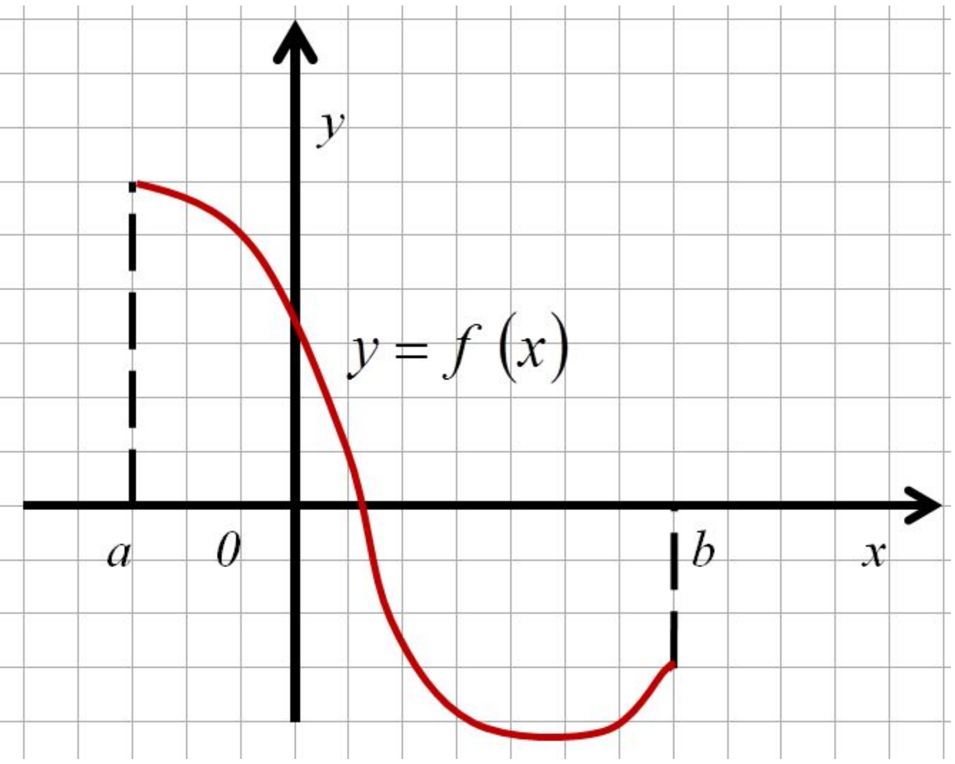
Недостатки:
- решения находятся для конкретных исходных данных,
- решения получаются с погрешностью.

Основные задачи

- поиск корней уравнения,
- поиск значения производной в заданной точке,
- вычисление определенного интеграла,
- вычисление значений сложных функций,
- решение систем линейных уравнений,
- решение систем нелинейных уравнений,
- сортировка и поиск информации,
- шифрование и дешифрование сообщений.

Решение уравнений

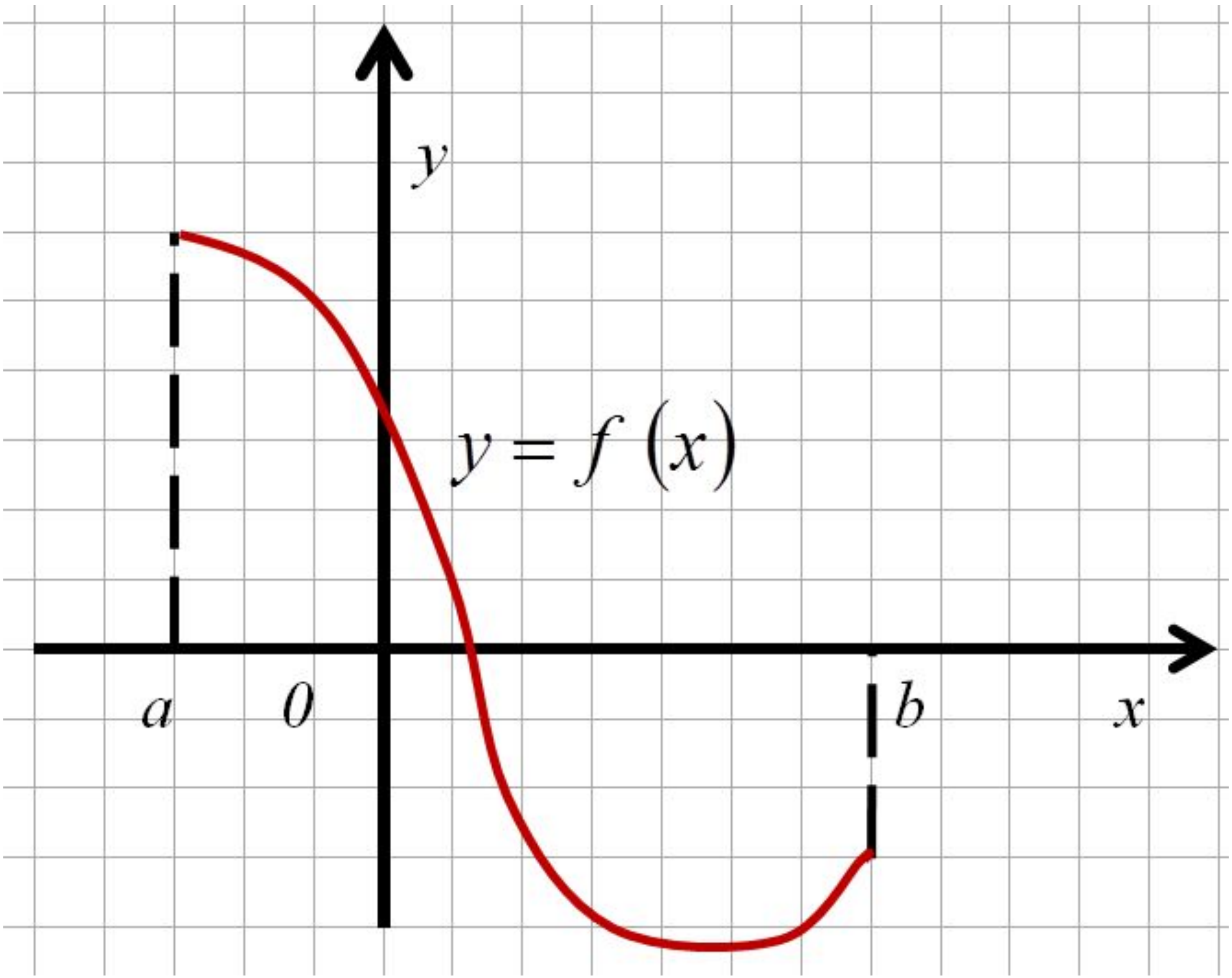
Существование корня на отрезке



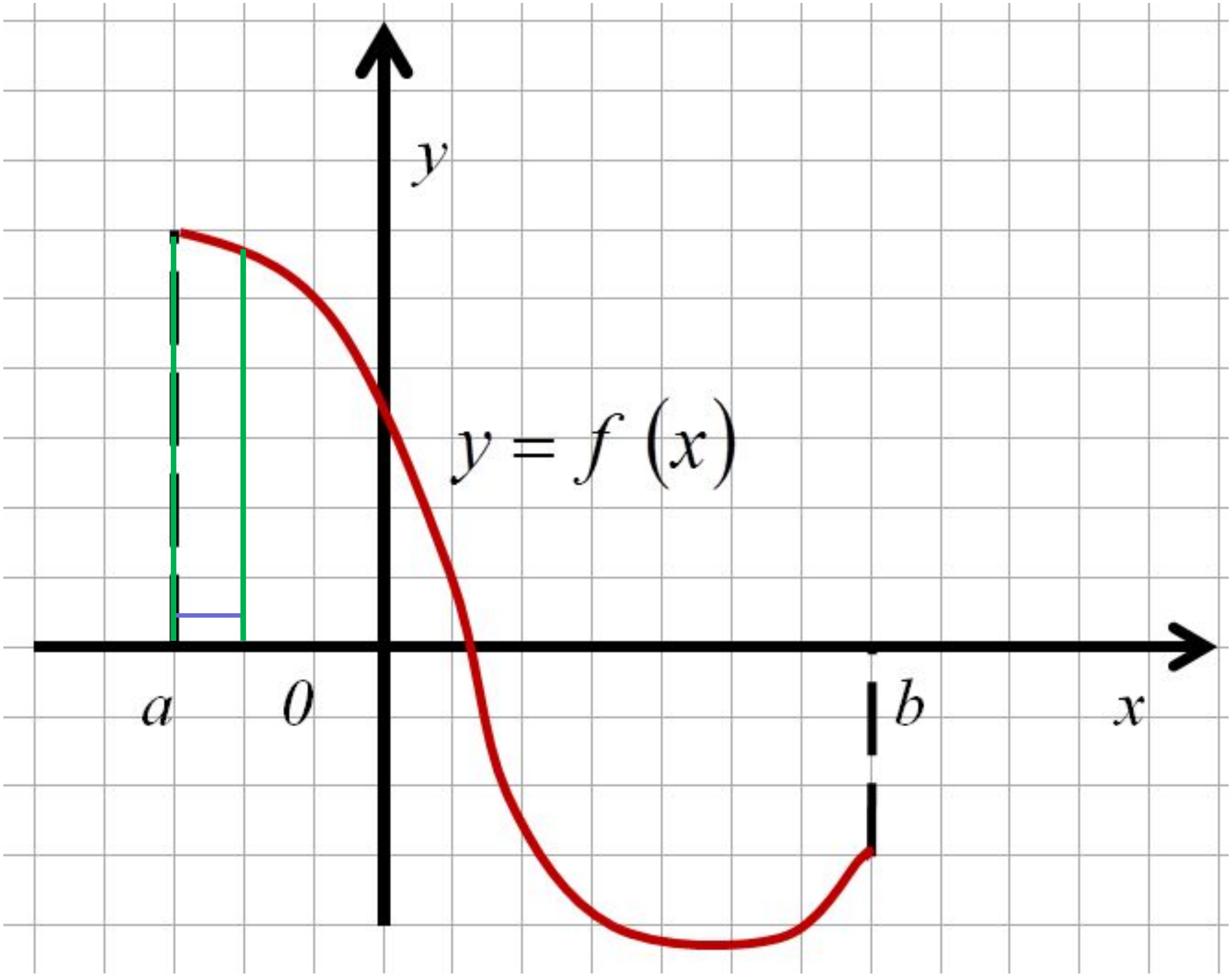
Утверждение.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разного знака, то $\exists c \in [a,b]: f(c)=0$.

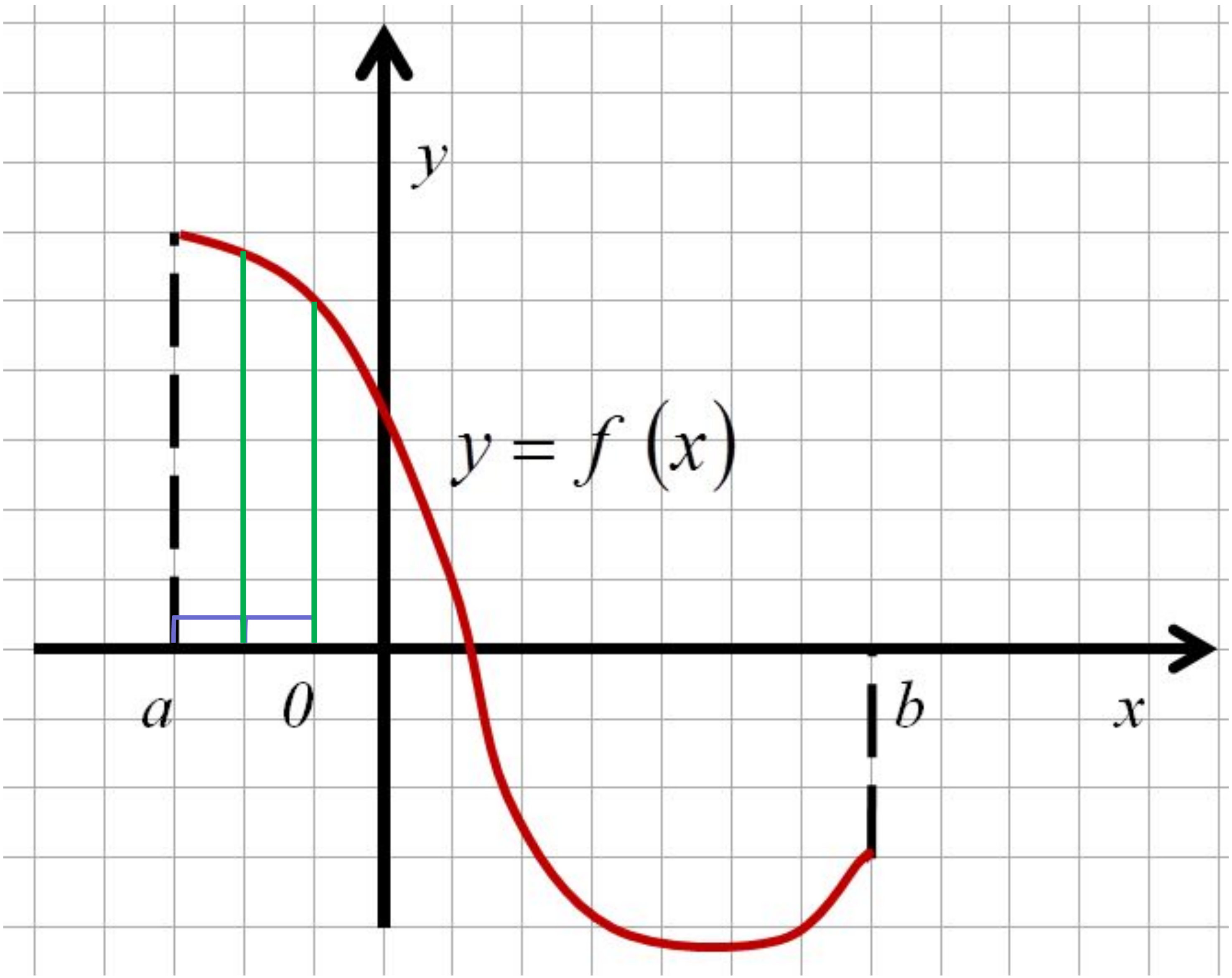
Перебор с заданным шагом



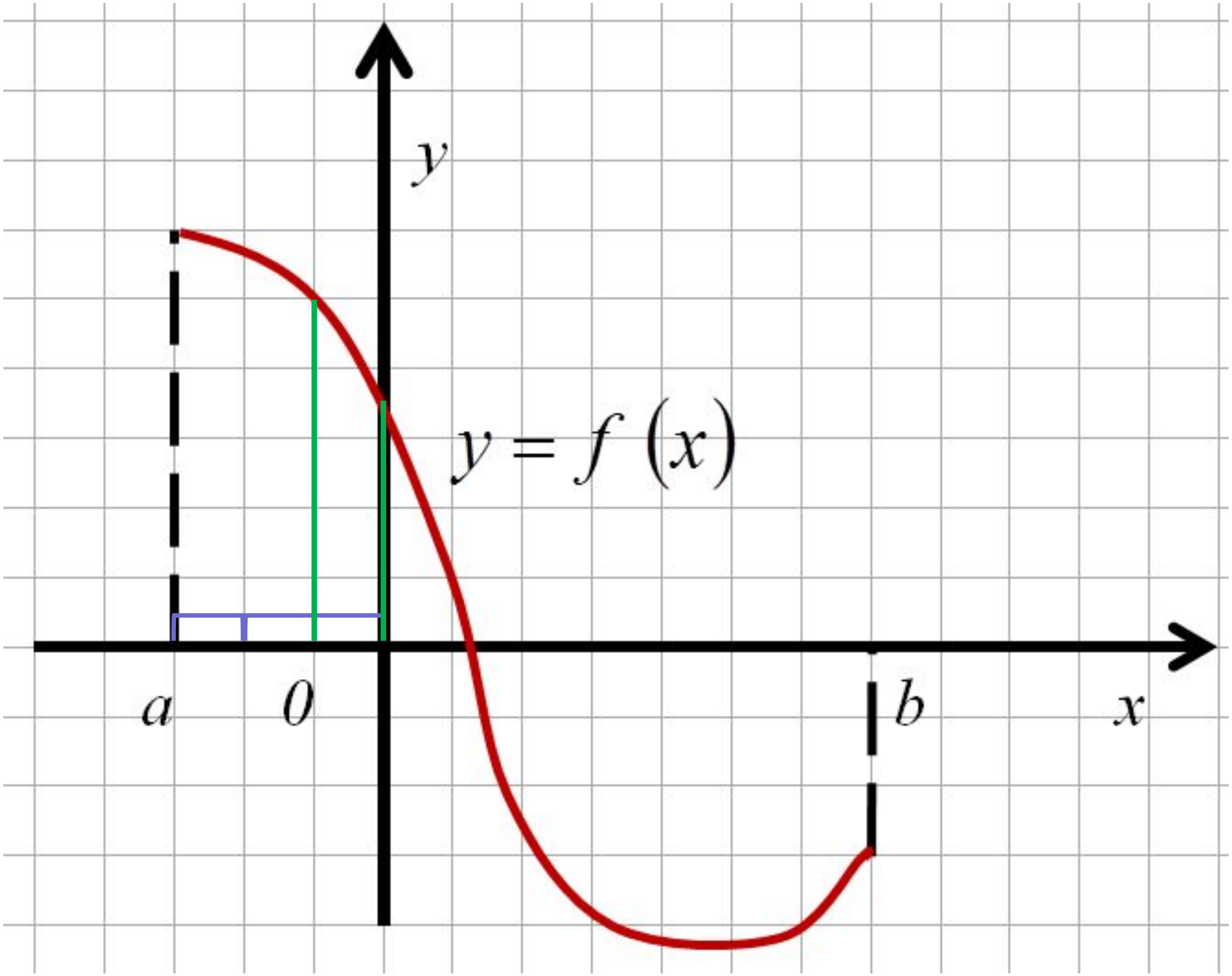
Перебор с заданным шагом



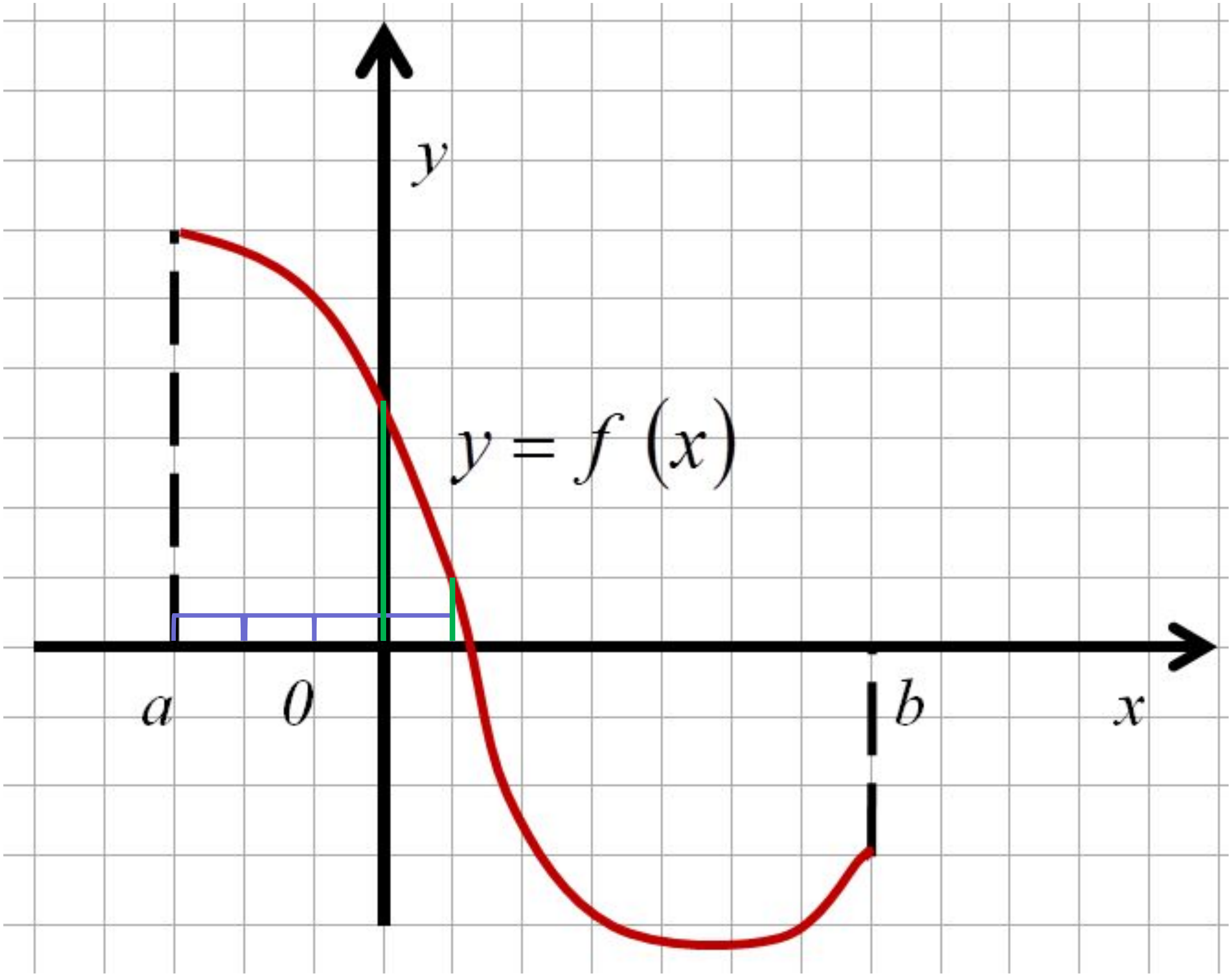
Перебор с заданным шагом



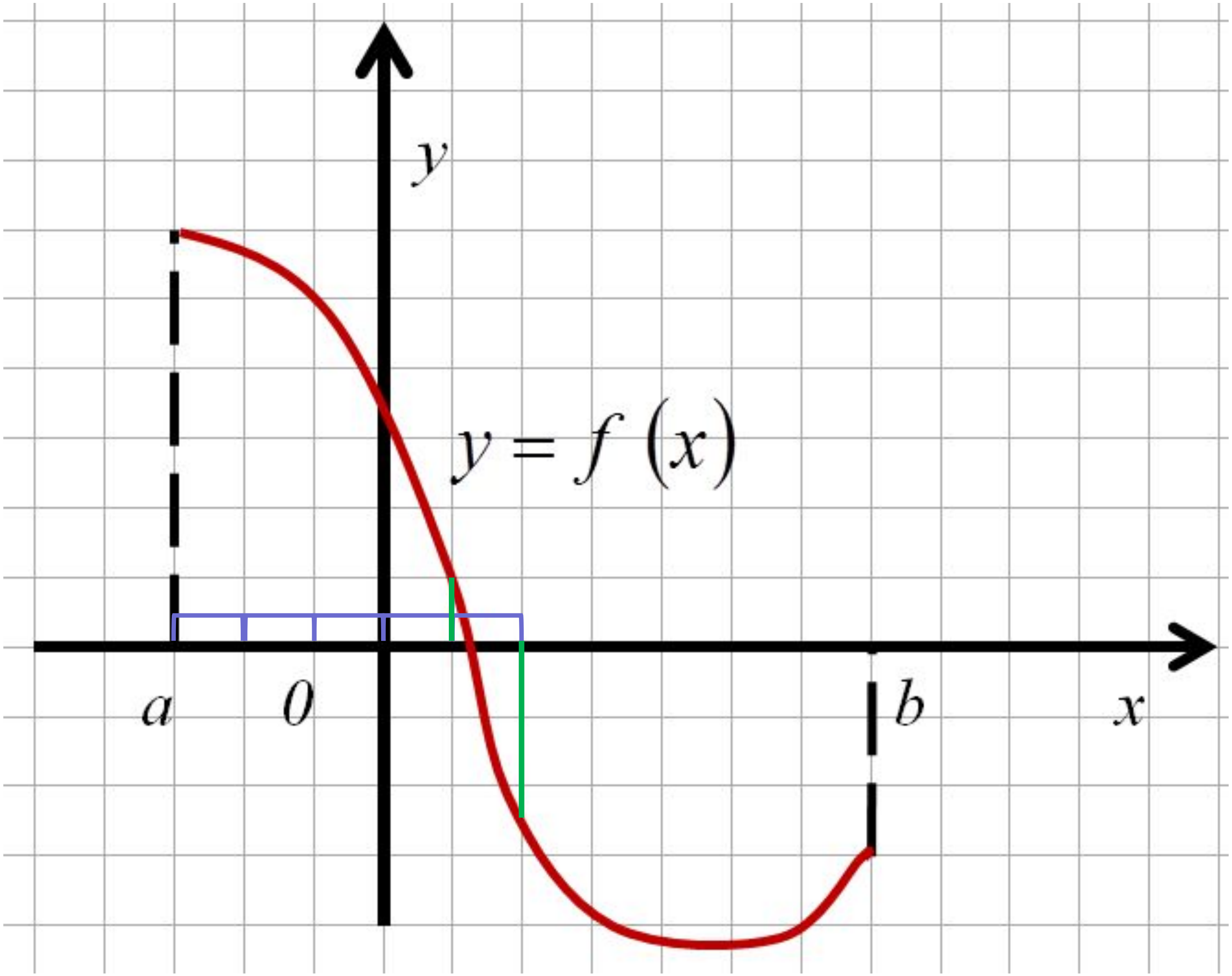
Перебор с заданным шагом



Перебор с заданным шагом



Перебор с заданным шагом

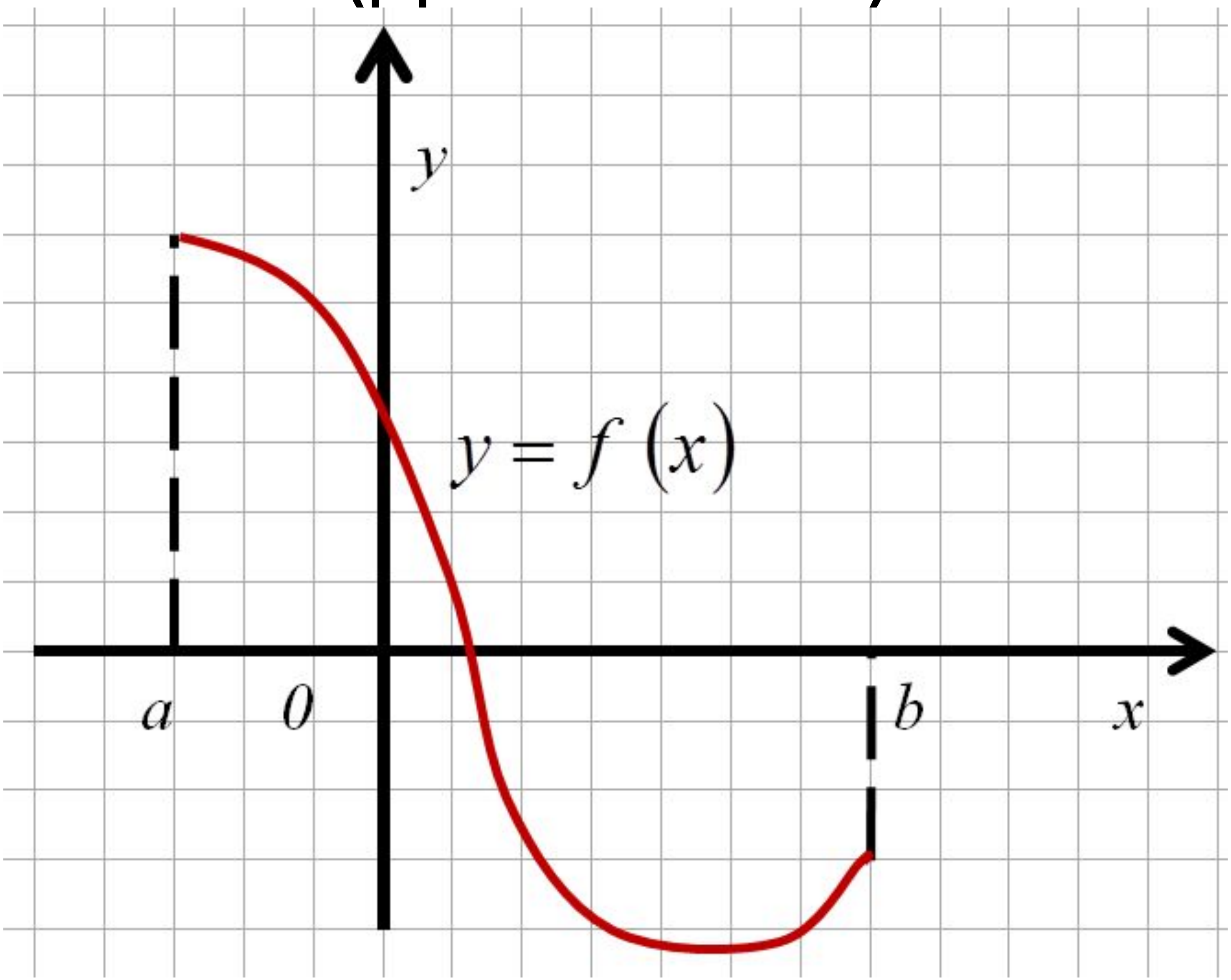


Уточнение корня на отрезке перебором с заданным шагом

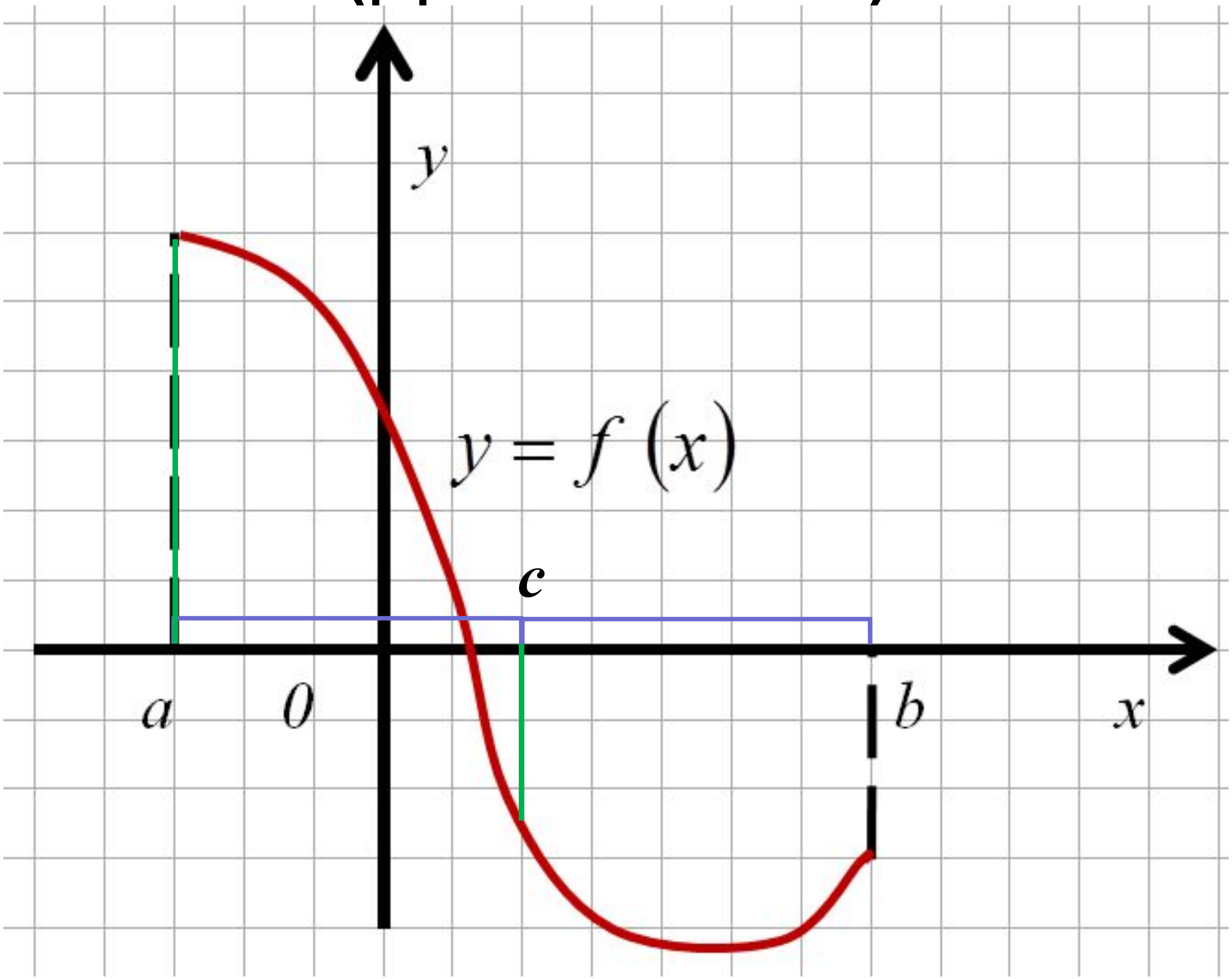
Покрываем отрезок [a, b] отрезками длиной ε ([a, a+ε], [a+ε, a+2ε], [a+2ε, a+3ε], …) пока на концах этих отрезков значения функции одного знака.

Находим отрезок длины ε, на концах которого значения функции разного знака. Любая внутренняя точка этого отрезка отличается от корня уравнения $f(x) = 0$ на число, меньшее ε, и может являться приближенным решением с заданной степенью точности.

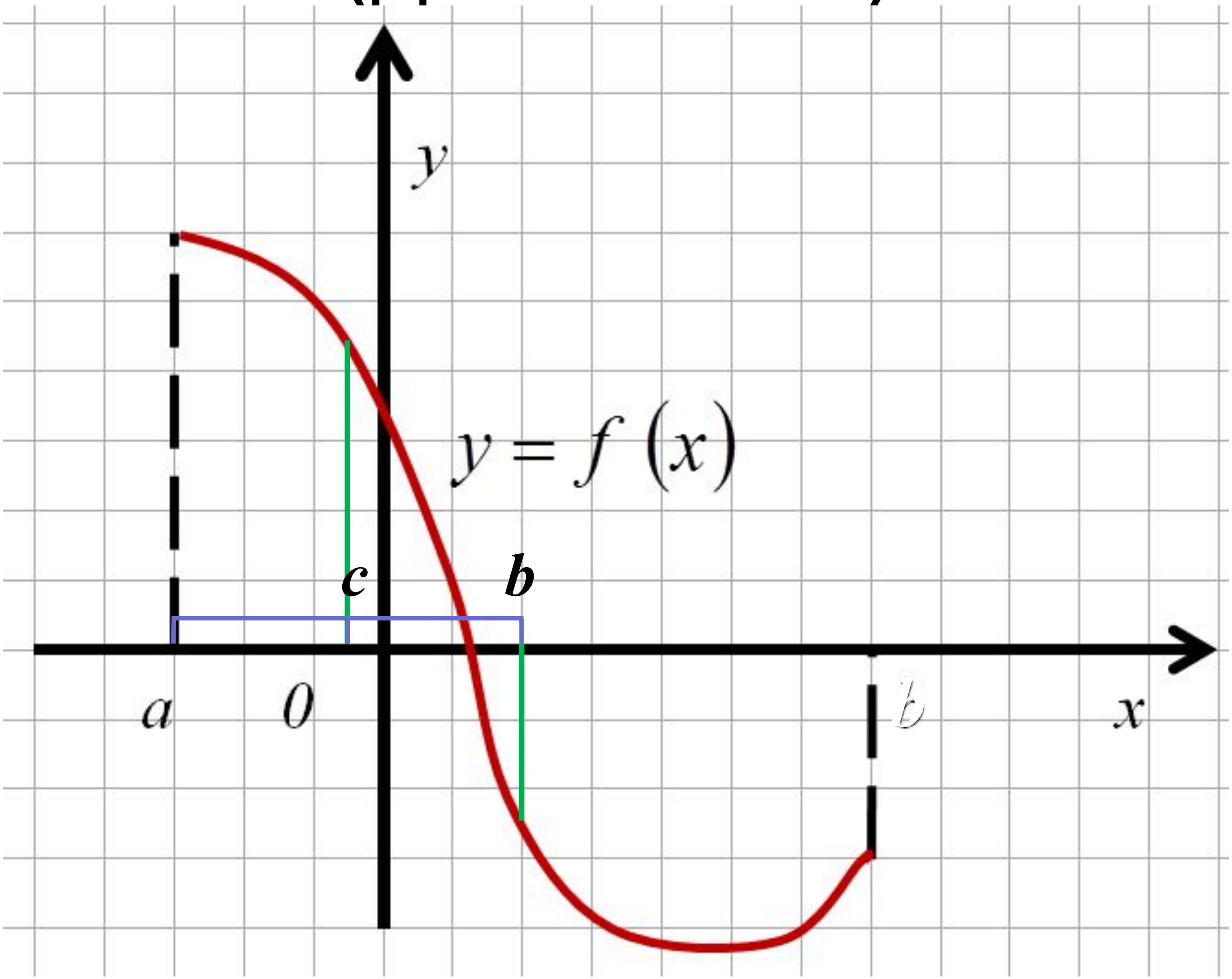
Метод половинного деления (дихотомии)



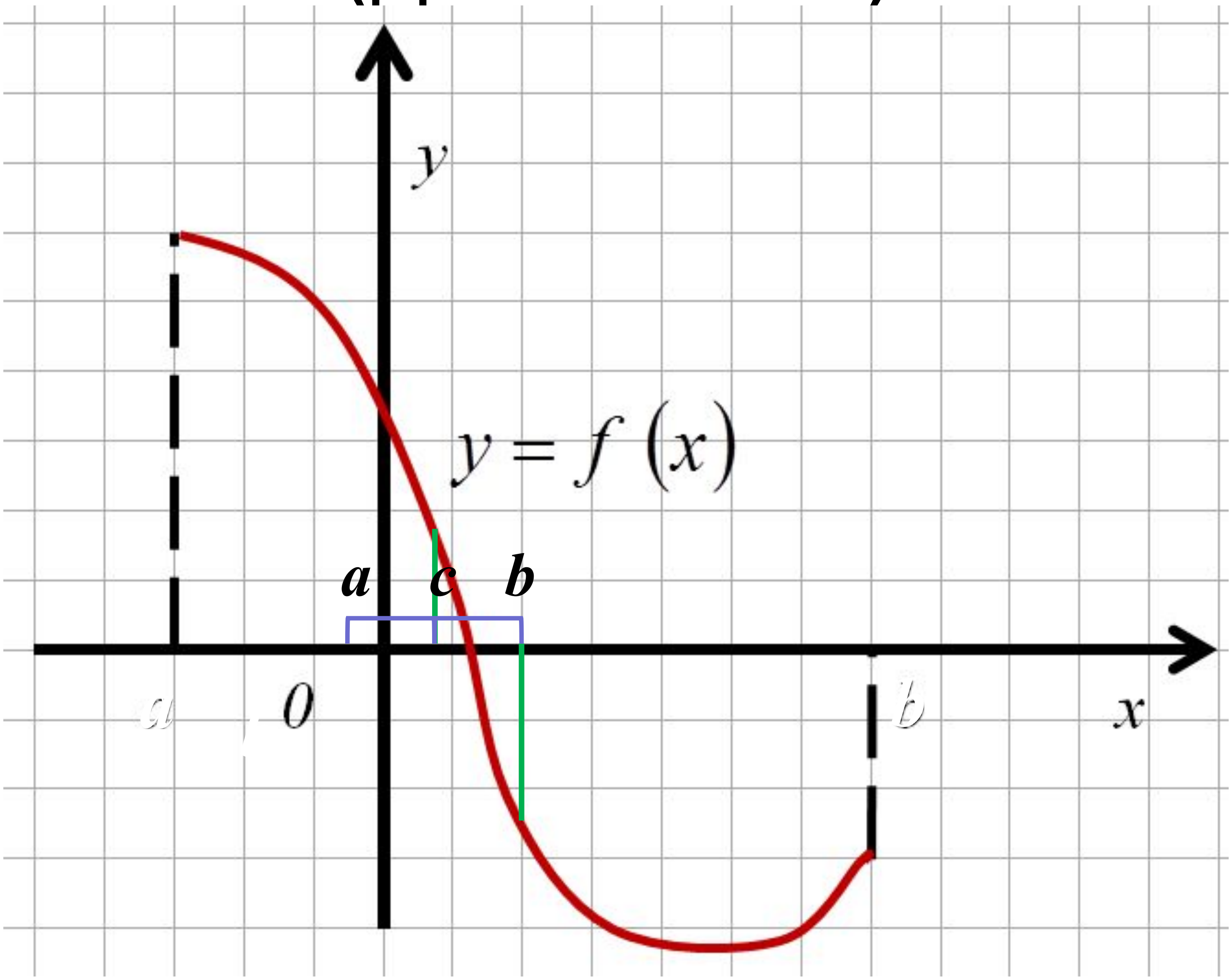
Метод половинного деления (дихотомии)



Метод половинного деления (дихотомии)



Метод половинного деления (дихотомии)



Уточнение корня на отрезке методом дихотомии

Пока длина отрезка [a, b] больше ε, делим отрезок пополам и в качестве нового отрезка выбираем ту половину, на концах которой функция принимает значения разного знака.

Находим отрезок длины не более ε, на концах которого значения функции разного знака. Любая внутренняя точка этого отрезка отличается от корня уравнения $f(x) = 0$ на число, меньшее ε, и может являться приближенным решением с заданной степенью точности.

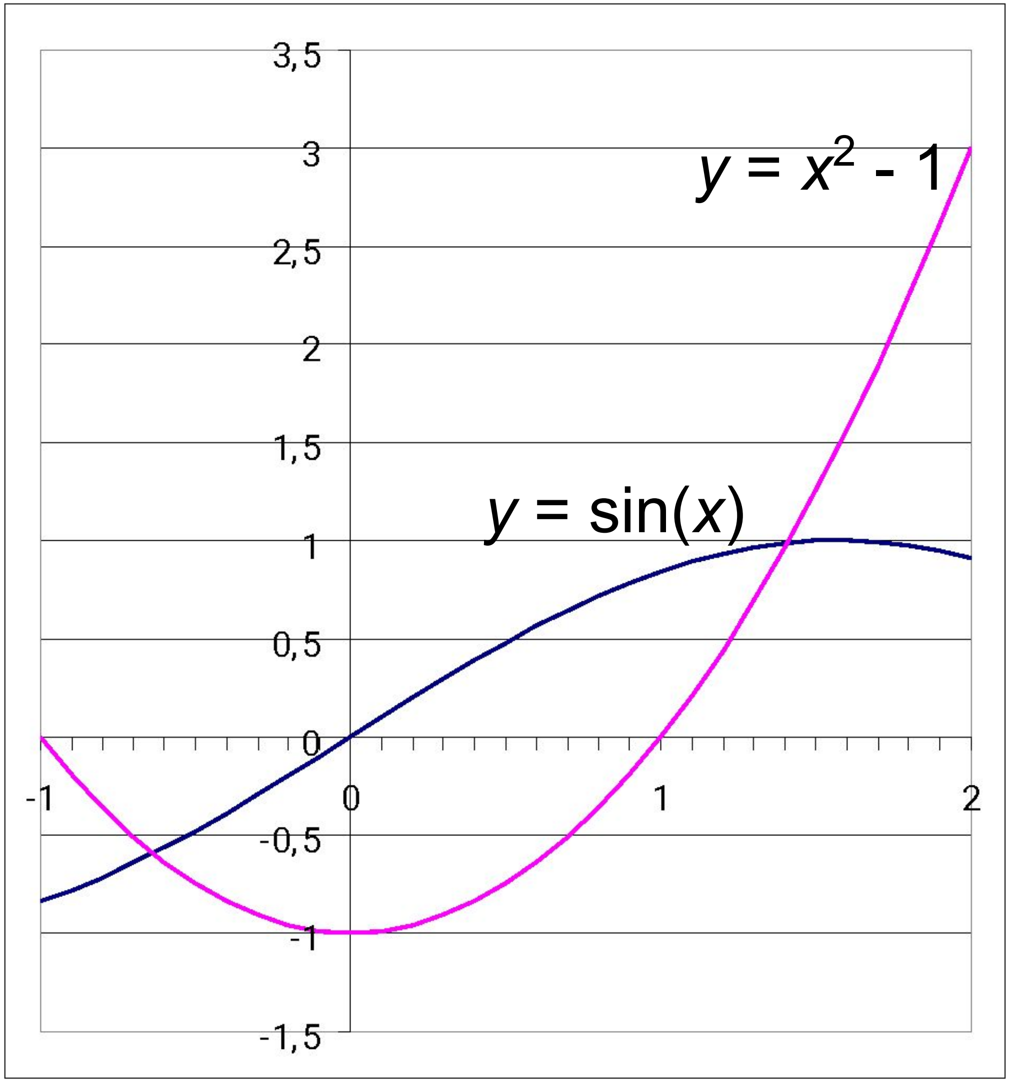
Найдите корни уравнения

$$\sin x = x^2 - 1$$

с заданной степенью точность

$$\varepsilon = 0,001$$

Отделение корней

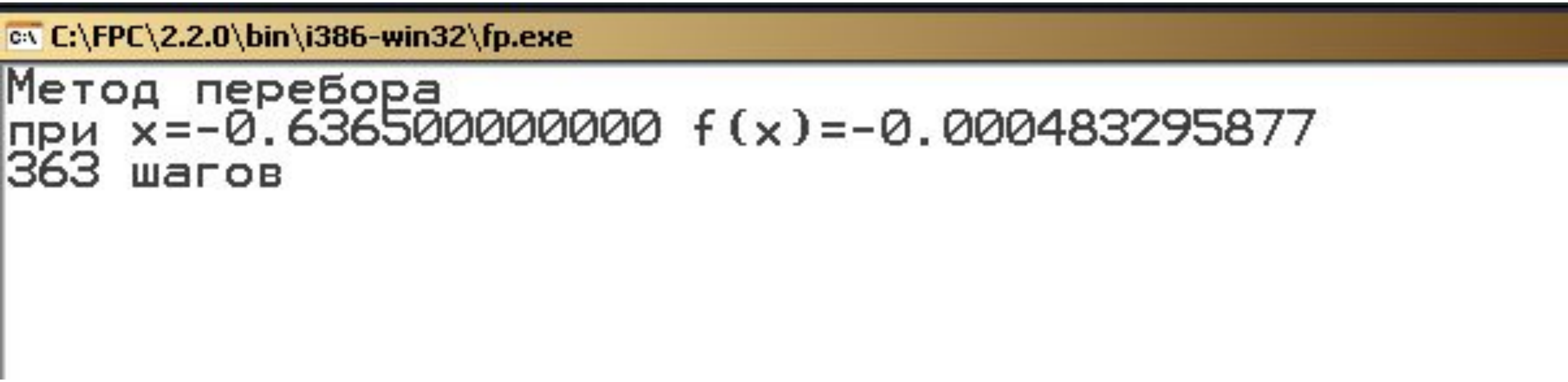


Графически найдем отрезки, внутри каждого из которых содержится ровно один корень.
На отрезке [-1, 0] уточним корень методом перебора.
На отрезке [1, 2] – методом половинного деления.

Метод перебора

```
program ex;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin f:=sqr(x)-1-sin(x)
end;
var y,x,a,b,c,eps,dx:real;  n:integer;
begin
 clrscr; a:= -1;eps:=0.001;n:=0;
 while f(a)*f(a+eps)>0 do
 begin  a:=a+eps; n:=n+1;
 end;
 c:=a+eps/2;
 writeln('Метод перебора');
 writeln('при x=',c:0:12,' f(x)=',f(c):0:12); write(n,' шагов'); readkey;
end.
```

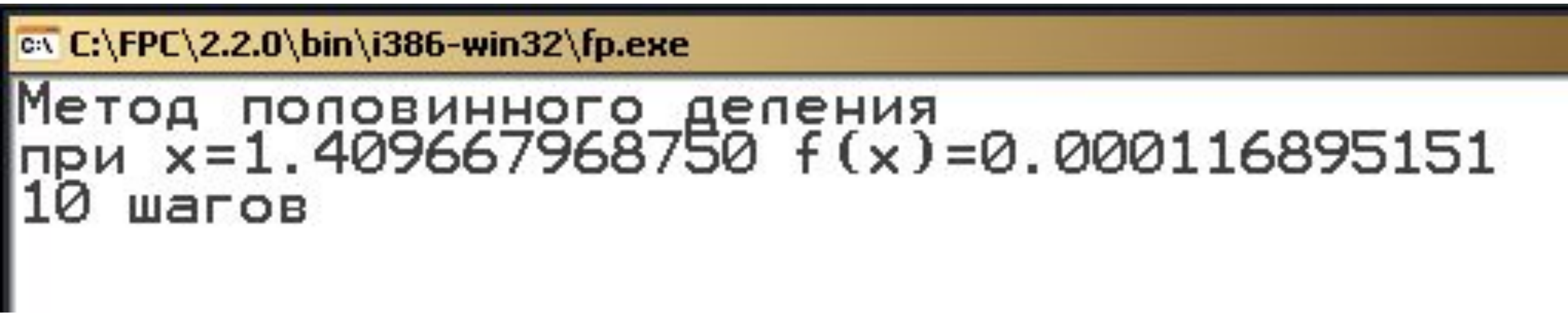
Метод перебора



Метод дихотомии

```
program ex;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin  f:=sqr(x)-1-sin(x)
end;
var y,x,a,b,c,eps,dx:real; n:integer;
begin
    clrscr;
    a:=1;b:=2;eps:=0.001;n:=0;
    while (b-a>=eps) do
    begin
        inc(n); c:=(a+b)/2; if f(a)*f(c)<0 then b:=c else a:=c;
    end;
    c:=(a+b)/2; writeln('Метод половинного деления');
    writeln('при x=',c:0:12,' f(x)=',f(c):0:12);
    write(n,' шагов'); readkey;
end.
```

Метод дихотомии



Способ итерации

Способ итерации

Для применения способа итерации, получившего свое название от латинского слова iteratio – повторение, требуется предварительное преобразование данного уравнения

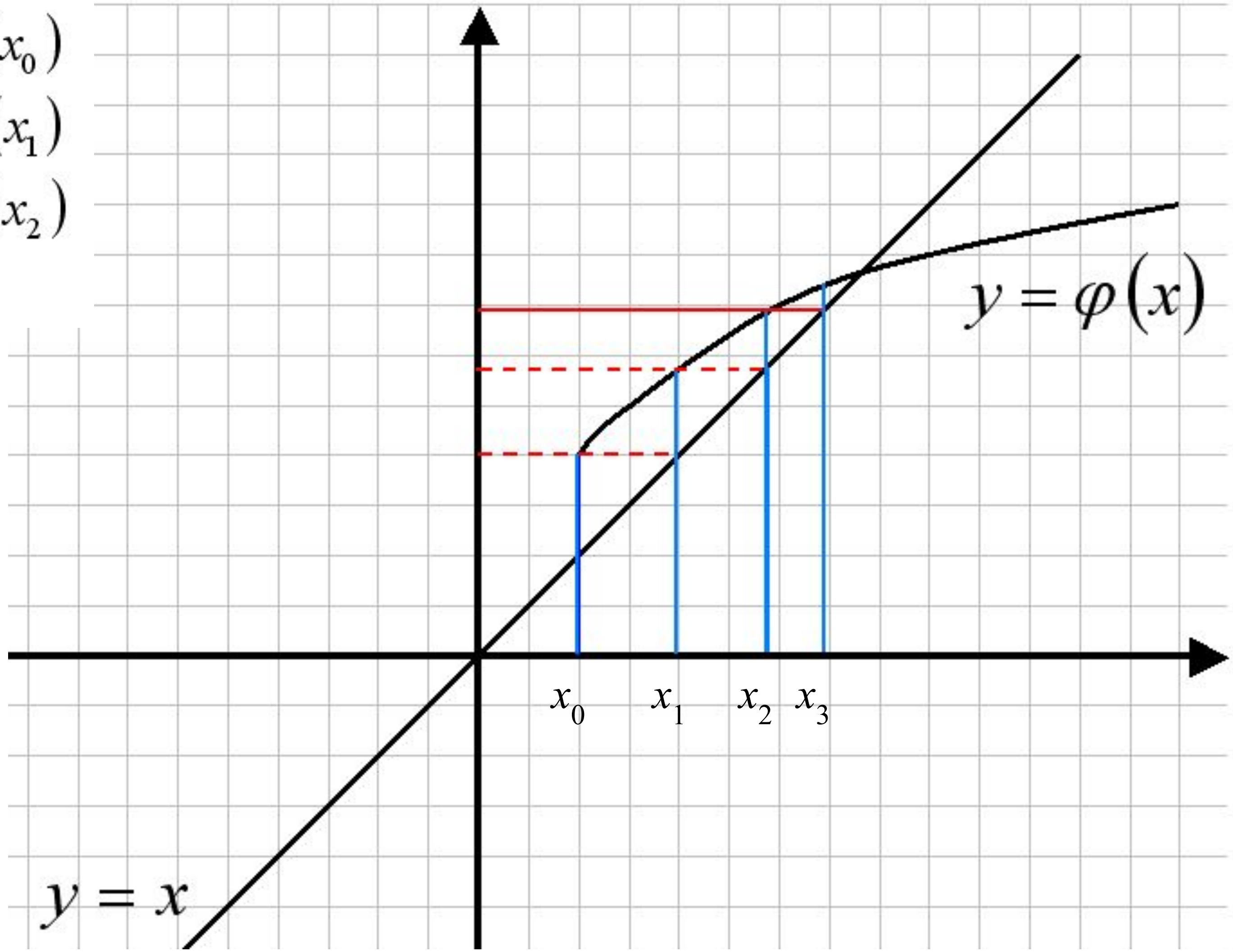
$$(*)\quad f(x) = 0$$

к виду

$$(**)\quad x = \varphi(x)$$

Способ итерации

$$x_1 = \varphi(x_0)$$
$$x_2 = \varphi(x_1)$$
$$x_3 = \varphi(x_2)$$
$$\ldots$$



Условие применимости

Теорема

Если в некотором интервале, содержащем корень уравнения (*), следовательно и уравнения (**), выполняется условие $|\varphi'(x)| < 1$

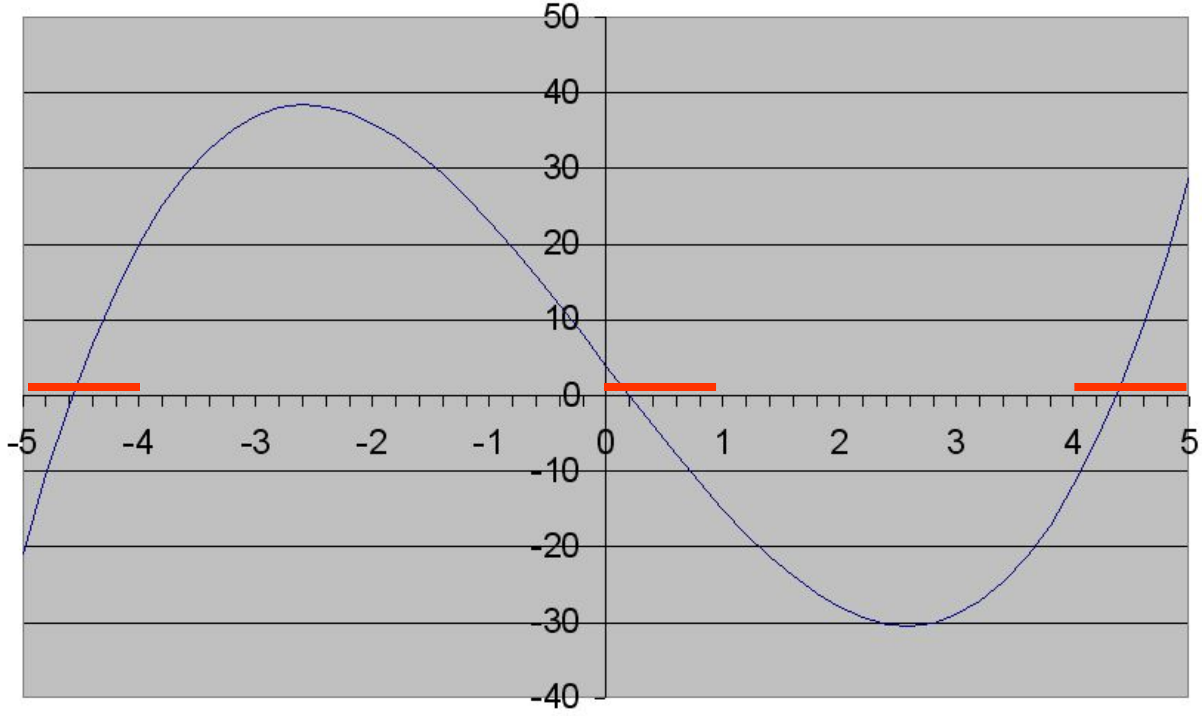
то последовательность $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$

сходится к корню уравнения.

Пример

Решить уравнение $x^3 - 20x + 4 = 0$

Графическим способом отделим корни



Пример

Решить уравнение $x^3 - 20x + 4 = 0$

Преобразовать к виду (**) можно разными способами

$$x = \frac{1}{20}\left(x^3 + 4\right)$$

$$x = x + \left(x^3 - 20x + 4\right)$$

$$x = \sqrt[3]{20x - 4}$$

Пример

Второй способ непригоден ни на одном из интервалов, так как $\left(x+\left(x^3-20x+4\right)\right)' = 3x^2-19$ не удовлетворяет условию теоремы.

Первый способ применим для интервала (0, 1), так как значения

$$\left(\frac{1}{20}\left(x^3+4\right)\right)' = \frac{3x^2}{20}$$

лежат в пределах от 0 до 0,15

Пример

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \varphi(0) = \frac{1}{20}\left(0^3 + 4\right) = 0{,}2$$

$$x_2 = \varphi(0{,}2) = \frac{1}{20}\left(0{,}2^3 + 4\right) = 0{,}2004$$

$$x_3 = \varphi(0{,}2004) = \frac{1}{20}\left(0{,}2004^3 + 4\right) = 0{,}2004024048032 \approx 0{,}2004$$

На интервалах (-5, -4) и (4, 5) первый способ не применим, зато примерим третий!

Пример

Третий способ пригоден на интервалах (-5, -4) и (4, 5), так как

$$\left(\sqrt[3]{20x-4}\right)' = \frac{1}{3}(20x-4)^{-\frac{2}{3}}(20x-4)' = \frac{20}{3\sqrt[3]{(20x-4)^2}}$$

удовлетворяет условию теоремы

Пример

$$x_0 = -5$$

$$x_1 = \varphi(-5) = \sqrt[3]{-104} \approx -4{,}702669375441514979000032679913 8$$

$$x_2 = \varphi(-4{,}7026693754415149790000326799138) =$$

$$= \sqrt[3]{-98{,}05338750883029958000065359827 7} \approx -4{,}6112733499673779077757598210156$$

$$x_3 = \varphi(-4{,}6112733499673779077757598210156) \approx -4{,}5824388242849404722532746218671$$

$$x_4 = \varphi(-4{,}5824388242849404722532746218671) \approx -4{,}5732661109174512972532097096376$$

$$x_5 = \varphi(-4{,}5732661109174512972532097096376) \approx -4{,}5703403995184202394997248934585$$

$$x_6 = \varphi(-4{,}5703403995184202394997248934585) \approx -4{,}5694064317637106181234157543886$$

$$x_7 = \varphi(-4{,}5694064317637106181234157543886) \approx -4{,}5691082030940513443669748572388$$

$$x_8 = \varphi(-4{,}5691082030940513443669748572388) \approx -4{,}5690129664027816707152908025593$$