

МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

□ Теория

□ Задачи

Метод площадей. Теория.

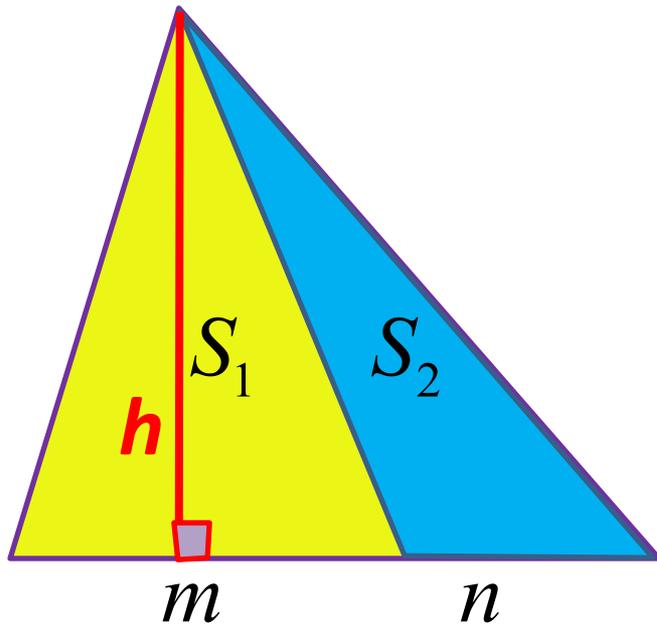
Теорема 1.

Если треугольники имеют общую вершину и их основания лежат на одной прямой, то площади треугольников пропорциональны длинам их оснований:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$

Доказательств

$$\text{во: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{0,5 \cdot m \cdot h}{0,5 \cdot n \cdot h} = \frac{m}{n}$$



Метод площадей. Теория.

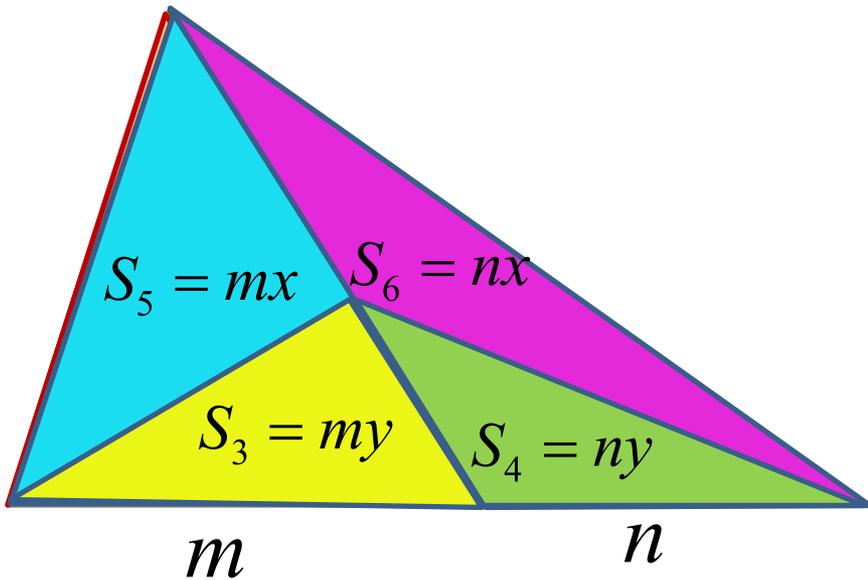
Теорема 2.

Если треугольники имеют общую сторону, то их площади пропорциональны длинам отрезков, высекаемых продолжением их общей стороны на прямой, соединяющей их вершины:

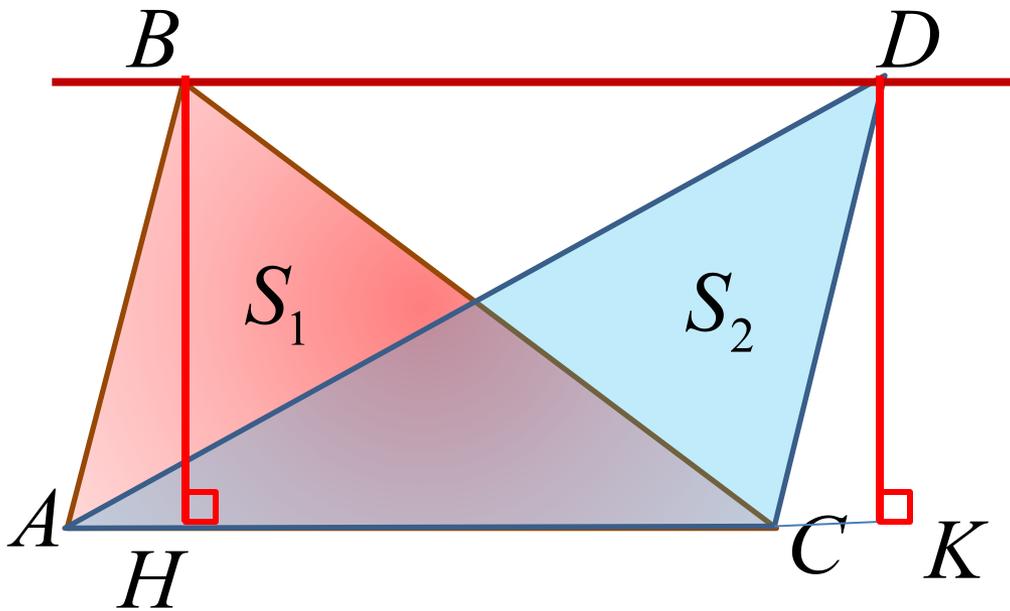
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$

Доказательств

$$\frac{S_1}{S_2} \stackrel{\text{ВО}}{=} \frac{S_5 - S_3}{S_6 - S_4} = \frac{mx - my}{nx - ny} = \frac{m \cdot (x - y)}{n \cdot (x - y)} = \frac{m}{n}$$



Метод площадей. Теория.



Доказательство:

$$S_{ABC} = S_{ADC} \Leftrightarrow BH = DK \Leftrightarrow$$

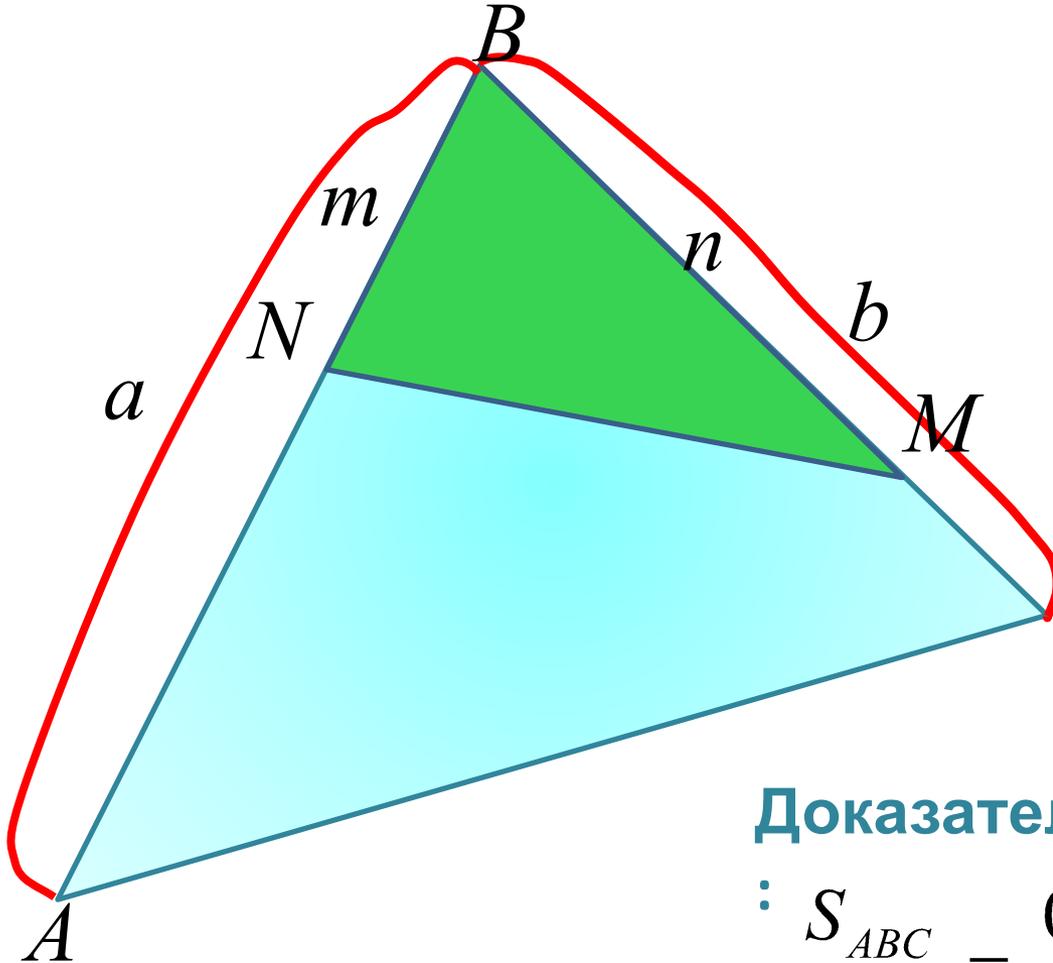
Прямая BD параллельна прямой AC .

Теорема 3.

Если основания треугольников совпадают, а вершины лежат на прямой, параллельной основанию, то площади треугольников – одинаковы.

(Обратная) Если площади треугольников ABC и ABD равны, то прямые AC и BD параллельны.

Метод площадей. Теория.



Теорема 4.

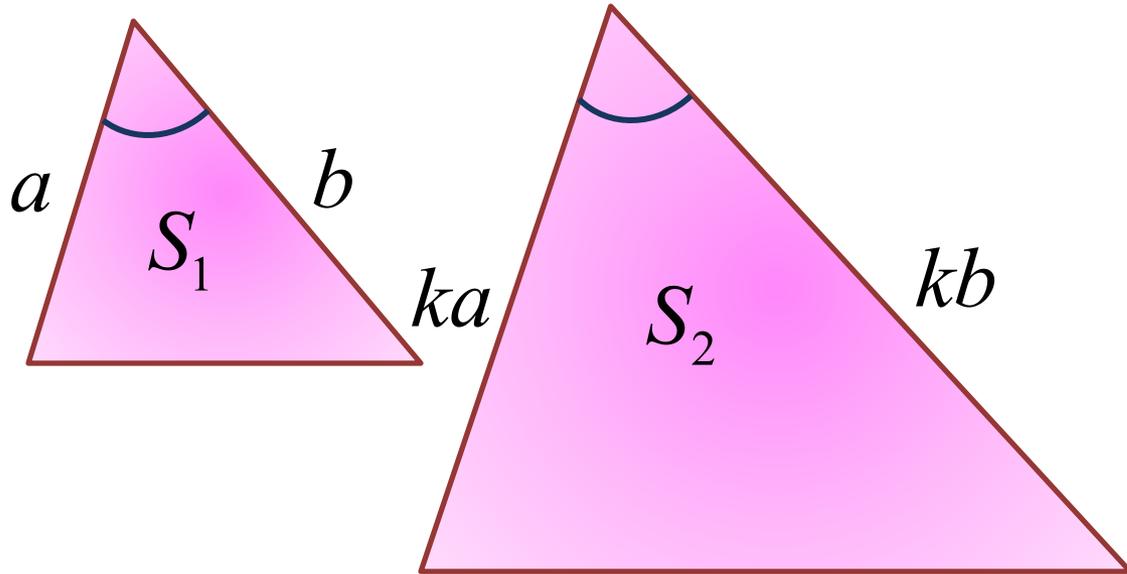
Если два
треугольника имеют
общий угол, то их
площади относятся
как произведения
сторон, содержащих
этот угол.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BMN}} = \frac{AB \cdot BC}{BN \cdot BM}$$

Доказательство

$$\therefore \frac{S_{ABC}}{S_{BMN}} = \frac{0,5ab \sin B}{0,5mn \sin B} = \frac{ab}{mn}$$

Метод площадей. Теория.



Теорема 5.

Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

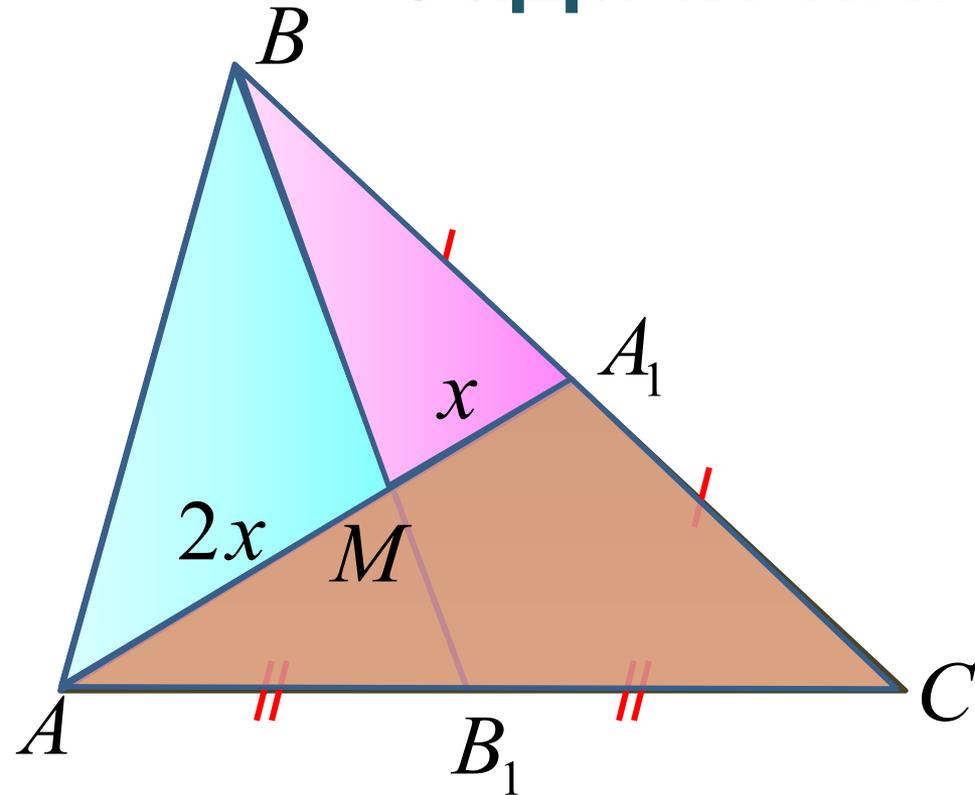
Доказательство:

Углы треугольников равны,
поэтому по предыдущей теореме

получаем
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \cdot b}{ka \cdot kb} = \frac{1}{k^2}$$

Метод площадей.

Задачи-иллюстрации.



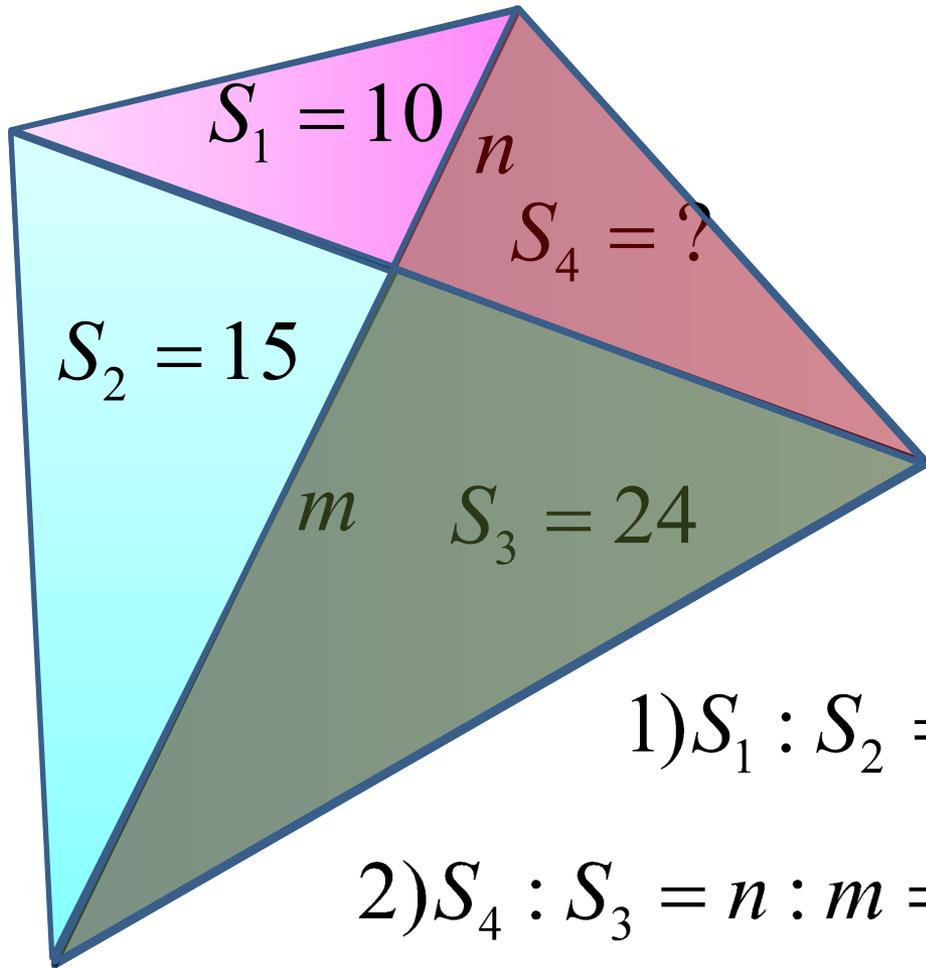
В треугольнике ABC проведены медианы, М – точка их пересечения. Найти площадь треугольника АВМ, если площадь исходного треугольника равна 9.

Решение

$$1) S_{ABA_1} : S_{ACA_1} = 1 : 1 \Rightarrow S_{ABA_1} = 0,5 \cdot 9 = 4,5$$

$$2) S_{ABM} : S_{BMA_1} = 2x : x = 2 : 1 \Rightarrow S_{ABM} = \frac{2}{3} \cdot 4,5 = 3$$

Метод площадей. Задачи-иллюстрации.



Диагонали разделили
четыреугольник на
треугольники, площади
трех из которых равны
10, 15 и 24.

Найти площадь
четвертого
треугольника.

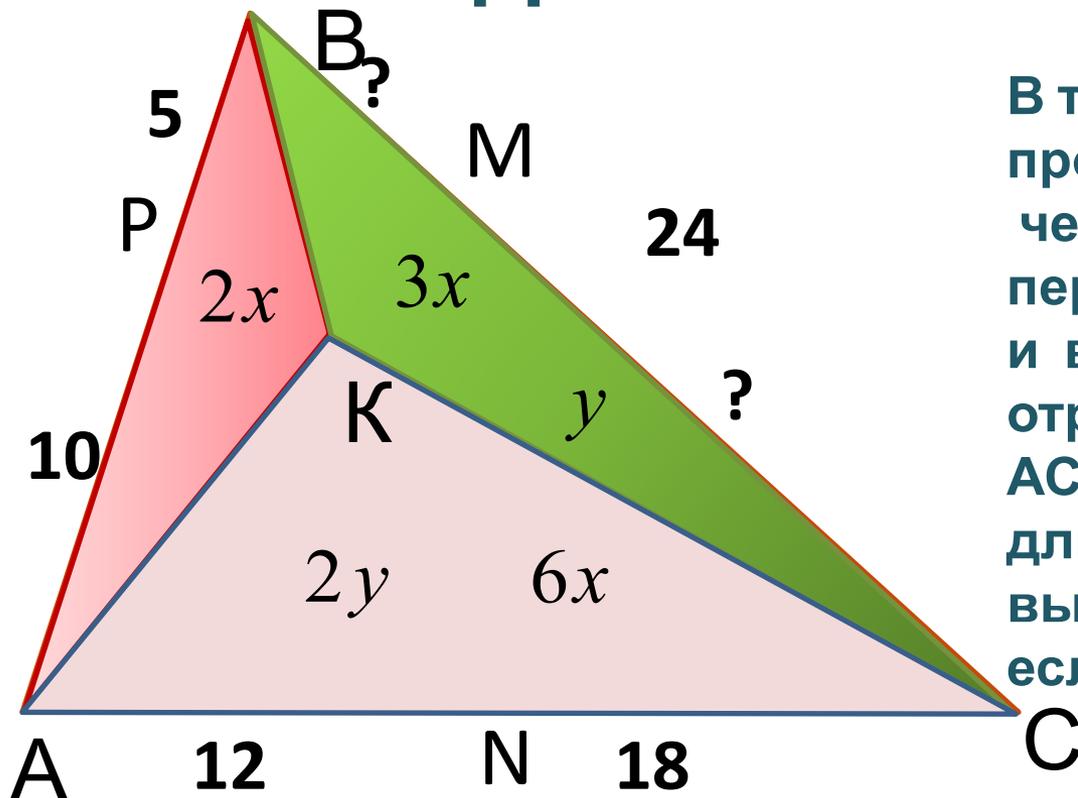
Решение:

$$1) S_1 : S_2 = 10 : 15 = 2 : 3 = n : m$$

$$2) S_4 : S_3 = n : m = 2 : 3 \Rightarrow S_4 = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$$

Метод площадей.

Задачи-иллюстрации.



В треугольнике ABC проведены чевианы, которые пересекаются в одной точке и высекают на стороне AB отрезки 5 и 10, а на стороне AC отрезки 12 и 18. Найти длины отрезков, высекаемых на стороне BC, если ее длина 24.

Решение:

$$1) S_{ABK} : S_{BKC} = AN : NC = 12 : 18 = 2 : 3$$

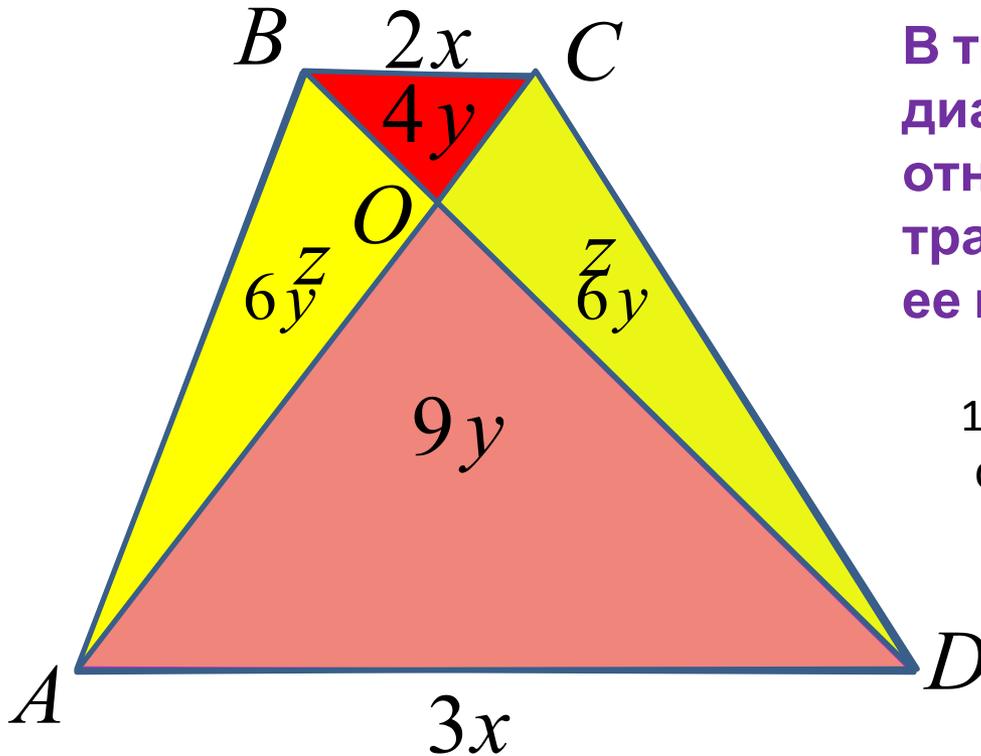
$$2) S_{ACK} : S_{BKC} = AP : PB = 10 : 5 = 2 : 1$$

$$3) y = 3x \Rightarrow 2y = 6x \quad 4) BM : MC = S_{ABK} : S_{ACK} = 2x : 6x = 1 : 3$$

Ответ: BM=6, MC=18.

Метод площадей.

Задачи-иллюстрации.



В трапеции проведены обе диагонали. Ее основания относятся как 2:3. Площадь всей трапеции равна 75. Найти площади ее кусочков.

Решение

- 1) $\triangle AOD$ подобен $\triangle COB$ с коэффициентом 2:3. Следовательно,

$$S_{BOC} : S_{AOD} = 4 : 9$$

- 2) Площади треугольников ABD и ACD одинаковы, треугольник AOD – их общая часть, поэтому площади треугольников AOB и COD равны.

$$\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{S_{AOD}}{S_{DOC}} \Rightarrow \frac{z}{4y} = \frac{9y}{z}$$

$$4y + 6y + 6y + 9y = 25y = 75$$

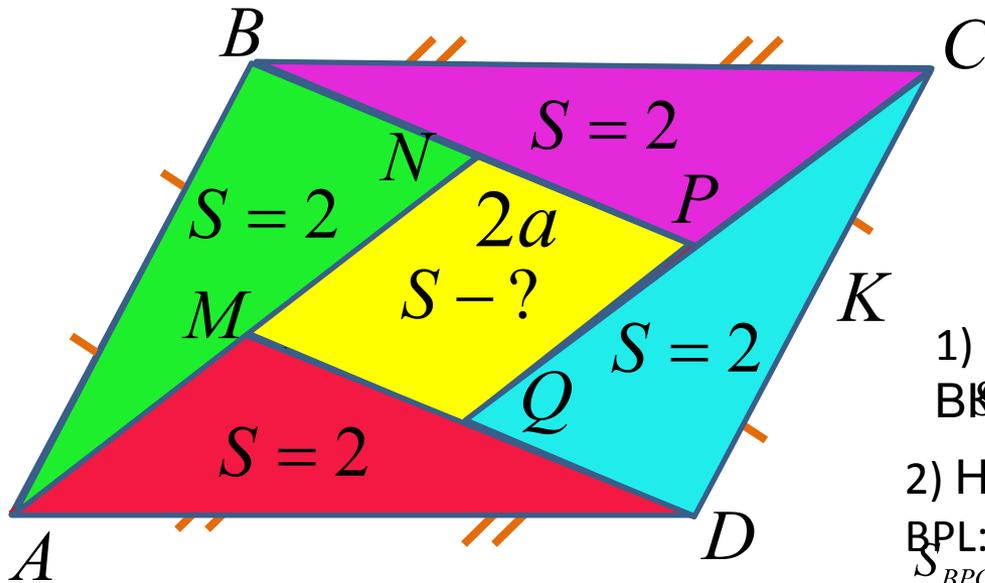
- 3) Используем отношение площадей:

$$\text{Тогда } z = \sqrt{4y \cdot 9y} = 6y. \text{ Таким образом,}$$

$$y = 3 \Rightarrow S_{ABO} = S_{COD} = 6 \cdot 3 = 18, S_{AOD} = 9 \cdot 3 = 27, S_{BOC} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Метод площадей.

Задачи-иллюстрации.



Площадь параллелограмма
ABCD

равна 10. Найти площадь

центрального четырехугольника MNPQ.

Решение:

1) Найдем площадь треугольника
BKC: $S_{BKC} = 0,5 \cdot S_{BDC} = 10 : 4 = 2,5$.

2) Найдем площадь треугольника

$$\frac{S_{BPC}}{S_{BKC}} = \frac{BP}{BK} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{BPC} = 0,8 \cdot 2,5 = 2.$$

3) Аналогично, площади треугольников ABN, ADM и CQD
равны 2.

4) Тогда $S_{MNPQ} = 10 - 4 \cdot 2 = 2$