



Булевы функции и алгебра логики. Двойственность булевых функций

Лекции 4-5

Н.В. Белоус

Факультет компьютерных наук

Кафедра ПО ЭВМ, ХНУРЭ





Тема 1

Булевы функции и алгебра логики



Булевы переменные и функции

Переменные, которые могут принимать значения только из множества $B=\{0,1\}$, называются *логическими* или *булевыми переменными*. Сами значения 0 и 1 булевых переменных называются *булевыми константами*.



Булевы переменные и функции

Функция вида $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументы и значения которой заданы на множестве B , называется ***n-местной булевой функцией***. Такие функции также называют ***логическими*** или ***переключаемыми функциями***.



Основные определения

Кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретных значений булевых переменных называется **двоичным словом** (**n -словом**) или **булевым набором** длины **n** .

Для булевой функции $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретное (индивидуальное) значение булевого набора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется также **интерпретацией** булевой функции **f** .

Множество всех двоичных слов, обозначаемое через **B^n** , образует область определения булевой функций и называется **n -мерным булевым кубом** и содержит **2^n** элементов-слов: **$|B^n|=2^n$** .

Каждому двоичному слову соответствует одно из двух возможных значений (0 или 1), таким образом, область значений представляет собой кортеж длиной **2^n** , состоящий из 1 и 0.



I. Таблицы истинности

Таблицы, в которых каждой интерпретации функции поставлено в соответствие ее значение, называются ***таблицами истинности булевой функции***.

В таблице истинности каждой переменной и значению самой функции соответствует по одному столбцу, а каждой интерпретации — по одной строке. Количество строк в таблице соответствует количеству различных интерпретаций функции.



Булевы функции одной переменной

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1. $\phi_0 \equiv 0$ — функция константа 0,
2. $\phi_1 = \underline{x}$ — функция повторения аргумента,
3. $\phi_2 = \overline{x}$ — функция инверсии или отрицания аргумента,
4. $\phi_3 \equiv 1$ — функция константа 1.



Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1



Булевы функции двух переменных

Функ-ция	Обоз-начение	Название	Другие обоз-я	Прочтение
$f_0(x,y)$	0	константа 0		константа 0
$f_1(x,y)$	$x \wedge y$	конъюнкция (логическое «и»)	$;$, $\&$, $\&\&$, $*$, <i>И</i> , $\times$, <i>AND</i> , <i>min</i>	x и y
$f_2(x,y)$	$\overline{x \rightarrow y}$	отрицание импликации	$>$	x и не y
$f_3(x,y)$	x	повторение первого аргумента		как x
$f_4(x,y)$	$\overline{x \leftarrow y}$	отрицание обратной импликации	$<$	не x и y
$f_5(x,y)$	y	повторение второго аргумента		как y
$f_6(x,y)$	$x \oplus y$	исключающее «или» (сумма по модулю 2)	$\neq$, $<>$, $><$, $\neq$, <i>XOR</i>	x не как y
$f_7(x,y)$	$x \vee y$	дизъюнкция (логическое «или»)	<i>OR</i> , <i>ИЛИ</i> , $+$, <i>max</i>	x или y



Булевы функции двух переменных

Функ-ция	Обоз-начение	Название	Другие обоз-я	Прочтение
$f_8(x,y)$	$x \downarrow y$	отрицание дизъюнкции (стрелка Пирса)	$\overline{x \vee y}$	не x и не y
$f_9(x,y)$	$x \sim y$	эквивалентность	$\Leftrightarrow, \equiv, Eqv, =$	x как y
$f_{10}(x,y)$	$\overline{y}$	отрицание второго аргумента	$\neg y$	не y
$f_{11}(x,y)$	$x \leftarrow y$	обратная импликация	$\supset$	x , если y (x или не y)
$f_{12}(x,y)$	$\overline{x}$	отрицание первого аргумента	$\neg x$	не x
$f_{13}(x,y)$	$x \rightarrow y$	импликация	$\supset, \Rightarrow, Imp$	если x , то y (не x или y)
$f_{14}(x,y)$	$x y$	отрицание конъюнкции (штрих Шеффера)	$\overline{x \wedge y}$	не x или не y
$f_{15}(x,y)$	1	константа 1		константа 1



II. Номера булевых функций и интерпретаций

Каждой функции присваивается порядковый номер в виде натурального числа, двоичный код которого представляет собой столбец значений функции в таблице истинности.

Младшим разрядом считается самая нижняя строка (значение функции на интерпретации $(1, 1, \dots, 1)$), а старшим — самая верхняя (значение функции на интерпретации $(0, 0, \dots, 0)$).



Каждой интерпретации булевой функции присваивается свой номер – значение двоичного кода, который представляет собой интерпретация.

Интерпретации, записанной в верхней строке таблицы истинности, присваивается номер 0, затем следует интерпретация номер 1 и т.д.

В самой нижней строке расположена интерпретация с номером $2^n - 1$, где n — количество переменных, от которых зависит булева функция.



Пример

Найти порядковый номер функции $f(x,y)$, принимающей следующие значения: $f(0,0)=1$, $f(0,1)=1$, $f(1,0)=0$, $f(1,1)=1$.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Двоичный код, соответствующий значению этой функции – 1101.

$$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13^{10}$$

Таким образом

$$f_{13}(x,y) = (1101)_2$$



Пример

Построить таблицу истинности для функции f_{198}

$$\frac{198}{0} \Big| \frac{2}{99} \Big| \frac{2}{1} \Big| \frac{2}{49} \Big| \frac{2}{1} \Big| \frac{2}{24} \Big| \frac{2}{0} \Big| \frac{2}{12} \Big| \frac{2}{0} \Big| \frac{2}{6} \Big| \frac{2}{0} \Big| \frac{2}{3} \Big| \frac{2}{1} \Big| \frac{2}{1}$$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Пример заполнения таблицы истинности



III. Задание булевых функций с помощью формул

Формула — это выражение, задающее некоторую функцию в виде суперпозиции других функций.

Суперпозицией называется прием получения новых функций путем подстановки значений одних функций вместо значений аргументов других функций.



Пример

Рассмотрим формулу булевой алгебры, задающую некоторую функцию $f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = (x \wedge \bar{y}) \vee z$$

Эта формула содержит функции:

$g(x_1)$ – отрицание,

$s(x_1, x_2)$ – конъюнкция,

$l(x_1, x_2)$ – дизъюнкция.

Представим данную формулу в виде суперпозиции указанных функций следующим образом:

$$f(x,y,z) = l(s(x, g(y)), z)$$



Приоритет выполнения операций

Если в формуле отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующей последовательности:

1. Отрицание.
2. Конъюнкция.
3. Дизъюнкция.
4. Импликация.
5. Эквивалентность

—
$\wedge$
$\vee$
$\rightarrow$
$\sim$

Пример

Убрать все возможные скобки

$$((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \vee y) = x \wedge y \wedge z \vee x \vee y$$

Расставить скобки с учетом приоритета операций

$$((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \vee y) \rightarrow x \wedge y \rightarrow z \rightarrow x \vee y$$



Эквивалентные формулы

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются **эквивалентными** или **равносильными**.



1) Коммутативность конъюнкции и дизъюнкции

$$x \wedge y = y \wedge x$$

Доказательство

$$x \vee y = y \vee x$$

Доказательство

2) Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

Доказательство

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

Доказательство

3) Дистрибутивность конъюнкции и дизъюнкции относительно друг друга

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Доказательство

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Доказательство



4) Идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

5) Закон исключенного третьего

$$x \vee \bar{x} = 1 \quad \underline{\text{Доказательство}}$$

6) Закон противоречия

$$x \wedge \bar{x} = 0 \quad \underline{\text{Доказательство}}$$

8) Закон элиминации

$$x \wedge (x \vee y) = x \quad \underline{\text{Доказательство}}$$

$$x \vee (x \wedge y) = x \quad \underline{\text{Доказательство}}$$



7) *Тождества с константами.*

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge 0 = 0$$

9) *Закон двойного отрицания.*

=

$$x = x$$

10) *Законы де Моргана.*

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Доказательство

Доказательство



Тема 2

Двойственность булевых функций



Двойственные булевы функции

Функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$$

Пример

Найти двойственные функции

$$(x \wedge y)^* = \overline{\overline{x \wedge y}} = x \vee y$$

$$(x \vee y)^* = \overline{\overline{x \vee y}} = x \wedge y$$

$$(\overline{x})^* = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$$

$$(0)^* = \overline{0} = 1$$

Пример построения двойственной функции
 $(1)^* = \overline{1} = 0$



Самодвойственные булевы функции

Функция, равная своей двойственной, называется *самодвойственной*.

$$f = f^*$$

x	y	$f(x,y)$	$f^*(x,y)$
0	0	$f(0,0)$	$\bar{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1)$	$\bar{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0)$	$\bar{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1)$	$\bar{f}(0,0)$

x	y	$f(x,y)=f^*(x,y)$
0	0	$f(0,0)=\bar{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1)=\bar{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0)=\bar{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1)=\bar{f}(0,0)$



Пример

Является ли функция $f(x,y,z)$ самодвойственной?

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



$f(x,y,z)$ — несамодвойственная



Принцип двойственности

Пусть функция F заданна суперпозицией функций $f_0, \dots, f_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Функцию F^* , двойственную F , можно получить, заменив в формуле F функции $f_0, \dots, f_n$ на двойственные им $f_0^*, \dots, f_n^*$.



Правило получения двойственных формул

Для того чтобы получить двойственную формулу булевой алгебры необходимо заменить в ней все конъюнкции на дизъюнкции, дизъюнкции на конъюнкции, 0 на 1, 1 на 0, и использовать скобки, где необходимо, чтобы порядок выполнения операций остался прежним.



Пример

Найти функцию, двойственную функции

$$f(x, y, z) = x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge z$$

Решение

$$\begin{aligned} f^*(x, y, z) &= (x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge z)^* = \\ &= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) = (y \vee x \wedge z) \wedge (x \vee z) = \\ &= y \wedge x \vee y \wedge z \vee x \wedge z \wedge x \vee x \wedge z \wedge z = \\ &= x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge z \vee x \wedge z = \\ &= x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge z = f(x, y, z) \end{aligned}$$



Правило получения двойственных формул

Если функции равны, то и двойственные им функции также равны.

Пусть f_1 и f_2 – некоторые функции, заданные формулами. Тогда если

$$f_1 = f_2,$$

то

$$f_1^* = f_2^*$$