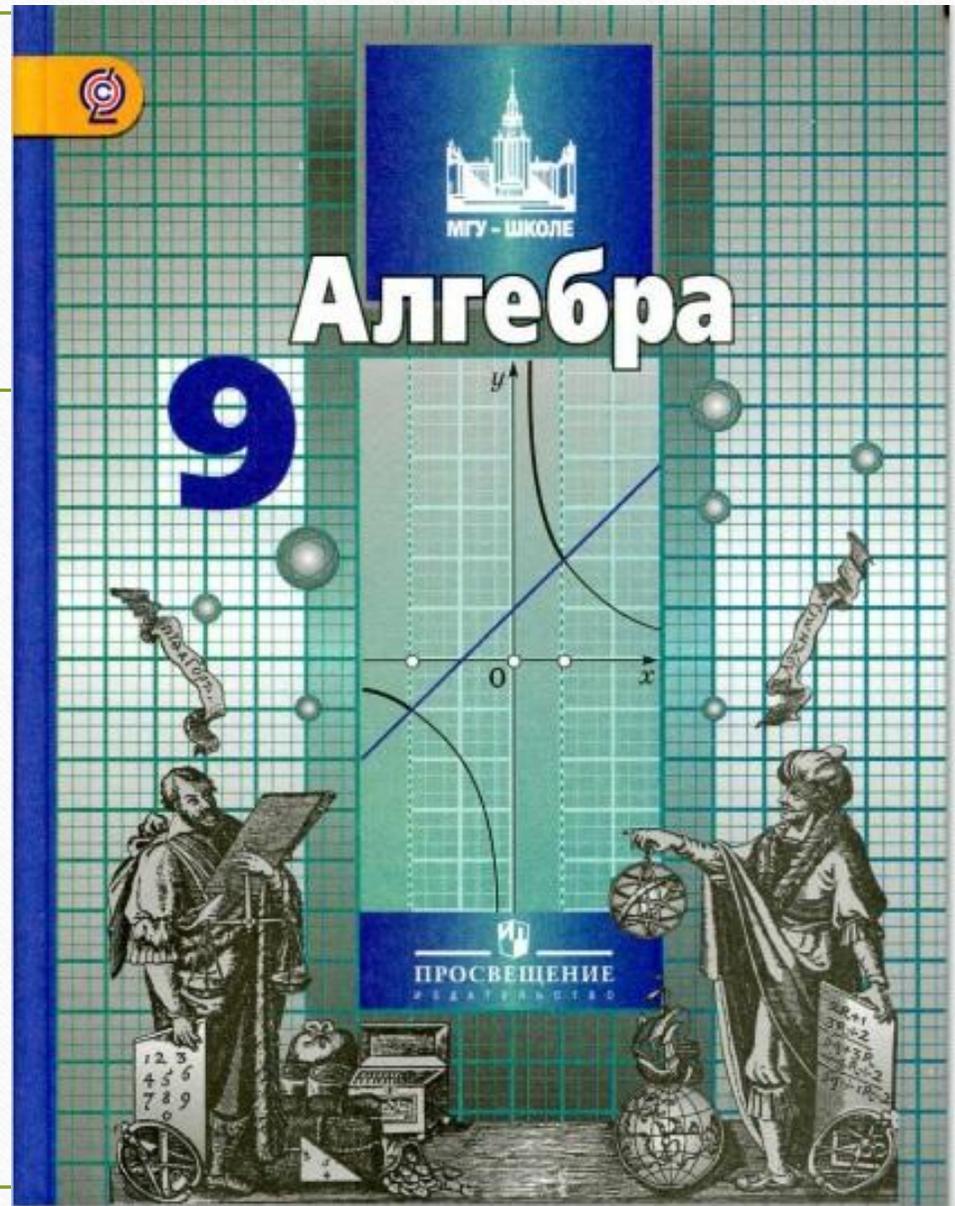


Отражение исторического
развития алгебры в
современных учебниках

С.М.Никольский
«Алгебра» 9 класс



Оглавление

ГЛАВА 1. Неравенства	
§ 1. Линейные неравенства с одним неизвестным	5
1.1. Неравенства первой степени с одним неизвестным	—
1.2. Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным	9
1.3. Линейные неравенства с одним неизвестным	12
1.4. Системы линейных неравенств с одним неизвестным	16
1.5*. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля	21
§ 2. Неравенства второй степени с одним неизвестным	26
2.1. Понятие неравенства второй степени с одним неизвестным	—
2.2. Неравенства второй степени с положительным дискриминантом	28
2.3. Неравенства второй степени с дискриминантом, равным нулю	32
2.4. Неравенства второй степени с отрицательным дискриминантом	35
2.5. Неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени	37
§ 3. Рациональные неравенства	40
3.1. Метод интервалов	—
3.2. Решение рациональных неравенств	45
3.3. Системы рациональных неравенств	50
3.4. Нестрогие неравенства	53
3.5*. Замена неизвестного при решении неравенств	58
Дополнения к главе 1	61
1. Доказательство числовых неравенств	—
2. Производные линейной и квадратичной функций	66
3. Исторические сведения	74
ГЛАВА 2. Степень числа	
§ 4. Функция $y = x^n$	75
4.1. Свойства и график функции $y = x^n, x \geq 0$	—
4.2. Свойства и график функций $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$	77
§ 5. Корень степени n	81
5.1. Понятие корня степени n	—
5.2. Корни чётной и нечётной степеней	82
5.3. Арифметический корень степени n	87
5.4. Свойства корней степени n	93
5.5. Функция $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$	97
5.6*. Корень степени n из натурального числа	101
5.7*. Иррациональные уравнения	104

Дополнения к главе 2	109
1. Понятие степени с рациональным показателем	—
2. Свойства степени с рациональным показателем	112
3. Исторические сведения	117
ГЛАВА 3. Последовательности	
§ 6. Числовые последовательности и их свойства	119
6.1. Понятие числовой последовательности	—
6.2. Свойства числовых последовательностей	123
§ 7. Арифметическая прогрессия	126
7.1. Понятие арифметической прогрессии	—
7.2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии	130
§ 8. Геометрическая прогрессия	133
8.1. Понятие геометрической прогрессии	—
8.2. Сумма первых n членов геометрической прогрессии	136
8.3*. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	138
Дополнения к главе 3	142
1. Метод математической индукции	—
2. Исторические сведения	147
ГЛАВА 4. Тригонометрические формулы	
§ 9*. Угол и его мера	149
9.1*. Понятие угла	—
9.2*. Градусная мера угла	152
9.3*. Радианная мера угла	156
§ 10*. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла	159
10.1*. Определение синуса и косинуса угла	—
10.2*. Основные формулы для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$	165
10.3*. Тангенс и котангенс угла	170
Дополнения к главе 4	175
1. Косинус разности и косинус суммы двух углов	—
2. Формулы для дополнительных углов	179
3. Синус суммы и синус разности двух углов	180
4. Сумма и разность синусов и косинусов	182
5. Формулы для двойных и половинных углов	185
6. Произведение синусов и косинусов	191
7. Исторические сведения	193
ГЛАВА 5. Элементы приближённых вычислений, статистики, комбинаторики и теории вероятностей	
§ 11. Приближения чисел	194
11.1. Абсолютная погрешность приближения	—
11.2. Относительная погрешность приближения	198

11.3*. Приближения суммы и разности	202
11.4*. Приближение произведения и частного	206
11.5*. Приближённые вычисления и калькулятор	210
§ 12. Описательная статистика	212
12.1. Способы представления числовых данных	—
12.2. Характеристики числовых данных	217
§ 13. Комбинаторика	222
13.1. Задачи на перебор всех возможных вариантов	—
13.2. Комбинаторные правила	224
13.3. Перестановки	227
13.4. Размещения	228
13.5. Сочетания	230
§ 14. Введение в теорию вероятностей	232
14.1. Случайные события	—
14.2. Вероятность случайного события	236
14.3. Сумма, произведение и разность случайных событий	240
14.4. Несовместные события. Независимые события	243
14.5. Частота случайных событий	246
Дополнения к главе 5	248
1. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля	—
2. Исторические сведения	250
Задания для повторения	253
Задания для самоконтроля по программе 7—9 классов	301
Задания из тренировочных вариантов ГИА	311
Задания на исследование	314
Список дополнительной литературы	316
Предметный указатель	318
Ответы	320

Итогом изучения главы 1 становится рубрика «Исторические сведения», которая содержит интересный материал о равенстве и не равенстве в математике.

Задания «ищем информацию» в данном учебнике, автор предполагает, что ученики для общего развития сами ознакомятся с данной рубрикой.

3. Исторические сведения

Понятия равенства и неравенства чисел возникли в глубокой древности. Так, задачи на доказательство равенств и неравенств встречаются в математических работах, где для обозначения равенства и неравенства использовали слова или специальные обозначения, происходившие от сокращения этих слов. Ещё более 2000 лет до н. э. было известно неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

Задачи, связанные с неравенствами, встречаются в V книге «Начал» Евклида (IV в. до н. э.). Там, например, доказано, что если a , b , c и d — положительные числа и a — наибольшее число в про-

порции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство

$a + d > b + c$. В основном труде Паппа Александрийского (III в.), названном «Математическое собрание», например, доказываются, что если a , b , c и d — положительные числа и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство

$ad > bc$.

Отметим, что равенства и неравенства математики древности доказывали, опираясь на геометрические построения, так как алгебраический аппарат ещё не был развит.

Современные специальные знаки для обозначения равенства и неравенства стали применять сравнительно недавно. Знак равенства = ввёл в 1557 г. английский математик Р. Рикорд. Он мотивировал это так:

никакие два предмета не могут быть более равными, чем два параллельных отрезка. Знаки неравенства $>$ и $<$ ввёл в своей книге «Практика аналитического искусства» (1631) английский учёный Харрит. Знаки нестрогого неравенства \geq (не меньше) и \leq (не больше) введены в 1734 г. французским математиком П. Буге.

В Средние века много работ было посвящено доказательству равенств и неравенств. В наши дни равенства и неравенства широко используются во всех разделах математики.



Евклид

3. Исторические сведения

Математики Древней Греции изучали квадратные корни задолго до новой эры. Способы извлечения корня степени n также известны давно. Например, хорезмский математик Бируни (972—1048) в своей книге «Ключи к арифметике» описывает способ извлечения корня с любым натуральным показателем. Впрочем, способ этот громоздкий и неудобный. Начиная с XIII в. итальянские и другие европейские математики обозначали корень латинским словом Radix (корень) или сокращённо R . Так, французский математик Н. Шюке (ум. ок. 1500 г.) в XV в. писал $R^2 12$ вместо принятого теперь $\sqrt{12}$.

При изучении квадратных корней, учащиеся знакомятся с историческими сведениями, говорящие о том, что квадратные корни использовались в далеком прошлом. Автор поясняет, откуда взялось название «корня» и демонстрирует его первое обозначение.

2. Исторические сведения

Слово «прогрессия» латинское (*progressio*), оно означает «движение вперёд» (как слово «прогресс»).

С начала нашей эры известна следующая задача-легенда: «Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царём, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это „скромное“ желание Сеты».

В задаче надо найти сумму 64 членов геометрической прогрессии

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{63}$$

с первым членом 1 и знаменателем 2. Эта сумма равна

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Такое количество зёрен пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше поверхности Земли.

Задачи на геометрические и арифметические прогрессии встречаются у вавилонян, в египетских папирусах, в древнекитайском трактате «Математика в 9 книгах».

Так, в одной из клинописных табличек древних вавилонян предлагается найти сумму первых девяти членов геометрической прогрессии

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}, \dots$$

Вот другая задача, которую решали в Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до новой эры: «10 братьев, $1\frac{2}{3}$ мины серебра.

Брат над братом поднимается, на сколько поднимается, не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом — на сколько он выше?»

Здесь требуется по сумме первых десяти членов арифметической прогрессии $1\frac{2}{3}$ мины (1 мина = 60 шекелей) и известному восьмому члену определить разность арифметической прогрессии.

В папирусе Ахмеса предлагается задача: «У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из колоса может вырасти по семи мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

Отметим также, что Архимед умел вычислять сумму любого числа членов геометрической прогрессии. Правило нахождения суммы членов арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202) Леонардо Пизанского.

Итогом 3 главы, является историческая справка о том, как появилось понятие «прогрессия» и история происхождения прогрессии в некоторой «задаче легенде».

7. Исторические сведения

Понятия синуса, косинуса и тангенса угла возникли в геометрии и астрономии. Ими оперировали ещё древние математики, рассматривая отношения отрезков в треугольниках и окружностях. Древнегреческий учёный Клавдий Птолемей, живший во II в., составил подробную, весьма точную таблицу синусов углов, в течение многих веков служившую средством для решения треугольников.

В XI—XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. Индийские учёные вводили понятие линии синусов для угла α — это хорда единичной окружности, соответствующая центральному углу 2α . Её длина равна $2\sin\alpha$. Линия синусов у них называлась «архаджива», что буквально означало «половина тетивы лука». В Индии были составлены таблицы значений синусов для всех углов от 0° до 90° через каждые $3^\circ 45'$. Они были точнее таблиц Птолемея. Об их высокой точности говорит тот факт, что для синуса и косинуса $3^\circ 45'$ были вычислены значения $\frac{100}{1529}$ и $\frac{466}{467}$, отличающиеся от истинных менее чем на 0,00000001.

Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому учёному Насиру ад-Дину Мухаммаду ат-Туси (1201—1274). Однако и в его трудах ещё не была введена необходимая символика, и поэтому развитие тригонометрии происходило очень медленно. В XV в. немецкий учёный И. Мюллер (1436—1476), известный в науке под именем Региомонтан, издал труд «Пять книг о треугольниках всех видов», сыгравший важную роль в развитии тригонометрии.

В XV—XVII вв. в Европе было составлено и издано несколько тригонометрических таблиц. Над их составлением работали Н. Коперник (1473—1543), И. Кеплер (1571—1630), Ф. Виет (1540—1603) и др. В России первые тригонометрические таблицы были изданы в 1703 г. при участии Л. Ф. Магницкого.

Современный вид тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера. Он, в частности, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул. Впервые в его трудах встречаются записи $\sin x$, $\cos x$ и др. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие её в строгой научной последовательности.



Н. Коперник

Исторические сведения к главе 4 посвящены понятиям синуса, косинуса и тангенса. Рассказывается:

- понятие синуса, косинуса и тангенса возникли в геометрии астрономии;
- в XI- XIII вв началось формирование тригонометрии как отдельной науки;
- Над созданием тригонометрических таблиц работали Н. Коперник, Ф. Виети др.
- Современный вид тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера.

2. Исторические сведения

Изучение математических рукописей Древнего Египта и Вавилона показывает, что ещё в глубокой древности возникли некоторые приёмы приближённых вычислений. Под влиянием развития астрономии, мореплавания и техники методы приближённых вычислений совершенствовались.

Большие заслуги в развитии теории приближённых вычислений имеет российский академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945), который писал: «Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приёмы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо... Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причём всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки».

Чтобы в приближённых вычислениях можно было из самой записи приближённого числа судить о степени его точности, А. Н. Крылов предложил следующее правило: «Приближённое число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надёжными», т. е. верными.

А. Н. Крылов был не только видным математиком, но и выдающимся механиком-кораблестроителем, сделавшим ряд важнейших технических открытий.

В настоящее время приближённые вычисления используются для расчёта полётов космических аппаратов, в подготовке прогноза погоды и т. п. Эти расчёты ведутся с помощью ЭВМ.

Термин «статистика» введён в науку в XVIII в. Однако статистический учёт вёлся намного раньше: проводились переписи населения в Древнем Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала государств, вёлся учёт имущества граждан в Древнем Риме и т. п. Первой опубликованной стати-



А. Н. Крылов

Исторические сведения к главе 5 посвящены теории приближенных вычислений. Рассказывается:

- Большие заслуги в приближенных вычислениях имеет А.Н. Крылов;
- Рассказывается о термине «статика» и когда он был введен в науку...
- Авторы стараются рассказать ученикам о каждом термине, изученном в данной главе и как они пришли в науку.

Гельфман Э.Г.
«Алгебра» 9 класс

Заключением каждой главы учебника, являются «исторические сведения»

ОГЛАВЛЕНИЕ

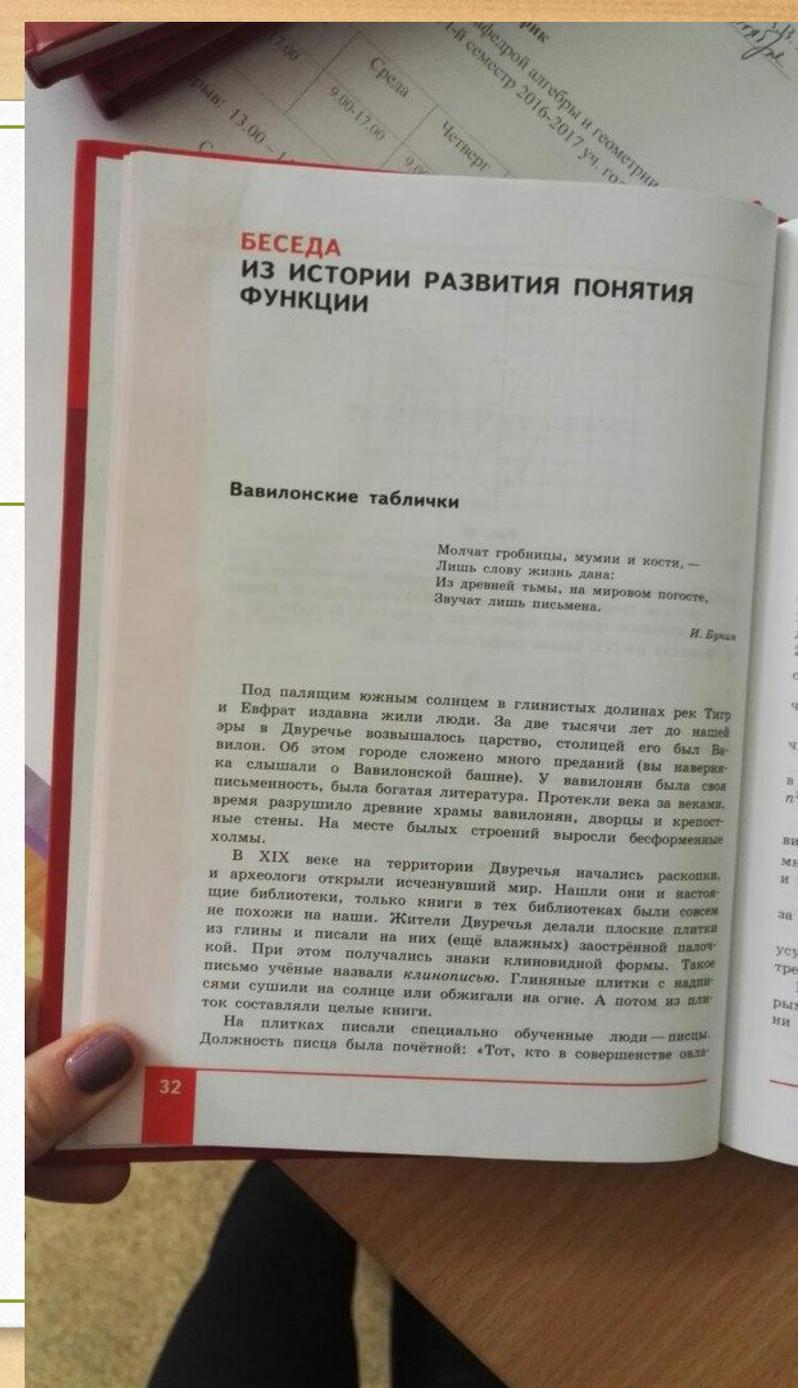
ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Часть I. Функции	5
Глава I. ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЁ ЗАДАНИЯ	6
§ 1. Первое знакомство с функцией	6
§ 2. Способы задания функции	10
Задания	14
Глава II. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ	17
§ 3. Область определения функции	17
§ 4. Чётность, нечётность функции	19
§ 5. Нули функции. Промежутки знакопостоянства	23
§ 6. Наибольшее и наименьшее значения функции. Промежутки монотонности функции	24
§ 7. Схема исследования функции	28
Задания	29
Беседа. Из истории развития понятия функции	32
Глава III. ПОДРОБНО О ТРЁХ ФУНКЦИЯХ	41
§ 8. Прямая пропорциональность	41
§ 9. Линейная функция	51
§ 10. Обратная пропорциональность	58
Задания	65
Беседа. Подробно о графиках трёх функций	70
Глава IV. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ	82
§ 11. Квадратичная функция в физике	82
§ 12. Свойства квадратичной функции	88
Задания	95

Оглавление

Глава V. ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ	98
§ 13. График функции $y = x^2$	98
§ 14. График функции $y = ax^2$	100
§ 15. График функции $y = ax^2 + n$	105
§ 16. График функции $y = a(x - m)^2$	108
§ 17. График квадратичной функции и её свойства	111
Задания	116
Беседа. Эта многоликая парабола	120
Глава VI. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ	129
§ 18. Понятие степенной функции	129
§ 19. Степенная функция с натуральным показателем	130
§ 20. Степенная функция $y = x^r$, r — рациональное число	132
§ 21. Графики и свойства некоторых степенных функций	133
Задания	138
Часть II. Уравнения и неравенства	139
Глава VII. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	140
§ 22. Линейное уравнение с двумя неизвестными	140
§ 23. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными	145
§ 24. Методы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными	149
§ 25. Равносильность систем двух линейных уравнений	158
§ 26. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными	162
§ 27. Системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными	167
Задания	172
Беседа. Для тех, кто интересуется рыночной экономикой	175
Глава VIII. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ	182
§ 28. Системы уравнений нового вида	182
§ 29. «Старые» методы для решения систем уравнений нового вида	183
§ 30. Системы, состоящие из линейного и квадратного уравнений	187
§ 31. Системы двух уравнений второй степени	189
§ 32. Системы нелинейных уравнений	200
§ 33. Применение систем уравнений	201
Задания	205

Итогом изучения главы 1 становится рубрика «Из истории развития», которая содержит интересный материал о истории развития функции, в котором рассматриваются следующие статьи :

- Вавилонские таблички;
- Греческое чудо;
- Линии Никола Орема;
- Рождение имени;
- Имя обрезает смысл;
- Определение Эйлера.



Итогом изучения главы 3 становится рубрика «Из истории развития», которая содержит подробную информацию о графиках 3х функций, в котором рассматриваются следующие статьи :

- График прямой пропорциональности;
- График линейной функции;
- График обратной пропорциональности;
- Построение гиперболы с помощью циркуля.

БЕСЕДА ПОДРОБНО О ГРАФИКАХ ТРЕХ ФУНКЦИЙ

График прямой пропорциональности

Рассмотрим функцию $y = kx$, $k > 0$, и докажем, что её графиком является прямая (в случае $k < 0$ доказательство проводится аналогично).

Напомним, графиком числовой функции $y = f(x)$ называется множество всех точек вида $(x; f(x))$, где x принимает всевозможные значения из области определения функции. Отметим на координатной плоскости точку $A(1; k)$, проведём прямую OA (рис. 42). Докажем, что прямая OA является графиком функции $y = kx$.

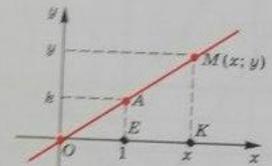


Рис. 42

Покажем сначала, что координаты каждой точки прямой OA удовлетворяют уравнению $y = kx$. Для точек $O(0; 0)$ и $A(1; k)$ это свойство очевидно.

Возьмём на прямой OA любую точку $M(x; y)$ с абсциссой $x > 0$, отличную от A . Опустим перпендикуляры из точек A и M на ось абсцисс Ox . Получим точки E и K .

Тогда по определению координат точек M и A длина отрезка MK равна y , длина отрезка AE равна k , длина отрезка OK равна x , длина отрезка OE равна 1 (рис. 42).

Так как прямые AE и MK параллельны, то треугольники OMK и OAE подобны. Из их подобия следует, что соответствующие

Итогом изучения главы 5 становится рубрика «Из истории развития», которая содержит подробную информацию о параболе и ее построении:

БЕСЕДА ЭТА МНОГОЛИКАЯ ПАРАБОЛА

Наблюдаем и строим параболу

Продолжим разговор о квадратичной функции. Зная форму этой функции проста, красива и ... встречается на каждом шагу.

Где же можно увидеть наглядное представление этой функции? Понаблюдайте за игрой в волейбол. Проследите за траекторией полёта мяча. Вы увидите параболу.

Остановитесь у фонтана. Всмотритесь в каскад водяных брызг, искр, солнечных бликов. Разглядите, вернее, выделите глазами струи. И вы снова увидите параболу!

Проведите эксперимент. В тёмной комнате поставьте на стол горящую свечу и поместите кольцо так, как показано на рис. 81. Прямая OO' параллельна плоскости стола.

Какую тень отбрасывает кольцо на стол? Эта тень даёт (приближённо) наглядное представление о графике квадратичной функции.

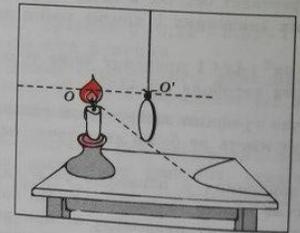


Рис. 81

Все рассмотренные ситуации связаны с параболой. Строго говоря, увидеть или изобразить *всю* параболу невозможно, — она бесконечна. Каждый раз мы наблюдали только какую-то её часть.