

Тема: «Графы и их представление на ЭВМ»



**СТУДЕНТКИ ГРУППЫ КСК-921
МИРКАЧЕВОЙ МАРИИ**

Основное определение



Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества *вершин*) и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V (E — множество *ребер*).

$$G(V, E) = \{V, E\}, V \neq \emptyset, E \subset V \times V, E = E^{-1}$$

Соединения между узлами графа называются ребрами. Если узлы графа не нумерованы, то ребра являются неориентированными. У графа с нумерованными узлами ребра ориентированы. Ребрам могут быть присвоены определенные веса или метки.

Смежность



- Если ребро соединят две вершины, то говорят, что оно им инцидентно; вершины, соединенные ребром называются смежными. Две вершины, соединенные ребром, могут совпадать; такое ребро называется петлей. Число ребер, инцидентных вершине, называется степенью вершины. Если степень вершины равна 0, то получается изолированная графа. Если два ребра инцидентны одной и той же паре вершин, они называются кратными; граф, содержащий кратные ребра, называется мультиграфом.

Другие определения



- ✓ Если элементами множества E являются *упорядоченные* пары, то граф называется *ориентированным* (или *орграфом*). В этом случае элементы множества V называются *узлами*, а элементы множества E — *дугами*.
- ✓ Если элементом множества E может быть пара *одинаковых* (не различных) элементов V , то такой элемент множества E называется *петлей*, а граф называется *графом с петлями* (или *псевдографом*).
- ✓ Если E является не множеством, а *набором*, содержащим несколько одинаковых элементов, то эти элементы называются *кратными ребрами*, а граф называется *мультиграфом*.
- ✓ Если элементами множества E являются не обязательно двухэлементные, *любые* подмножества множества V , то такие элементы множества E называются *гипердугами*, а граф называется *гиперграфом*.
- ✓ Если задана функция $E: V \rightarrow M$ и/или $F: E \rightarrow M$, то множество M называется множеством *пометок*, а граф называется *помеченным* (или *нагруженным*). В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа.

Виды графов и операции над ними



Элементы графов

Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$ (обозначается $G' \subset G$), если $V' \subset V$ и/или $E' \subset E$.

Если $V' = V$, то G' называется *остовным подграфом* G .

Если $V' \subset V \& E' \subset E \& (V' \neq V \vee E' \neq E)$, то граф G' называется *собственным подграфом* графа G .

Подграф $G'(V', E')$ называется *правильным подграфом* графа $G(V, E)$, если G' содержит все возможные ребра G :

$$\forall u, v \in V' (u, v) \in E \Rightarrow (u, v) \in E'.$$

Правильный подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством вершин V' .

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер в которой любые два соседних элемента инцидентны.

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k,$$

Это определение подходит также для псевдо-, мульти- и орграфов. Для «обычного» графа достаточно указать только последовательность вершин или только последовательность ребер.

Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*, иначе *открыт*. Если все ребра различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется *простой цепью*. В цепи $v_0, e_1, v_1, e_2,$

$$v_2, \dots, e_k, v_k,$$

вершины v_0 и v_k , называются *концами* цепи. Говорят, что цепь с концами u и v *соединяет* вершины u и v . Цепь, соединяющая вершины u и v , обозначается (u, v) . Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины u и v , то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины.

Замкнутая цепь называется *циклом*; замкнутая простая цепь называется *простым циклом*. Число циклов в графе G обозначается $z(G)$. Граф без циклов называется *ациклическим*.

Виды графов и операции над ними



Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ *изоморфны* (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция $h: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая смежность:

$$e_1 = (u, v) \in E_1 \Rightarrow e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2,$$
$$e_2 = (u, v) \in E_2 \Rightarrow e_1 = (h^{-1}(u), h^{-1}(v)) \in E_1$$

Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:

рефлексивность: $G \sim G$, где требуемая биекция суть тождественная функция;

симметричность: если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h , то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1} ;

транзитивность: если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h , и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g , то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$.

Виды графов и операции над ними



● Тривиальные и полные графы

Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*. Граф, состоящий из простого цикла с k вершинами, обозначается C_k .

Пример

C_3 — *треугольник*.

Граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*. Полный граф с p вершинами обозначается K_p , он имеет максимально возможное число ребер:

Полный подграф (некоторого графа) называется *кликой* (этого графа).

Виды графов и операции над ними



Двудольные графы

Двудольный граф (или *биграф*, или *четный граф*) — это граф $G(V, E)$, такой что множество V разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ & $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2 , то он называется *полным двудольным графом*. Если $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$, то полный двудольный граф обозначается $K_{m,n}$.

Представление графов в ЭВМ



Конструирование структур данных для представления в программе объектов математической модели — это основа искусства практического программирования. Используются четыре различных базовых представления графов. Выбор наилучшего представления определяется требованиями конкретной задачи. Более того, при решении конкретных задач используются, как правило, некоторые комбинации или модификации указанных представлений, общее число которых необозримо.

Требования к представлению графов



Известны различные способы представления графов в памяти компьютера, которые различаются объемом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций над графами. Представление выбирается, исходя из потребностей конкретной задачи. Далее приведены четыре наиболее часто используемых представления с указанием характеристики $n(p, q)$ — объема памяти для каждого представления. Здесь p - число вершин, а q - число ребер. Указанные представления пригодны для графов и орграфов, а после некоторой модификации также и для псевдографов, мультиграфов и гиперграфов.

1. Матрица смежности. Представление граф с помощью квадратной булевой матрицы, отражающей смежность вершин, называется матрицей смежности,

M : array [1.. p , 1.. p] of 0..1,

$M[i, j] = 1$, если вершина v_i смежна с вершиной v_j

0, если вершины не v_i и v_j смежны.

Для матрицы смежности $n(p, q) = O(p^2)$.

Требования к представлению графов



2. Матрица инциденций. Представление графа с помощью матрицы $H : \text{array}[1..p, 1..q]$ of $0..1$ (для орграфов $H : \text{array}[1..p, 1..q]$ of $-1..1$), отражающей инцидентность вершин и рёбер, называется матрицей инциденций, где для неориентированного графа

$H[i, j] = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j ,
0, в противном случае.

а для ориентированного графа

1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j и является его концом,

$H[i, j] = 0$, если вершина v_i и ребро e_j не инцидентны,

-1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j и является его началом

3. Списки смежности. Представление графа с помощью списочной структуры, отражающей смежность вершин и состоящей из массива указателей $\Gamma : \text{array}[1..p]$ of $\uparrow N$ на списки смежных вершин (элемент списка представлен структурой $N : \text{record } v : 1..p; n : \uparrow N \text{ endrecord}$), называется списком смежности. В случае представления неориентированных графов списками смежности $n(p, q) = O(p + 2q)$, а в случае ориентированных графов $n(p, q) = O(p + q)$.

4. Массив дуг. Представление графа с помощью массива структур $E : \text{array}[1..p]$ of $\text{record } b, e : 1..p \text{ endrecord}$, отражающего список пар смежных вершин, называется массивом рёбер (или, для орграфов, массивом дуг). Для массива рёбер (или дуг) $n(p, q) = O(2q)$.

5. Обход графа — это некоторое систематическое перечисление его вершин (и/или рёбер). Наибольший интерес представляют обходы, использующие локальную информацию (списки смежности). Среди всех обходов наиболее известны поиск в ширину и в глубину. Алгоритмы поиска в ширину и в глубину лежат в основе многих конкретных алгоритмов на графах.